Physique : DS1

I – Nasa's Mars Exploration Program (Centrale PC-2022)

Q1) Dimension

$$\vec{F} = -\frac{Gmm'}{r^2}\vec{u}_r \Rightarrow [G] = [F]L^2M^{-2} = MLT^{-2}L^2M^{-2}$$

$$\Rightarrow \boxed{[G] = M^{-1}L^3T^{-2}}$$

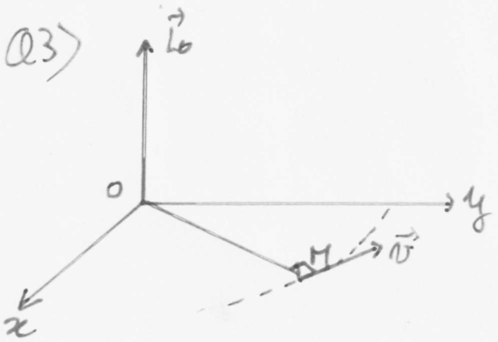
Unité : $\boxed{m^3kg^{-1}s^{-2}}$

Q2) TMC pour m en $\mathcal{R}_g$:

$$\frac{d\vec{L_O}}{dt} = \Sigma\vec{\mathcal{M}_O} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = r\vec{u_r} \wedge F\vec{u_r} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L_O} = \vec{cste}}$$

Q3)



$\vec{L_O} = \vec{cste} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$

$\Rightarrow$ Le plan formé par $\vec{OM}$ et $m\vec{v}$ est forcément le m̂ au cours du temps et orthogonal à $\vec{L_O}$

$\rightarrow$ le mouvement est plan

Calcul de L_O : $\vec{L_O} = mr^2\dot{\theta}\vec{u_z} = mC\vec{u_z}$

$$\Rightarrow \boxed{C = r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{L_O}{m}}$$: constante des aires

Q4) PFD pour m en $\mathcal{R}_g$: $\frac{mv^2}{R} = \frac{Gmm'}{R^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM_S}{R}$

d'où $v = \sqrt{\frac{GM_S}{R}}$ t.q $\boxed{\begin{cases} v_T = 2{,}98.10^4\,ms^{-1} \\ v_M = 2{,}42.10^4\,ms^{-1}\end{cases}}$

Q5) . Or $E_c = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \boxed{E_c = \frac{1}{2}\frac{GmM_S}{R}}$

. Et $E_m = E_p + E_c \Rightarrow \boxed{E_m = -\frac{1}{2}\frac{GmM_S}{R} = -E_c}$

Q6) Par définition : $T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{GM_S}}$

$$\Rightarrow \boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_S}R^3}$$

Q7) Cf Annexe

Q8) . On écrit l'E_m de deux façons :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_S}{R} = -\frac{GmM_S}{2a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{V_T'^2}{2} - \frac{GM_S}{R_T} = -\frac{GM_S}{R_T+R_M}$$

$$\Leftrightarrow \frac{V_T'^2}{2} - V_T^2 = -\frac{GM_S}{R_T+R_M}$$

$$\Leftrightarrow V_T'^2 = 2V_T^2 - \frac{2GM_S}{R_T+R_M}$$

$$= 2V_T^2 - 2V_T^2 \cdot \frac{R_T}{R_T+R_M}$$

On pose $\begin{cases} a_T = R_T \\ a_M = R_M \end{cases}$ $\Rightarrow \boxed{V_T' = V_T\sqrt{\frac{2R_M}{R_T+R_M}}}$

D'où $\Delta V_T = V_T' - V_T = V_T\left[\sqrt{\frac{2R_M}{R_T+R_M}} - 1\right] = \underline{\underline{2{,}93.10^3\,ms^{-1}}}$

Q9) Le vaisseau va mettre $\frac{1}{2}$ période t.q :

$$a^3/T^2 = \frac{GM_S}{4\pi^2} \Leftrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_S}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t = \pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_S}}} = 259 \text{ jours}$$

Q10) Mars décrit une trajectoire circulaire en T_M.

——— portion de trajectoire circulaire en Δt.

$$\Rightarrow \frac{\Delta t}{T_M} = \frac{\beta_0}{2\pi} \quad \text{avec} \quad T_M = T_T\left(\frac{a_M}{a_T}\right)^{3/2} = 687 \text{ jours}$$

$$\Rightarrow \pi - \alpha_0 = 2\pi\frac{\Delta t}{T_M}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_0 = \pi - \frac{2\pi\Delta t}{T_M}} = \underline{\underline{0{,}772 \text{ rad} \approx 44{,}3°}}$$

cf Annexe : Schéma

Q11) . Si le vaisseau parcourt une ellipse supplémentaire il aura effectué

$2\Delta t = 518$ jours en orbite

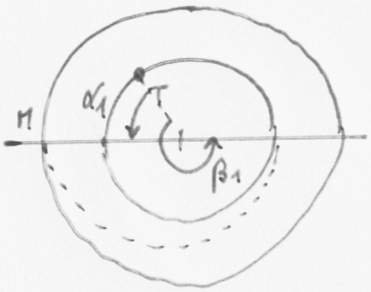
. La terre a effectué pendant ce temps 1 orbite complète plus un angle θ_T t.q :

$$\underline{\underline{\theta_T}} = \frac{518 - 365}{365} \cdot 2\pi = \underline{\underline{2{,}63 \text{ rad} \approx 151°}}$$

$\Rightarrow$ Le vaisseau ne sera pas en phase pour atterrir

Q12) La terre parcourt la trajectoire circulaire en T_T.

——— la portion de trajectoire circulaire en Δt.



$$\text{d'où} \quad \frac{\Delta t}{T_t} = \frac{\beta_1}{2\pi} = \frac{\alpha_1 + \pi}{2\pi}$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{\alpha_1 = \frac{2\pi\Delta t}{T_t} - \pi} = \underline{\underline{1{,}32 \text{ rad} = 75°}}$$

Q13) • Au départ l'angle entre Mars et la terre est α_0. Au cours du temps on aura : $\alpha(t) = \alpha_0 + \left(\underbrace{\frac{2\pi}{T_M}}_{\omega_M} - \underbrace{\frac{2\pi}{T_T}}_{\omega_T}\right) t$

• La mission sur Mars va se terminer quand $\alpha = \alpha_1 \; [2\pi]$

$$\Leftrightarrow \alpha_0 + 2\pi t_1 \left(\frac{1}{T_M} - \frac{1}{T_t}\right) = \alpha_1 + 2n\pi$$

D'où $\boxed{t_1 = \dfrac{\alpha_1 - \alpha_0 + 2\pi n}{2\pi\left(1/T_M - 1/T_t\right)}} = 712$ jours.

$\Rightarrow$ Mission sur Mars : $\underline{\underline{\Delta t_{Mars}}} = 712 - 259 = \underline{\underline{453 \text{ jours}}}$

$\Rightarrow$ Mission totale : $\underline{\underline{\Delta t_{tot}}} = 712 + 259 = \underline{\underline{971 \text{ jours}}}$

. La période d'attente entre 2 fenêtres de lancement la période relative ainsi :

$$\omega_{relatif} = \omega_T - \omega_M \Leftrightarrow \frac{2\pi}{T_{relatif}} = \frac{2\pi}{T_T} - \frac{2\pi}{T_M}$$

$$\Leftrightarrow T_{relatif} = \frac{1}{\left(\frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_M}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{T_{relatif} = \frac{T_T . T_M}{T_M - T_T}} \Rightarrow \Delta t_{attente} = T_{relatif} = \underline{\underline{779 \text{ jours}}}$$

Q14) cf Annexe

Q15) Le point de départ a une vitesse orthoradiale, il s'agit donc d'un extrémum de r. On voit facilement sur l'annexe 2 qu'il s'agit du périhélie

Q16) . Au périhélie : $r_p = \dfrac{p}{1+e} = a_T$

. À l'arrivée : $a_M = \dfrac{p}{1+e\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \dfrac{p}{1-e/\sqrt{2}}$

D'où $a_M = \dfrac{a_T(1+e)}{1-e/\sqrt{2}} \Leftrightarrow a_M(1-e/\sqrt{2}) = a_T(1+e)$

$\Leftrightarrow e\left[a_T + a_M/\sqrt{2}\right] = a_M - a_T$

$\Leftrightarrow \boxed{e = \dfrac{a_M - a_T}{a_T + a_M/\sqrt{2}}} = \underline{\underline{0{,}251}}$

. Pour le tracé, on peut calculer $a_a = \dfrac{p}{1-e} = a_T \dfrac{1+e}{1-e} \simeq 1{,}67\, a_T$.

Q17) Soit $2a = a_a + a_T = a_T\left(1 + \dfrac{1+e}{1-e}\right) = a_T\left(\dfrac{2}{1-e}\right)$

d'où $E_m = -\dfrac{GmM_S}{2a} = -\dfrac{GmM_S}{2a_T}(1-e)$

or $\dfrac{GM_S}{a_T} = V_T^2 \Rightarrow \boxed{E_m = -\dfrac{mV_T^2}{2}(1-e)}$

Q18) On réécrit E_m : $E_m = -\dfrac{mV_T^2}{2(1-e)} = \dfrac{1}{2}mV_T''^2 - \dfrac{GmM_S}{a_T}$

$= \dfrac{1}{2}mV_T''^2 - mV_T^2$

$\Rightarrow V_T''^2 = 2V_T^2 - V_T^2(1-e)$

$\Rightarrow \boxed{V_T'' = V_T\sqrt{(1+e)}} = 3{,}34.10^4\,ms^{-1}$

Q19) D'où $\boxed{\Delta V_T' = V_T'' - V_T = V_T\left(\sqrt{1-e} - 1\right)} = \underline{\underline{3{,}53.10^3\,ms^{-1}}}$

Q20) Soit $\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = mC\vec{u}_z = a_T\vec{u}_r \wedge v_T''\vec{u}_\theta$

$\Rightarrow \boxed{C = \dfrac{L_O}{m} = a_T V_T''}$

Q21) Soit $r^2 \dfrac{d\theta}{dt} = C \Leftrightarrow dt = \dfrac{r^2 d\theta}{C}$

$$\Rightarrow \Delta t' = \frac{1}{C}\int_0^{3\pi/4} \frac{a_T^2(1+e)^2}{(1+e\cos\theta)^2}\,d\theta$$

$$= \frac{a_T^2(1+e)^2}{C} \times 2{,}15$$

$$\Rightarrow \Delta t' = \frac{a_T(1+e)^2}{V_T''} . 2{,}15 = \underline{\underline{175 \text{ jours}}}$$

La durée du trajet a été réduit de $259 - 175 = 84$ jours.

FEUILLE A RENDRE AVEC SA COPIE

Questions 7 et 10

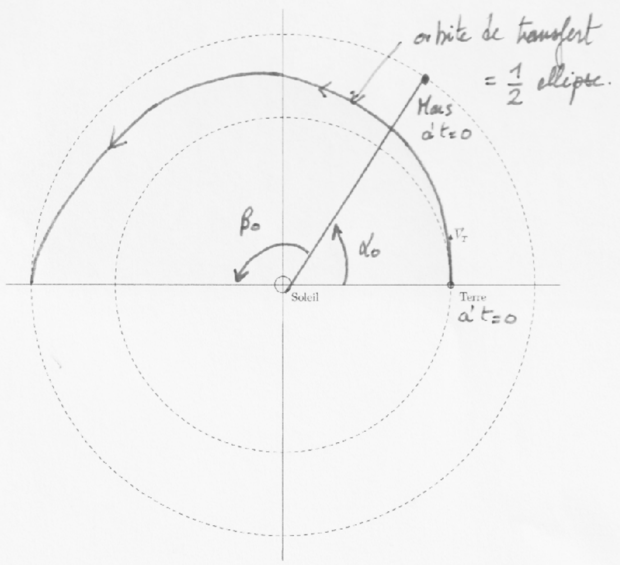


Figure A

Questions 14 et 16

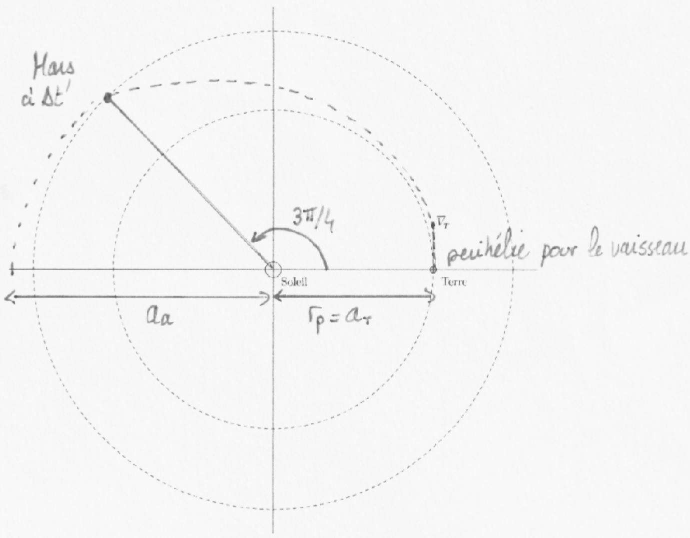


Figure B

Partie II - Etude de deux mouvements avec force de frottement du type $-k\vec{v}$ (Mines d'Albi 2004)

I) Mvt d'une bille dans un liquide

I.1) Poussée d'Archimède : $\boxed{\vec{A} = -4/3\,\pi r^3 \rho_0 g\, \vec{e_z}}$
- opposé au poids
- norme = poids du fluide déplacé

I.2) Dans le référentiel du laboratoire (Oxyz) on a :

$$\vec{P} + \vec{A} + \vec{f} = m\vec{a} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \vec{P} = \text{poids de la bille} \\ \vec{f} = -6\pi\eta r \vec{v}. \end{cases}$$

I.3) Si $\vec{v} = \vec{0}$, $\boxed{\vec{P} = -\vec{A}}$

I.4) PFD : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -6\pi\eta r\vec{v} + m\vec{g} - m_0\vec{g}$

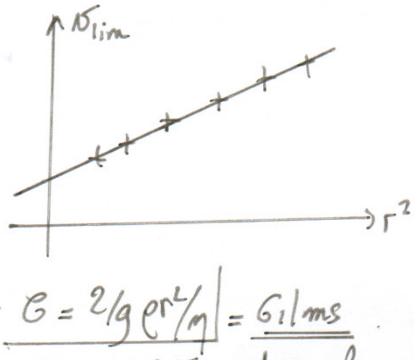
$$\Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{6\pi\eta r\vec{v}}{m} = \vec{g}\left(1 - \frac{m_0}{m}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \vec{g}\left(\frac{\rho-\rho_0}{\rho}\right) \quad \text{où } \tau = \frac{2}{9}\rho r^2/\eta} \quad (1)$$

I.5) La solution de (1) s'écrit : $\vec{v} = \vec{A}e^{-t/\tau} + \vec{g}\tau\left(\dfrac{\rho-\rho_0}{\rho}\right)$ où $\tau = \dfrac{2}{9}\rho r^2/\eta$

d'où si $t \to \infty$: $\vec{v} \to \boxed{\vec{v}_{lim} = \dfrac{2}{9}\dfrac{\rho-\rho_0}{\eta} g r^2}$

I.6) A l'aide d'une régression linéaire $v_{lim} = f(r^2)$ faite sur calculatrice ou ordinateur :



$$v_{lim} = 2{,}01.10^{-3} + \underbrace{22\,318}_{\text{pente}}\, r^2 \quad \text{où } r^2 = 0{,}9998$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta = \frac{2}{9}\,\frac{\rho-\rho_0}{\text{pente}}\,.\,g} = 0{,}64 \text{ Pl ou } 0{,}64 \text{ kg m}^{-1}\text{s}^{-1}$$

Et $\tau = 2/9\,\rho r^2/\eta = 61\text{ ms}$. Après 5τ, on peut considérer que $v = 0{,}99\, v_{lim}$ et conclure que le phénomène est facilement observable.

II) Mvt d'un proton dans un liquide

II.1.1) $\begin{cases} \text{Forces de frottement fluide } \vec{f} = -k\vec{v} \\ \text{Force magnétique : } \vec{f_L} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \end{cases}$

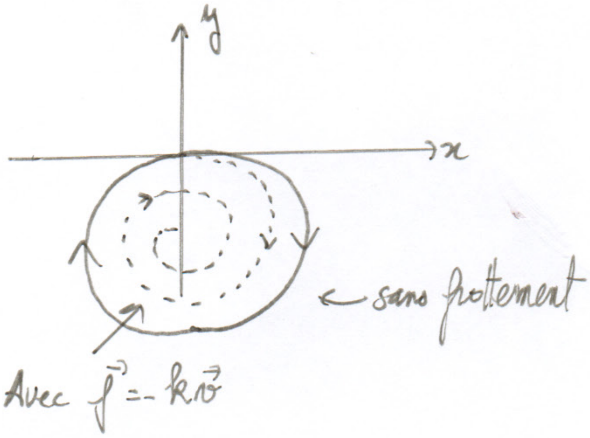
II.1.2) PFD : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -k\vec{v} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \omega \vec{v} \wedge \vec{u} \text{ où } \tau = \frac{m}{k}, \omega = \frac{eB}{m} \text{ et } \vec{u} = \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|}}$$

II.2.1) . Absence de frottements $\delta W_{nc} = 0$ et la force magnétique ne travaille pas d'où $\boxed{\dfrac{dE_c}{dt} = 0}$

. On va retrouver un mouvement cyclotron càd un mvt plan circulaire et uniforme de rayon : $R = \dfrac{v_0}{\omega}$ et de centre $C\left(0, -v_0/\omega\right)$

II.2.2) La force de frottement va abaisser v et donc E_c d'où une diminution de v : c'est une spirale.



II.2.3) II.1.2) $\Rightarrow \dfrac{d\vec{v}}{dt} + \dfrac{\vec{v}}{\tau} = \omega \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega v_y \\ -\omega v_x \\ 0 \end{vmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} dv_x/dt = -v_x/\tau + \omega v_y = a v_y - b v_x \\ dv_y/dt = -v_y/\tau - \omega v_x = -a v_x - b v_y \end{cases} \text{ d'où } \boxed{b = 1/\tau, a = \omega}$$

II.2.4) Soit $\underline{V} = v_x + j v_y$ d'où : $\frac{d\underline{V}}{dt} = (a v_y - b v_x) + j(-a v_x - b v_y)$

$$\Leftrightarrow \frac{d\underline{V}}{dt} = v_y(a - jb) + v_x(-b - ja) = (v_x + j v_y)(-b - ja)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\underline{V}}{dt} + \underline{V}(a + jb) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\underline{V} = A e^{-(b+ja)t}}$$

Or à $t=0$, $\underline{V}(0) = v_0 \Rightarrow \underline{V} = v_0 e^{-(b+ja)t}$

$$\text{d'où } \boxed{\begin{cases} v_x = Re(\underline{V}) = v_0 e^{-bt} \cos(at) \\ v_y = Im(\underline{V}) = -v_0 e^{-bt} \sin(at) \end{cases}}$$

II.3.1) Soit $\underline{V} = \frac{d\underline{X}}{dt} \Rightarrow \underline{X} = \int \underline{V}\, dt = \int v_0 e^{-(b+ja)t}\, dt$

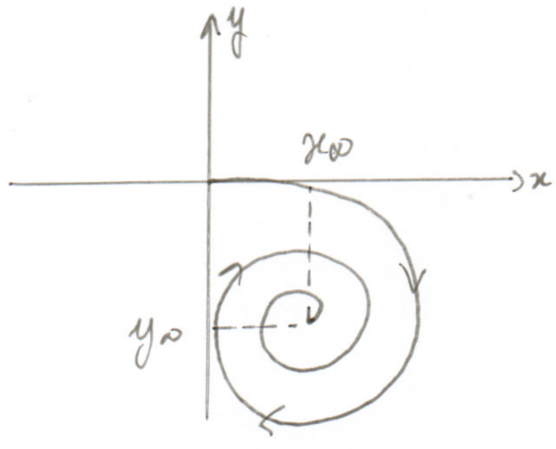
$$\Rightarrow \underline{X} = \frac{v_0}{-b-ja} e^{-(b+ja)t} + C$$

or $\underline{X}(0) = 0 \Rightarrow \boxed{\underline{X} = \frac{v_0}{b+ja}\left(1 - e^{-(b+ja)t}\right)}$

II.3.2) Lorsque $t \to \infty$: $\underline{X}_\infty = \frac{v_0}{b+ja} = x_\infty + j y_\infty = \frac{v_0}{\sqrt{a^2+b^2}}(b - ja)$

d'où $\boxed{x_\infty = \frac{b v_0}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ et } y_\infty = -\frac{a v_0}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

II.3.3)



- Le centre de la spirale se déplace sur la droite d'après mes calculs par rapport au cas sans frottement
- On appelle cette spirale, une spirale logarithmique.