Physique : DM6

Electrostatique - CCP 2010 PSI

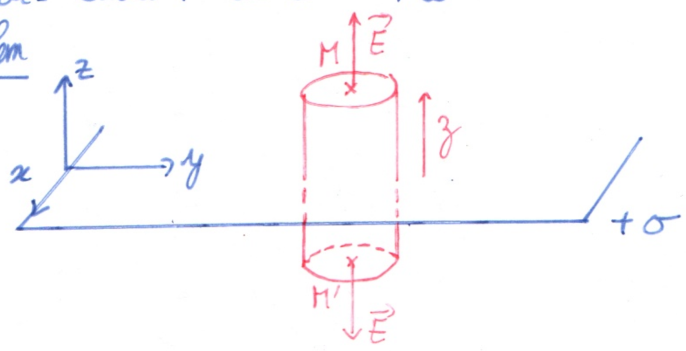
I - Théorème de Gauss

1) Théorème de Gauss : $\phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E}\cdot\vec{dS} = q_{int}/\varepsilon_0$

Maxwell - Gauss : $\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$

II - Condensateur plan

2)



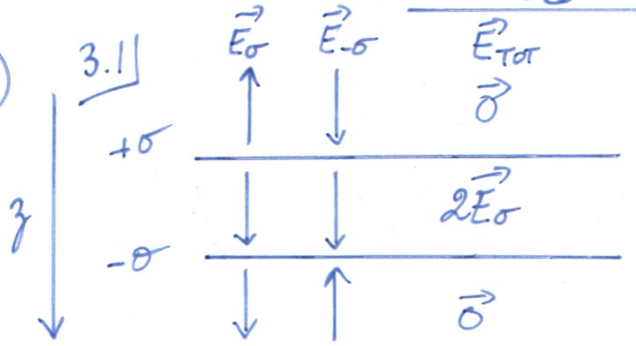
* Les plans (Myz) et (Mxz) sont plans de symétrie $\Rightarrow \vec{E} = E\,\vec{u}_z$

* Il y a invariance par $T(y)$ et $T(x)$ $\Rightarrow E = E(z)$

* En prenant comme surface de Gauss un cylindre de rayon R, symétrique par rapport au plan on a : $2ES = \dfrac{\sigma S}{\varepsilon_0}$ car $\vec{E}\cdot\vec{dS}_{LAT} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\mathrm{sign}(z)\,\vec{u}_z}$$

3) 3.1)



A l'aide du théorème de superposition on obtient : $\boxed{\begin{cases} \vec{E}_{int} = \sigma/\varepsilon_0\,\vec{u}_z \\ \vec{E}_{ext} = \vec{0} \end{cases}}$

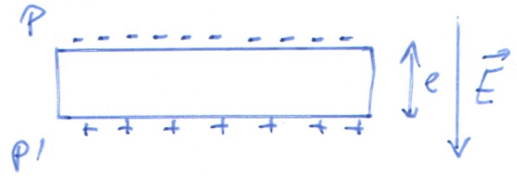
3.2) Soit $dV = -\vec{E}\cdot\vec{dl}$ d'où $\boxed{U = \sigma/\varepsilon_0\, d}$

3.3) On a $C = Q/U$

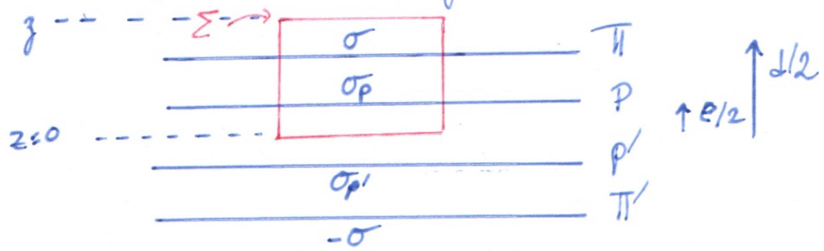
$$\Leftrightarrow C = \frac{\sigma S}{\sigma d} \cdot \varepsilon_0 \quad \Leftrightarrow \boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}}$$

4) . Le champ électrostatique qui règne dans le condensateur déplace les électrons de la lame jusqu'à ce que le champ total dans la lame (conducteur) soit nul.

. Il apparaît des charges surfaciques sur les plans (P) et (P')



5) Le problème des symétries reste inchangé $\Rightarrow \vec{E} = E(z)\vec{u}_z$



Donc $[E(0) + E(z)]S = (\sigma + \sigma_P)S/\varepsilon_0$

or $\begin{cases} \vec{E}_{ext} = \vec{0} \\ \vec{E}(0) = 0 \text{ par symétrie} \end{cases}$ donc $\boxed{\sigma = -\sigma_P}$

6) 6.1) En appliquant le théorème de Gauss pour un pt M t.q $e/2 < z < d/2$ on a :

$$[E(0) + E(z)]S = \frac{\sigma_P S}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E(z) = \sigma_P/\varepsilon_0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \vec{E}(e/2 < z < d/2) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_z \\ \text{et } \vec{E}(-\frac{d}{2} < z < -\frac{e}{2}) = \sigma/\varepsilon_0 \, \vec{u}_z \end{array}}$$

$$\Rightarrow U' = \int_{-d/2}^{d/2} \vec{E} \cdot \vec{dl} = 2\sigma/\varepsilon_0 \cdot \left(\frac{d-e}{2}\right) + 0 \Rightarrow \boxed{U' = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(d-e)}$$

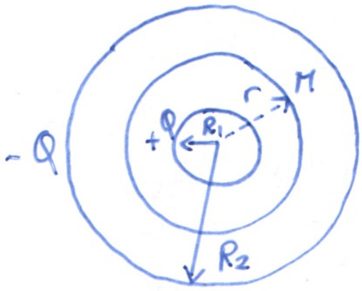
6.2) Soit $Q = \sigma S = C'U'$

$$\Leftrightarrow C' = \frac{\sigma S}{U'} \Leftrightarrow C' = \frac{\sigma S}{\sigma(d-e)} \cdot \varepsilon_0 \Leftrightarrow \boxed{C' = \frac{\varepsilon_0 S}{d-e}}$$

Donc $\frac{C'}{S} > \frac{C}{S}$, la plaque a permis d'augmenter la capacité.

III Condensateur cylindrique

7



. On a affaire a un problème à symétrie cylindrique d'où :

$$\vec{E} = E(r)\vec{u_r}$$

. On applique le théorème de Gauss à un cylindre de rayon r et de hauteur H d'où :

$$2\pi r H E = q_{int}/\varepsilon_0$$

$$\Leftrightarrow 2\pi r H E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \text{ si intérieur et } 0 \text{ si extérieur.}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \vec{E}(r<R_1) = \vec{0}, \quad \vec{E}(r>R_2) = \vec{0} \\ \text{et} \\ \vec{E}(R_1<r<R_2) = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r H}\vec{u_r} \end{cases}}$$

8 D'où : $V_{int}(r) = \frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0 H} \ln r + cste$

$$\Leftrightarrow \boxed{V_{int}(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 H} \ln\left(\frac{R_1}{r}\right) + V_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{U = V_2 - V_1 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 H} \ln(R_1/R_2)}$$

(9) On $Q = C(V_1 - V_2) \Rightarrow \boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 H}{\ln(R_2/R_1)}}$

(10) On a $W_{cond} = \iiint_{espace} \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\right) d\tau = \iiint_{espace} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} r\,dr\,d\theta\,dz$

$$\Leftrightarrow W_{cond} = \frac{Q^2}{4\pi^2\varepsilon_0 H^2} \cdot \frac{\varepsilon_0}{\cancel{2}} \times \cancel{2}\pi \times H \times \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

$$\Leftrightarrow W_{cond} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 H} \cdot \ln(R_2/R_1)$$

$$= \frac{1}{2} Q^2 \times \left(\frac{2\pi\varepsilon_0 H}{\ln(R_2/R_1)}\right)^{-1}$$

D'où $\boxed{W_{cond} = \frac{1}{2} Q^2/C}$

(11) On a : $C = \frac{2\pi\varepsilon_0 H}{\ln\left(\frac{R_1+e}{R_1}\right)} = 2\pi\varepsilon_0 H / \ln(1 + e/R_1)$

$$\Leftrightarrow C \overset{D.L}{\sim} \frac{2\pi\varepsilon_0 H}{e/R_1} \Leftrightarrow C \sim \frac{2\pi\varepsilon_0 H R_1}{e}$$

or $S_1 = 2\pi R_1 H \Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 S_1}{e}$

C'est équivalent à un condensateur plan t.q : $\begin{cases} e = R_2 - R_1 \\ \text{et} \\ S_1 = S_{LATÉRALE} = 2\pi R_1 H. \end{cases}$