

Physique : DM2

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, **la qualité de la rédaction**, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

Partie A – Traitement des eaux usées

L'assainissement des eaux usées dans une station d'épuration nécessite de débarrasser les effluents domestiques ou industriels des sables, graisses, déchets ménagers et agents polluants. On s'intéressera ici plus spécifiquement au pré-traitement et au traitement primaire des eaux dans la station (voir **figure 1**). Les termes employés seront définis au fur et à mesure du problème.

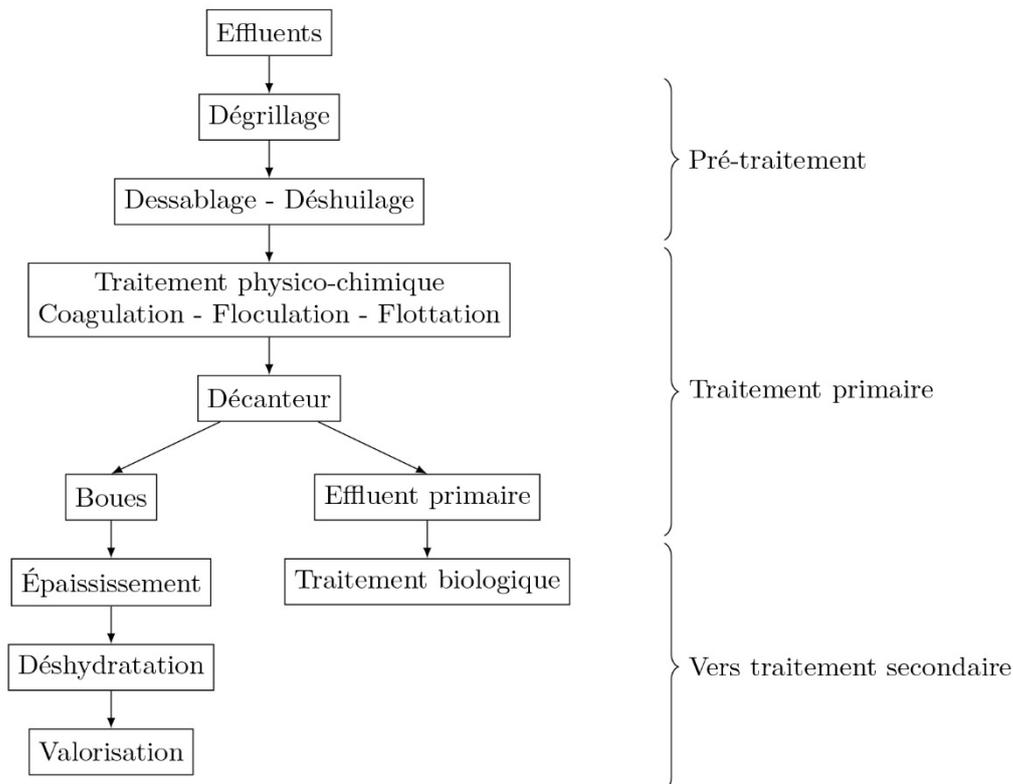


Figure 1 Traitements successifs des effluents dans une station d'épuration

La **partie I** étudie le principe de débitmètres adaptés aux conditions particulières des stations d'épuration et est complètement indépendante des parties suivantes. Les parties II et III s'intéressent à des procédés physiques de purification des eaux usées et sont largement indépendantes entre elles.

Les résultats numériques seront donnés avec un nombre de chiffres significatifs compatible avec celui utilisé pour les données.

Dans tout le problème, l'eau sera assimilée à un fluide incompressible.

Définition :

- Le nombre de Reynolds pour une sphère est défini par :

$$R_e = 2r \cdot \frac{V}{\nu}$$

Où :

- r = Rayon de la sphère
- V = vitesse de la sphère
- $\nu = \frac{\eta}{\rho_e}$ viscosité cinématique du fluide où circule la sphère.

II Dessablage - Déshuilage

On étudie dans cette partie la sédimentation ou la remontée à la surface de particules dans le bac de pré-traitement des eaux usées (*dessablage - déshuilage*), l'effluent ayant déjà traversé à l'entrée de la station d'épuration une grille qui retient les déchets solides les plus volumineux (*dégrillage*).

On modélise l'une de ces particules par une sphère homogène de masse volumique ρ_s et de rayon r . On note $d = \rho_s/\rho_e$ sa densité, où ρ_e est la masse volumique de l'eau. La vitesse de la bille sphérique est $\vec{v} = v(t)\vec{u}_z$.

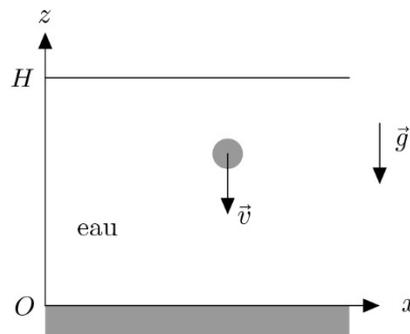


Figure 7 Particule sphérique plongée dans l'eau

II.A – On suppose que la force de traînée \vec{F}_t s'écrit sous la forme d'une force de Stokes :

$$\vec{F}_t = -6\pi\eta r \vec{v}$$

où η est la viscosité dynamique de l'eau.

II.A.1) Effectuer un bilan des forces s'exerçant sur la bille dans le référentiel du fluide au repos supposé galiléen.

II.A.2) Déterminer la vitesse limite de chute v_ℓ de la bille en fonction de r , d , g et $\nu = \eta/\rho_e$, viscosité cinématique de l'eau. À quelle condition y aura-t-il sédimentation, ou remontée en surface ?

II.B – Pour les différentes particules proposées dans le tableau 1, calculer la vitesse limite v_ℓ et le temps t_c nécessaire pour parcourir une hauteur $H = 2$ m, en supposant que la vitesse limite est immédiatement atteinte. On prendra $\nu = 1,0 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et $d = 2,65$ (densité du quartz) et on présentera les résultats sous la forme d'un tableau.

	Sable grossier	Sable fin	Limon	Argile	Colloïde
Rayon r	1 mm	100 μm	10 μm	1 μm	0,1 μm

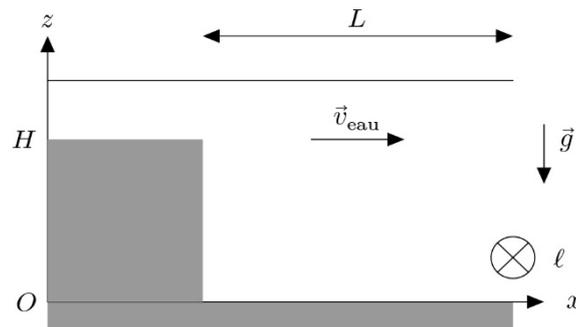
Tableau 1 Taille typique de différentes particules

II.C – Exprimer le nombre de Reynolds Re caractéristique de l'écoulement autour de la bille en fonction des paramètres introduits. Sachant que l'expression de la force de traînée introduite en II.A peut être utilisée pour $Re \leq 5$, commenter les résultats de la question précédente.

II.D – Le temps de chute t_c des particules ne peut dépasser 2 heures, afin d'éviter la remontée de sédiments provoquée par la sédimentation des boues. En déduire la taille minimale r_{\min} des particules solides éliminées dans le dessableur.

II.E – Dimensionnement du dessableur

Le débit à traiter est $Q = 20 \text{ L}\cdot\text{s}^{-1}$, soit environ 1700 m^3 par jour. Le dessableur longitudinal est un bac de profondeur $H = 2,0 \text{ m}$, de longueur L et de largeur $\ell = L/6$. Les eaux usées traversent le bac dessableur avec une vitesse $\vec{v}_{\text{eau}} = v_{\text{eau}} \vec{u}_x$.

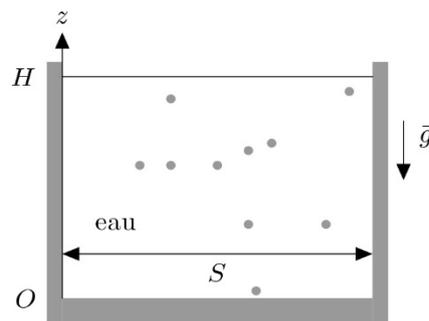
**Figure 8** Vue de profil d'un bac dessableur

II.E.1) Quelle est la forme de la trajectoire des particules solides dans le référentiel du sol ? Estimer, en régime permanent, le temps Δt mis par l'eau, support des particules, pour traverser le dessableur.

II.E.2) Quelle relation doit exister entre $t_c(r_{\min})$ et Δt pour que toutes les particules de rayon supérieur à r_{\min} sédimentent ? Déterminer numériquement la longueur minimale L_{\min} du bac dessableur.

III Décantation des boues résiduelles

Cette partie s'intéresse à la modélisation des processus de sédimentation au sein du décanteur primaire, sous l'action du champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g\vec{u}_z$. L'eau à traiter est assimilée à une suspension dans l'eau de particules sphériques identiques de rayon $r \leq 1 \mu\text{m}$ et de densité d . On note $n^*(z, t)$ la densité volumique de particules, exprimée en particules·m⁻³.

**Figure 9** Particules en suspension dans un bac décanteur

III.A – Profil de concentration à l'équilibre dans un modèle convecto-diffusif

On assimile le bac décanteur à une cuve de hauteur $H = 2 \text{ m}$ et de section S .

III.A.1) On s'intéresse ici à l'évolution de la densité volumique de particules n^* au cours du temps, sous l'effet de la diffusion et de la gravité.

a) La diffusion de particules se traduit par l'existence d'un flux de particules \vec{j}_D . De la même façon que la diffusion thermique dans un milieu se traduit par un flux thermique \vec{j}_Q proportionnel et opposé au gradient de température $\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$ (loi de Fourier), la diffusion de particules se traduit par un flux de particules

proportionnel et opposé au gradient de concentration, soit ici $\vec{j}_D = -D \overrightarrow{\text{grad}} n^*$. La constante D est le coefficient de diffusion des particules sphériques dans l'eau.

Exprimer \vec{j}_D en fonction de D , $\frac{\partial n^*}{\partial z}$ et d'un vecteur unitaire.

b) En l'absence de diffusion, les particules ont un mouvement rectiligne uniforme dirigé vers le fond du bac, à la vitesse v_ℓ . Déterminer l'expression du flux de particules \vec{j}_C associé à la convection, en fonction de $n^*(z, t)$ et v_ℓ . En déduire le flux total de particules $\vec{j} = \vec{j}_D + \vec{j}_C$.

c) Montrer que l'évolution de $n^*(z, t)$ est régie par l'équation de Mason-Weaver :

$$\frac{\partial n^*}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n^*}{\partial z^2} + v_\ell \frac{\partial n^*}{\partial z}$$

III.A.2) On cherche le profil de concentration $n_\infty^*(z)$ en régime stationnaire.

a) Donner la forme de la solution générale pour $n_\infty^*(z)$, en introduisant une longueur caractéristique λ . Écrire la condition limite pour le flux total \vec{j} en $z = 0$, et en déduire la nouvelle forme de $n_\infty^*(z)$, que l'on exprimera en fonction de $n_0^* = n_\infty^*(z = 0)$, λ et z .

b) La relation de fluctuation-dissipation d'Einstein relie le coefficient de diffusion D au coefficient de frottement de la force de Stokes :

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta r}$$

Montrer que la répartition des particules $n_\infty^*(z)$ peut s'interpréter à l'aide du facteur statistique de Boltzmann, qui stipule qu'à l'équilibre thermodynamique, $n_\infty^*(z)$ est proportionnelle au facteur $\exp\left(-\frac{e_p}{k_B T}\right)$, e_p étant l'énergie potentielle associée à une particule et k_B la constante de Boltzmann.

On pourra utiliser le résultat de la question II.A.

c) Pour $T = 300$ K, estimer numériquement λ pour $r = 1$ μm , $r = 0,1$ μm et $r = 0,01$ μm . Conclure quant à la nécessité de prendre en compte la diffusion dans la modélisation de la sédimentation.

III.B – Sédimentation d'une suspension concentrée

On néglige les effets diffusifs. À concentration élevée, la vitesse de sédimentation v_ℓ décroît avec la densité volumique de la boue. Ce phénomène est décrit par la loi empirique de Richardson-Zaki : $v_\ell(x) = v_0(1-x)^n$ où x est la fraction volumique en particules solides dans la boue, v_0 une constante et $n \simeq 5,1$.

III.B.1)

a) Relier $x(z, t)$ à la densité volumique en particules solides $n^*(z, t)$ et au volume $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ d'une particule solide. Tracer l'allure de la courbe $v_\ell = f(n^*)$.

b) Que représente la constante v_0 ? Quelle est la conséquence pour le mouvement macroscopique de l'eau de la chute d'un grand nombre de sédiments ? Expliquer alors qualitativement pourquoi v_ℓ décroît lorsque la concentration en particules augmente.

III.B.2) On note le flux de particules \vec{j} (qui s'assimile au flux convectif \vec{j}_C déterminé à la question III.A.1). Les particules se déplaçant uniquement vers le bas, on note $\vec{j} = -j(z, t)\vec{u}_z$.

Déterminer $j(z, t)$ en fonction de v_0 , V , n et $n^*(z, t)$.

En vous aidant de la courbe de la figure 10, déterminer la valeur maximale j_{max} du flux de particules, en fonction de v_0 et V .

Que représente la pente du segment OM ?

III.B.3) Une suspension initialement homogène de densité volumique n_0^* laissée à décanter présente rapidement trois zones distinctes : une zone transparente (1) en haut du décanteur, une zone opaque (3) en bas, et une zone trouble (2) qui les sépare (voir figure 11).

a) En vous aidant de la figure 10, déterminer la valeur de n^* dans chacune de ces trois zones.

b) Par un bilan de particules entre les instants t et $t + dt$, montrer que la vitesse de déplacement \vec{v}_F d'une frontière séparant deux zones de densités volumiques de particules respectives n_-^* et n_+^* (voir figure 11) s'écrit :

$$\vec{v}_F = -\frac{j(n_+^*) - j(n_-^*)}{n_+^* - n_-^*} \vec{u}_z$$

c) La frontière entre (1) et (2) se déplace à une vitesse \vec{v}_{12} . Déterminer \vec{v}_{12} pour une fraction volumique $x = 10\%$ en sédiments, en fonction de v_0 .

d) La frontière entre (2) et (3) se déplace à une vitesse \vec{v}_{23} . Déterminer \vec{v}_{23} en fonction de v_0 .

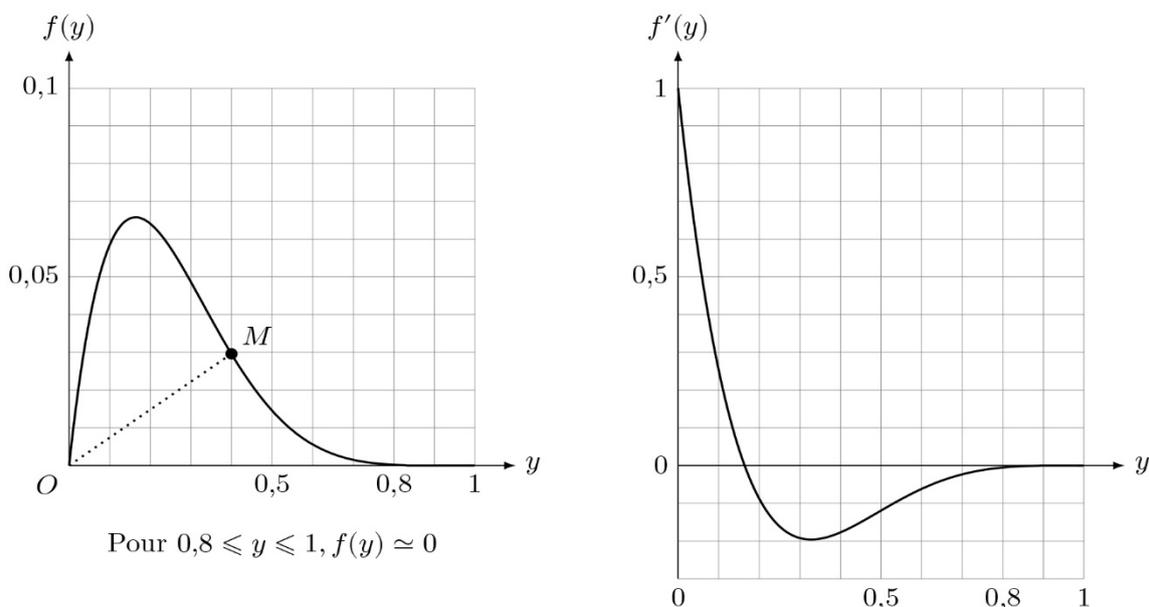


Figure 10 Tracé de la fonction $f(y) = y(1 - y)^{5,1}$ et de sa dérivée



Figure 11 Décantation d'une suspension

III.B.4) On cherche à comprendre pourquoi de tels fronts de variation brusque de la concentration apparaissent quel que soit le profil initial de la concentration dans le décanteur.

a) On note $\vec{v}_{\text{iso}} = v_{\text{iso}} \vec{u}_z$ la vitesse de déplacement d'une surface horizontale de densité volumique n^* fixée. Relier v_{iso} à $\frac{dj}{dn^*}$, puis tracer l'allure de $v_{\text{iso}}(n^*)$.

b) En déduire comment, à partir d'une suspension où la fraction volumique varie linéairement de 0 en surface à 0,80 au fond du décanteur, un front où la concentration varie brutalement peut se former dans le décanteur. On pourra représenter l'allure de l'évolution de $n^*(z, t)$ au cours du temps.

Données numériques

Perméabilité magnétique du vide

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$$

Accélération du champ de pesanteur terrestre

$$g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Masse volumique de l'eau

$$\rho_e = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Constante des gaz parfaits

$$R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Constante d'Avogadro

$$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Constante de Boltzmann

$$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

Partie B – Etude d’une installation nucléaire REP

Ce sujet comporte un document réponse à rendre avec la copie. Les données numériques utiles sont fournies en fin d’énoncé.

La France compte 19 centrales nucléaires en exploitation, dans lesquelles tous les réacteurs (58 au total) sont des réacteurs à eau pressurisée. Actuellement, ces installations produisent près de 80% de l’électricité produite en France. Chaque centrale est soumise à un référentiel de normes de sûreté et de sécurité évoluant en fonction des enseignements des incidents passés nationaux ou internationaux.

Le but de ce problème est d’étudier quelques aspects liés au fonctionnement d’une centrale nucléaire REP, ainsi que plusieurs dispositions prises en matière de sûreté nucléaire : contrôle des rejets de la centrale et surveillance sismique d’un site nucléaire.

I Circuit secondaire et enrichissement de l’uranium

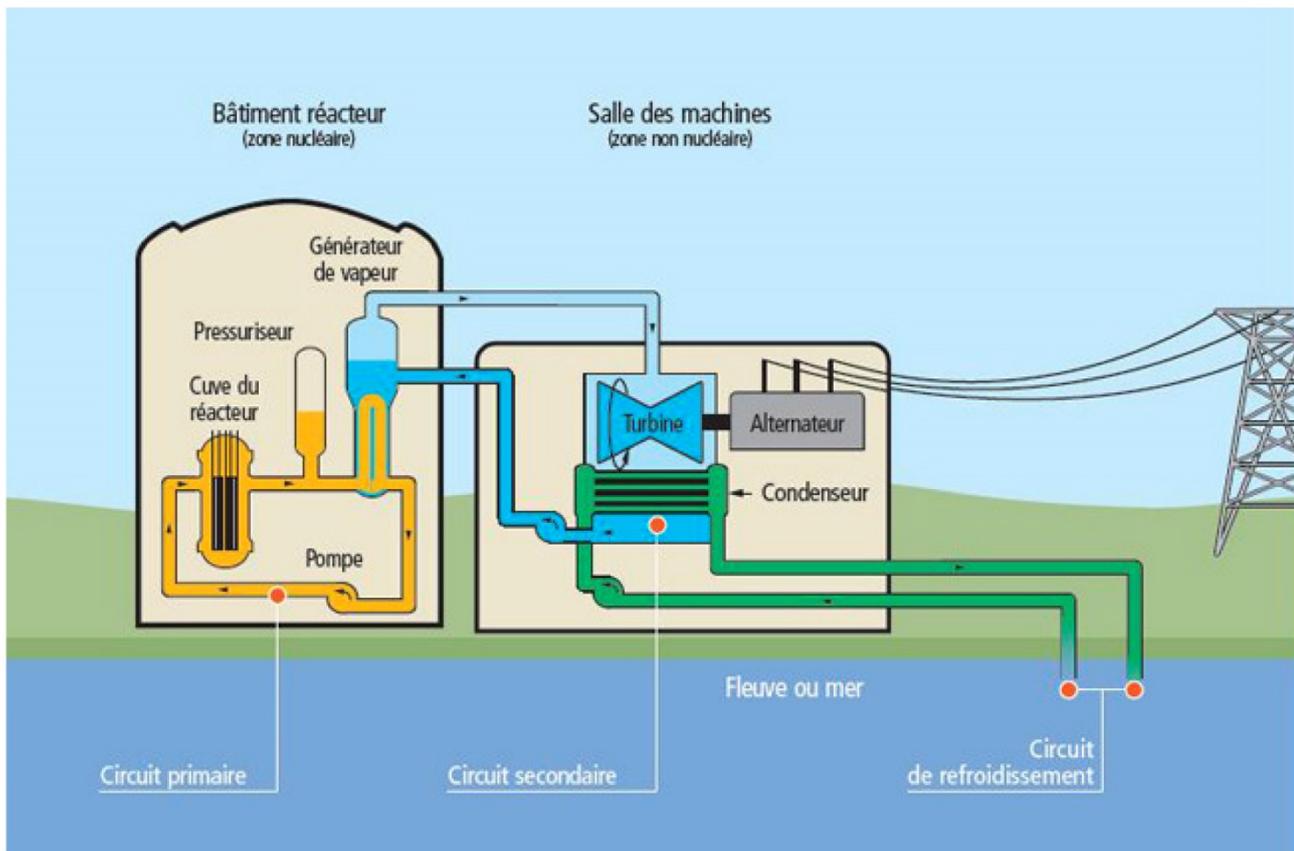


Figure 1 Schéma global d’une centrale nucléaire

Une centrale nucléaire est un site industriel destiné à la production d’électricité, qui utilise comme chaudière un réacteur nucléaire pour produire de la chaleur. Une centrale nucléaire REP (Réacteur à Eau Pressurisée) est constituée de deux grandes zones (voir figure 1) :

- une zone non nucléaire (salle des machines). Dans cette partie, semblable à celle utilisée dans les centrales thermiques classiques, s’écoule de l’eau dans un circuit secondaire. Cette eau est évaporée dans le Générateur de Vapeur (GV) par absorption de la chaleur produite dans la zone nucléaire, puis elle entraîne une turbine (T) couplée à un alternateur produisant de l’électricité, ensuite elle est condensée au contact d’un refroidisseur (rivière ou mer ou atmosphère via une tour aéroréfrigérante) et enfin, elle est comprimée avant d’être renvoyée vers le générateur de vapeur ;
- une zone nucléaire (dans le bâtiment réacteur), où ont lieu les réactions nucléaires de fission, qui produisent de l’énergie thermique et chauffent ainsi l’eau sous pression circulant dans le circuit primaire. Le transfert

d'énergie thermique entre le circuit primaire et le circuit secondaire se fait dans le générateur de vapeur, où la surface d'échange entre les deux fluides peut atteindre près de 5000 m^2 (réseau de tubulures).

I.A – Description du circuit secondaire de la centrale

Considérons une centrale nucléaire REP produisant une puissance électrique $P_e = 900 \text{ MW}$. Le fluide circulant dans le circuit secondaire est de l'eau, dont l'écoulement est supposé stationnaire. Le cycle thermodynamique décrit par l'eau est un cycle ditherme moteur. L'eau liquide sera supposée incompressible et de capacité thermique massique isobare supposée constante. Le tableau en fin d'énoncé donne diverses données thermodynamiques relatives à l'équilibre liquide-vapeur de l'eau.

I.A.1) Cycle de Carnot

Dans une première approche simplifiée, on considère le moteur ditherme de Carnot fonctionnant de manière réversible entre deux sources de température T_{ch} et T_{fr} ($T_{\text{fr}} < T_{\text{ch}}$).

- Donner, en la redémontrant, l'expression du rendement de Carnot associé à ce cycle.
- Donner la valeur numérique de ce rendement en prenant $T_{\text{ch}} = 543 \text{ K}$ et $T_{\text{fr}} = 303 \text{ K}$, les deux températures extrêmes de l'eau dans le circuit secondaire.
- Sachant qu'un réacteur REP fournit à l'eau du circuit secondaire, via le générateur de vapeur, une puissance thermique $P_t = 2785 \text{ MW}$, que vaut le rendement thermodynamique réel de l'installation ? On supposera que la puissance mécanique transmise à la turbine est intégralement convertie en puissance électrique. Commenter.

I.A.2) Cycle de Rankine

L'eau du circuit secondaire subit les transformations suivantes (représentées dans la figure 2)

- de A à B : dans le générateur de vapeur, échauffement isobare du liquide à la pression $P_2 = 55 \text{ bar}$ jusqu'à un état de liquide saturant (état noté A'), puis vaporisation totale isobare jusqu'à un état de vapeur saturante sèche (état B) ;
- de B à C : détente adiabatique réversible dans la turbine, de la pression P_2 à la pression $P_1 = 43 \text{ mbar}$;
- en C , le fluide est diphasé ;
- de C à D : liquéfaction totale isobare dans le condenseur, jusqu'à un état de liquide saturant ;
- de D à A : compression adiabatique réversible, dans la pompe d'alimentation, de la pression P_1 à la pression P_2 , du liquide saturant sortant du condenseur. On négligera le travail consommé par cette pompe devant les autres énergies mises en jeu.

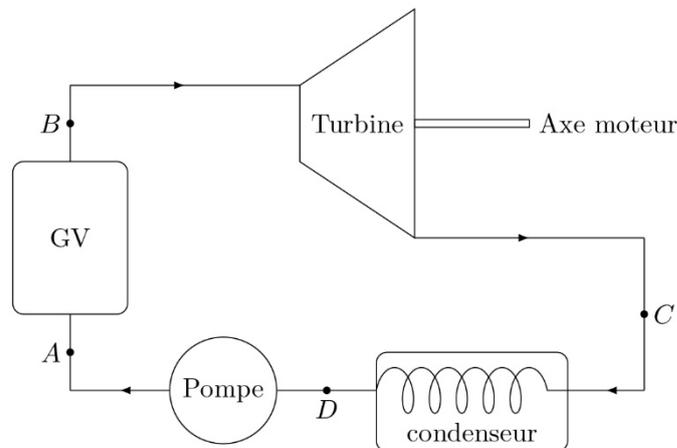


Figure 2 Cycle de Rankine

- Représenter dans le diagramme de Clapeyron (P, v) l'allure de la courbe de saturation de l'eau, ainsi que les isothermes T_B , T_D et T_{critique} , cette dernière température étant celle du point critique de l'eau. Préciser les domaines du liquide, de la vapeur, de la vapeur saturante. Représenter sur ce même diagramme l'allure du cycle décrit par l'eau du circuit secondaire. Indiquer le sens de parcours du cycle et placer les points A , A' , B , C et D .
- D'après l'extrait de table thermodynamique donné en fin d'énoncé, quelles sont les valeurs des températures, des enthalpies massiques et des entropies massiques aux points A' , B et D ? On pourra donner les valeurs sous forme de tableau.
- Dans le document réponse figure le diagramme enthalpique (P, h) de l'eau. Placer, avec soin et à l'échelle, les points A' , B , C , D du cycle. On explicitera la méthode.
- Dans toute la suite, on négligera les variations d'énergie cinétique et potentielle dans les bilans énergétiques. Exprimer alors, sans démonstration, le premier principe de la thermodynamique pour un fluide en écoulement stationnaire recevant de manière algébrique le travail massique utile w_u et le transfert thermique massique q .
- Exprimer le travail massique w_{BC} reçu par l'eau dans la turbine. Donner sa valeur numérique, en s'aidant du diagramme enthalpique.

- f) Exprimer le transfert thermique massique $q_{AA'}$ reçu par l'eau liquide quand elle passe de manière isobare de la température T_A à la température $T_{A'}$ dans le générateur de vapeur. Donner sa valeur numérique : on considérera $T_A \approx T_D$.
- g) Exprimer le transfert thermique massique $q_{A'B}$ reçu par l'eau quand elle se vaporise complètement dans le générateur de vapeur. Donner sa valeur numérique.
- h) Calculer alors le rendement de Rankine de l'installation. Comparer au rendement de Carnot et commenter. Comparer au rendement réel et commenter.
- i) Dans quel état se trouve l'eau à la fin de la détente de la turbine ? Donner le titre massique en vapeur à l'aide du diagramme enthalpique. En quoi est-ce un inconvénient pour les parties mobiles de la turbine ?

I.A.3) Cycle de Rankine avec détente étagée

Le cycle réel est plus compliqué que celui étudié précédemment (voir figure 3). En effet, d'une part, la détente est étagée : elle se fait d'abord dans une turbine « haute pression » puis dans une turbine « basse pression ». D'autre part, entre les deux turbines, l'eau passe dans un « surchauffeur ». Les transformations sont maintenant modélisées par

- de A à B : dans le générateur de vapeur, échauffement isobare du liquide à la pression $P_2 = 55$ bar, jusqu'à un état de liquide saturant (état noté A'), puis vaporisation totale isobare jusqu'à un état de vapeur saturante sèche (point B) ;
- de B à C' : détente adiabatique réversible dans la turbine « haute pression », de la pression P_2 à la pression $P_3 = 10$ bar ;
- de C' à B' : échauffement isobare à la pression P_3 , dans le surchauffeur, jusqu'à un état de vapeur saturante sèche (point B') ;
- de B' à C'' : détente adiabatique réversible dans la turbine « basse pression », de la pression P_3 à la pression $P_1 = 43$ mbar ;
- de C'' à D : liquéfaction totale isobare dans le condenseur, jusqu'à un état de liquide saturant ;
- de D à A : compression adiabatique réversible, dans la pompe d'alimentation, de la pression P_1 à la pression P_2 , du liquide saturant sortant du condenseur. On négligera le travail consommé par cette pompe devant les autres énergies mises en jeu.

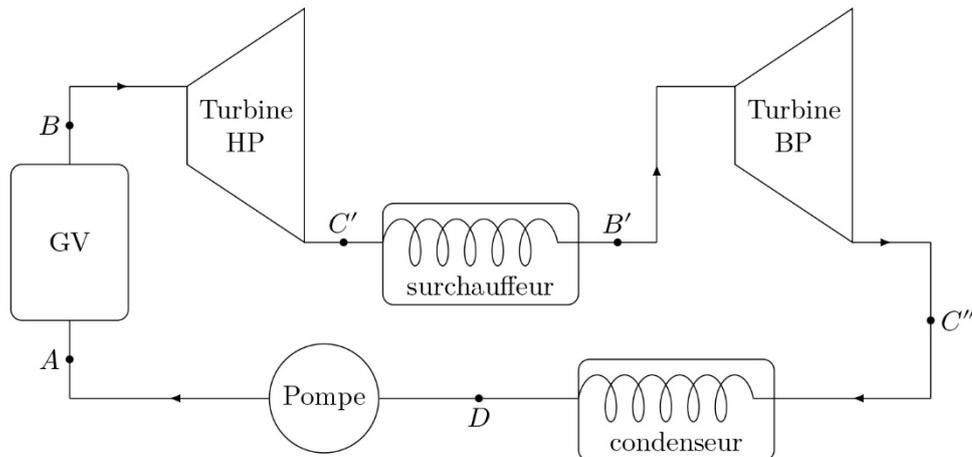


Figure 3 Cycle de Rankine avec une détente étagée

- a) Placer les nouveaux points C' , B' , C'' sur le diagramme enthalpique du document réponse.
- b) Comparer les titres massiques en vapeur des points C' et C'' au titre massique en vapeur du point C . Quel est l'intérêt de la surchauffe ?
- c) À l'aide du diagramme enthalpique, déterminer le nouveau rendement du cycle. Commenter.

Données

Extrait de table thermodynamique relatif à l'équilibre liquide-vapeur de l'eau

θ (°C)	P_{sat} (bar)	Liquide saturant			Vapeur saturante sèche		
		v_l (m ³ ·kg ⁻¹)	h_l (kJ·kg ⁻¹)	s_l (J·K ⁻¹ ·kg ⁻¹)	v_v (m ³ ·kg ⁻¹)	h_v (kJ·kg ⁻¹)	s_v (J·K ⁻¹ ·kg ⁻¹)
30	0,043	1,0047	125,22	0,4348	32,892	2555,92	8,4530
180	10	1,1276	763,18	2,1395	0,119404	2777,84	6,5854
270	55	1,3053	1190,10	2,9853	0,03505	2788,46	5,9226

θ température

s_l entropie massique du liquide saturant

P_{sat} pression de vapeur saturante

v_v volume massique de la vapeur saturante sèche

v_l volume massique du liquide saturant

h_v enthalpie massique de la vapeur saturante sèche

h_l enthalpie massique du liquide saturant

s_v entropie massique de la vapeur saturante sèche

Capacité thermique massique isobare de l'eau

$$c = 4,18 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$$

Potentiels standard d'oxydo-réduction (à 25 °C)

$$E^\circ(\text{H}^+/\text{H}_2) = 0,00 \text{ V}$$

$$E^\circ(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) = 1,23 \text{ V}$$

Masses atomiques

Atome	F	²³⁵ U	²³⁸ U
Masses atomiques (u)	19,0	235,0	238,0

Constantes diverses

Unité de masse atomique unifiée

$$1 \text{ u} = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

Constante de Boltzmann

$$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$$

Constante des gaz parfaits

$$R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$$

Constante de Faraday

$$F = 96500 \text{ C}\cdot\text{mol}^{-1}$$

On prendra

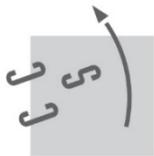
$$0 \text{ °C} = 273 \text{ K}$$

Formulaire

Expression du gradient d'une fonction scalaire $f(r, \theta, z)$ en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

Annexe à rendre avec la copie



NOM : _____
 Prénom : _____
 Signature : _____

Épreuve de Physique-chimie 2 Filière MP

CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

NUMÉRO DE PLACE

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir rempli complètement l'en-tête

2016-09-24 12:52:11

Ne rien écrire dans la partie barrée

2015-016-DR

Les températures sont exprimées en °C

