Physique : DS1

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, **la qualité de la rédaction**, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

PARTIE A – PLATEFORME EN MER

On considère le mouvement d'une plateforme en mer soumise à un courant marin. Sa partie supérieure de masse m = 110 tonnes est considérée comme rigide et le mouvement principal de la plateforme a lieu suivant x (**figure 1(a)**).

Afin d'étudier le mouvement de cette plateforme, on la représente par une masse m, liée à un ressort de constante de raideur k et à un amortisseur de constante d'amortissement γ, pouvant subir une excitation externe de force $\mathbf{F_{exc}}$, et se déplaçant sur un support (**figure 1(b)**). Le ressort représente la rigidité de l'ensemble du support de la plateforme. L'amortisseur permet de prendre en compte l'effet de l'eau environnante et la force d'excitation externe celui des vagues qui frappent périodiquement la plateforme. La masse est supposée se déplacer selon une seule direction parallèle à l'axe Ox en fonction du temps t.

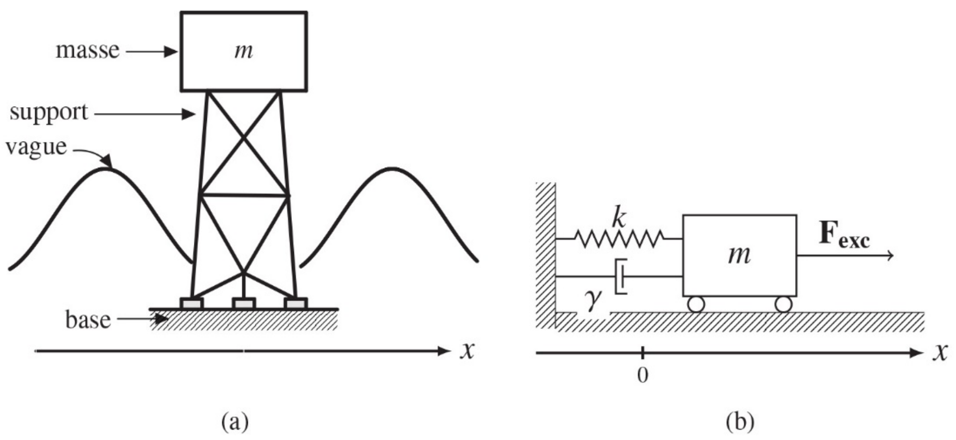


Figure 1 – (a) Plateforme en mer soumise aux vagues marines, (b) système masse (m), ressort (k), amortisseur (γ) et excitation externe ($\mathbf{F_{exc}}$)

Les projections sur l'axe Ox de la position, de la vitesse et de l'accélération de la masse en fonction du temps sont notées respectivement $x(t)$, $\dot{x}(t)$ et $\ddot{x}(t)$. La force totale $\mathbf{F_{tot}}$ agissant sur la masse correspond à la réaction normale $\mathbf{R_N}$ de la base horizontale, à la force de frottement $\mathbf{F_d}$, à la force de rappel $\mathbf{F_k}$ du ressort, au poids $\mathbf{P}$ de la masse et à la force $\mathbf{F_{exc}}$ d'excitation externe. La position d'équilibre de la masse sera choisie à $x = 0$. En l'absence d'action de l'amortisseur, la masse se déplace sur la base horizontale sans frottements.

Partie I - Résolution analytique et détermination des paramètres pour la modélisation

Q1. En effectuant une projection sur l'axe Ox, montrer que **P** et $\mathbf{R_N}$ n'interviennent pas dans le bilan des forces.

I.1 - Ressort sans amortissement et sans excitation

Q2. Démontrer que l'équation du mouvement de la masse correspond à l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$m\ddot{x} + kx = 0. \tag{1}$$

Q3. La solution de cette équation prend la forme générale suivante

$$x(t) = A_0 \sin(\omega_0 t) + B_0 \cos(\omega_0 t) \tag{2}$$

avec A_0 et B_0 deux coefficients réels. Exprimer ω_0 en fonction des grandeurs caractéristiques du système et donner sa signification physique. De plus, en remarquant qu'à $t = 0$: $x(t) = x_0$ et $\dot{x}(t) = \dot{x}_0$, déterminer les expressions de A_0 et de B_0 en fonction de x_0, $\dot{x}_0$ et de ω_0.

Q4. On cherche à reformuler l'équation précédente sous une forme plus compacte du type :

$$x(t) = R_0 \cos(\omega_0 t - \phi_0). \tag{3}$$

Donner les expressions de R_0 et de ϕ_0 en fonction de x_0, $\dot{x}_0$ et de ω_0.

Q5. Représenter qualitativement $x(t)$ en fonction de t et indiquer sur le tracé R_0, x_0 et $2\pi/\omega_0$.

Q6. En utilisant les expressions des énergies cinétique $K(t)$ et potentielle $U(t)$ du système, montrer que l'énergie totale $E(t)$ du système est alors :

$$E(t) = \frac{kR_0^2}{2}. \tag{4}$$

Justifier le résultat obtenu.

Q7. Représenter qualitativement $E(t)$, $K(t)$ et $U(t)$ en fonction de t.

I.2 - Ressort avec amortissement et sans excitation

Q8. La force de frottement que l'amortisseur exerce sur la masse est considérée comme linéaire, c'est-à-dire proportionnelle au vecteur vitesse **v** de celle-ci : $\mathbf{F_d} = -\gamma\,\mathbf{v}$, avec γ constante d'amortissement (> 0). En considérant une projection sur l'axe Ox, démontrer que la position de la masse en fonction du temps suit l'équation du mouvement ci-après

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{5}$$

avec ω_0 défini en question **Q3** et ζ à exprimer en fonction de γ, k et m.

Q9. Dans le cas où $\zeta < 1$, $x(t)$ prend la forme suivante :

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\left(A_\mathrm{d}\cos(\omega_\mathrm{d} t) + B_\mathrm{d}\sin(\omega_\mathrm{d} t)\right). \tag{6}$$

Déterminer les deux coefficients réels A_d et B_d en fonction de x_0, $\dot{x}_0$, ζ, ω_0 et $\omega_\mathrm{d} = \omega_0 \cdot \sqrt{1-\zeta^2}$. On utilisera pour cela les mêmes conditions initiales que celles utilisées en question **Q3**.

Q10. Montrer alors que l'on peut obtenir une forme du type

$$x(t) = R_\mathrm{d} e^{-\zeta\omega_0 t}\cos(\omega_\mathrm{d} t - \phi_\mathrm{d}) \tag{7}$$

avec R_d et ϕ_d à préciser.

Q11. Représenter qualitativement $x(t)$ en fonction de t et indiquer sur le tracé $R_\mathrm{d}e^{-\zeta\omega_0 t}$, x_0 et $2\pi/\omega_\mathrm{d}$.

Q12. Donner l'expression de $E(t)$ et commenter les cas où $\zeta = 0$ et $\zeta = 1$.

Q13. Montrer de façon simple que E est une fonction décroissante de t. À quoi cela est-il dû ?

Q14. On envisage deux temps successifs t_1 et t_2 pour lesquels les déplacements sont x_1 et x_2, tels que $t_2 > t_1$ et $t_2 - t_1 = \tau_\mathrm{d}$, avec τ_d : période des oscillations amorties. En utilisant l'équation (7) et en considérant que $\zeta \ll 1$, montrer que :

$$\ln(x_1/x_2) \approx 2\pi\zeta. \tag{8}$$

Q15. Le relevé du déplacement horizontal de la plateforme en fonction du temps est représenté en **figure 2**.
En utilisant les deux points qui sont indiqués sur la figure, déterminer k, ζ et γ.
Comment ce tracé serait modifié en fonction de la valeur de ζ ?

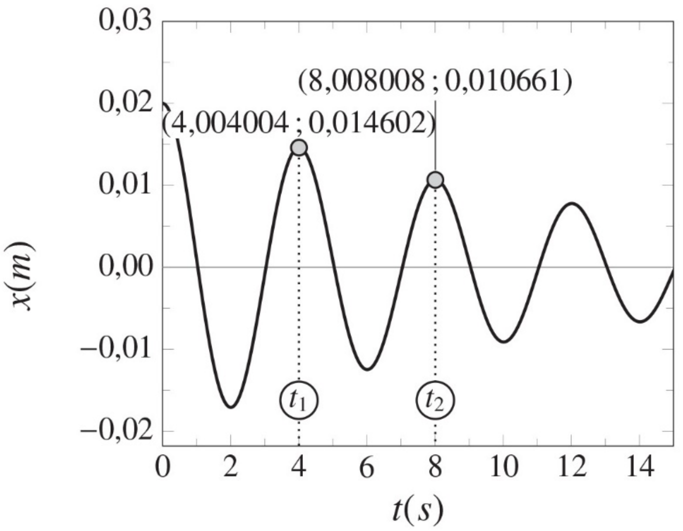


Figure 2 – Relevé du déplacement horizontal x (en m) de la plateforme de masse m = 110 tonnes en fonction du temps t (en s). Les deux temps t_1 et t_2 mentionnés en question **Q14** sont indiqués

I.3 - Ressort avec amortissement et avec excitation

On envisage enfin le cas où le système est soumis à la fois aux effets d'amortissement et d'excitation.

On se limite ici à la réponse à une excitation harmonique sinusoïdale de fréquence ω produite par une force extérieure au système

$$\mathbf{F_{exc}}(t) = F_0 \cos(\omega t)\mathbf{e_x} \tag{9}$$

avec $\mathbf{e_x}$ vecteur unitaire sur l'axe Ox et on se place dans le cas traité précédemment pour l'étude de l'amortisseur, c'est-à-dire $\zeta < 1$ (**I.2**).

On admet de plus dans ce qui suit que la réponse du système dans le cas où amortisseur et excitation sont pris en compte peut s'écrire comme somme de la solution donnée par l'équation (6) et de la contribution due à l'excitation :

$$x_{\text{exc}}(t) = X \cos(\omega t - \phi). \tag{10}$$

Q16. Montrer que l'équation différentielle caractérisant le système devient alors :

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t). \tag{11}$$

Q17. En utilisant l'équation (10) et en privilégiant une représentation complexe, vérifier que :

$$\begin{cases} X = \dfrac{F_0}{m} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega)^2}} \\ \tan\phi = \dfrac{2\zeta\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{cases} . \tag{12}$$

Q18. Exprimer la grandeur $M = \dfrac{X}{F_0/k}$ en fonction de $r = \omega/\omega_0$ et expliciter le sens physique de M.

Q19. Trouver la condition sur r puis sur ω pour laquelle M est maximale.

Q20. Si l'on considère une période moyenne des vagues en mer de 8 s, que peut-on conclure sur le mouvement de la plateforme ?

PARTIE B – Seul sur Mars

Seules certaines parties du sujet ont été conservées. Gardez la numérotation de l'énoncé.

L'histoire du film *The Martian* (Seul sur Mars) de Ridley Scott, montre comment un homme, Mark Watney, survit seul sur Mars grâce à ses connaissances scientifiques. L'environnement hostile de la planète représente une contrainte de taille pour les ingénieurs et les scientifiques qui travaillent pour que des hommes puissent un jour poser le pied sur la planète rouge. La NASA annonce un vol habité pour Mars dans les années 2030, l'hypothèse du film n'est donc pas irréaliste. Même si cette histoire repose sur des travaux scientifiques et des techniques aérospatiales actuelles, on peut se demander si l'histoire est bien réaliste.

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées et demandent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées, si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement.

Les quatre premières parties du sujet peuvent être liées notamment concernant les applications numériques. Les deux dernières parties sont indépendantes.

Toutes les données nécessaires à la résolution du sujet sont données en fin de sujet.

I La planète Mars

Mars est la quatrième planète par ordre de distance croissante au Soleil et la deuxième par masse et par taille croissantes sur les huit planètes que compte le système solaire. Dans le référentiel héliocentrique (aussi appelé référentiel de Kepler), supposé galiléen, la trajectoire de Mars est une ellipse contenue dans le plan de l'écliptique.

Extrait de *CNRS Le journal*

> *Question* : Envoyer des humains sur Mars coûterait au moins 100 ou 200 milliards de dollars et ne serait possible que vers 2050, à condition qu'une vraie volonté politique se dégage. Ne vaut-il pas mieux continuer à envoyer des robots ?
>
> *Réponse du planétologue François Forget* : C'est un vieux débat, [...] les robots ne sont pas forcément plus efficaces que les humains. Par exemple, un géologue peut repérer en quelques secondes une pierre intéressante, alors qu'il faudra des jours pour la repérer en manœuvrant un rover depuis la Terre, vu que les signaux radio mettent 5 à 22 minutes entre les deux planètes. Mais il y a une alternative qui me plaît bien : envoyer des humains en orbite martienne sans qu'ils se posent à la surface. Il est en effet très difficile — et donc coûteux — de poser des charges de plus d'une tonne sur Mars. Parce que l'atmosphère y est trop fine pour freiner correctement avec un parachute comme sur Terre, et trop épaisse pour ralentir juste au-dessus de la surface avec de simples rétrofusées comme sur notre Lune. Autre avantage : plus besoin de MAV pour remonter, ni d'habitat en surface. Au final, depuis l'orbite, les astronautes pourraient facilement aller se poser sur les petites lunes Phobos ou Deimos (qui n'ont presque pas de gravité), et surtout piloter en quasi temps réel des robots sophistiqués envoyés sur Mars elle-même. Une telle mission pourrait avoir lieu dès 2035.

09 novembre 2016

Q 1. En utilisant l'extrait du *CNRS Le Journal*, proposer un encadrement de la distance de Mars au Soleil. En déduire le demi-grand axe a_M de l'ellipse correspondant à la trajectoire de Mars.

Q 2. Sachant que la période de révolution de Mars est $T_M = 687$ jours, calculer la valeur de a_M. Celle valeur est-elle en accord avec les propos rapportés par l'extrait d'article précédent ? Retrouver également une estimation de la masse du Soleil.

Pour la suite, on prendra $a_M = 228 \times 10^6$ km.

Q 3. Déterminer la valeur du champ de pesanteur sur Mars.

II Tempête sur Mars

Lors d'une sortie sur Mars, l'écran de contrôle de Mark Watney est superposé à celui de l'action (figure 1). À gauche figurent les données externes et à droite celles concernant le scaphandre. Ainsi la pression extérieure vaut 0,11 psi (pound per square inch) alors que la pression interne est de 4,75 psi. Pour la suite on prendra les valeurs lues sur l'écran de contrôle pour les pressions et températures externes et internes (scaphandre).

Figure 1 Écran de contrôle de Mark Watney

II.A – L'atmosphère martienne

Q 4. Un bon scientifique pourra s'étonner du pourcentage de dioxygène dans le scaphandre. Quel est le problème ?

Q 5. Estimer la masse volumique ρ de l'atmosphère martienne. Comparer à celle de l'atmosphère de la Terre.

Q 6. Tracer l'allure du diagramme $P(T)$ de l'eau en plaçant en particulier le point triple (611 Pa, 0,01 °C) et le point critique (22 MPa, 374 °C). Préciser la signification physique de ces points.

Q 7. Dans quel état se trouve l'eau sur Mars ?

Q 8. Au cours d'une tempête martienne, la combinaison de Mark Watney est percée. Donner deux raisons pour lesquelles Mark Watney ne peut pas survivre dans ces conditions. (On supposera que le scaphandre se dépressurise en restant à température constante.)

IV Sauvetage de Mark Watney par le vaisseau Hermès

Cette opération consiste à envoyer Mark Watney dans l'espace, grâce à un VAM, et à l'intercepter depuis le vaisseau Hermès « en plein vol », comme représenté figure 5. L'enjeu est donc que L'Hermès et Mark Watney se retrouvent au même endroit, au même moment avec une vitesse relative nulle.

IV.A – Trajectoire du vaisseau Hermès

Dans cette sous-partie, on se place dans le référentiel de Kepler.

Le vaisseau Hermès est utilisé pour les trajets Terre-Mars au cours desquels le vaisseau n'est soumis qu'à l'attraction du Soleil. L'orbite de transfert utilisée est une orbite de transfert de Hohmann : ellipse dont le périhélie est un point de l'orbite de la Terre et l'aphélie un point de l'orbite de Mars (figure 6). On supposera, pour simplifier, que les orbites de la Terre et de Mars sont circulaires de rayons respectifs a_T et a_M.

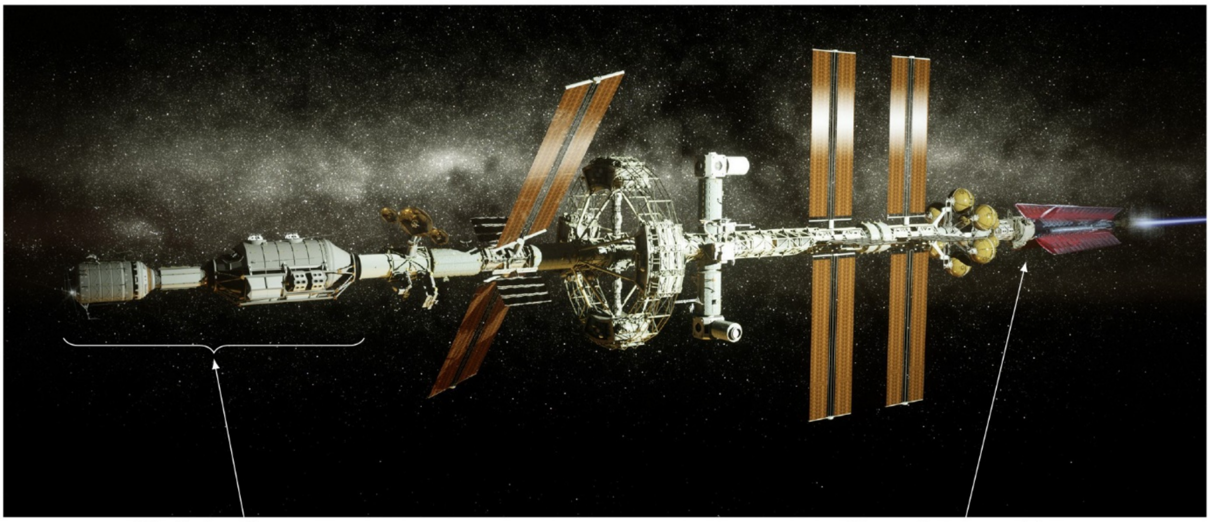


Figure 4 Le vaisseau Hermès

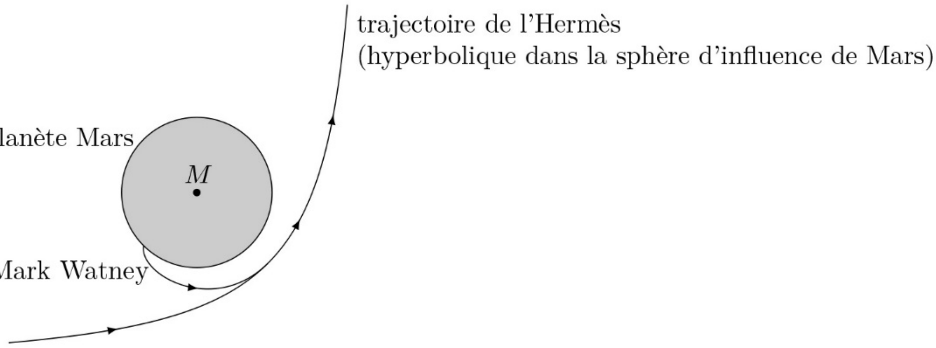


Figure 5 Principe de la récupération de Mark Watney

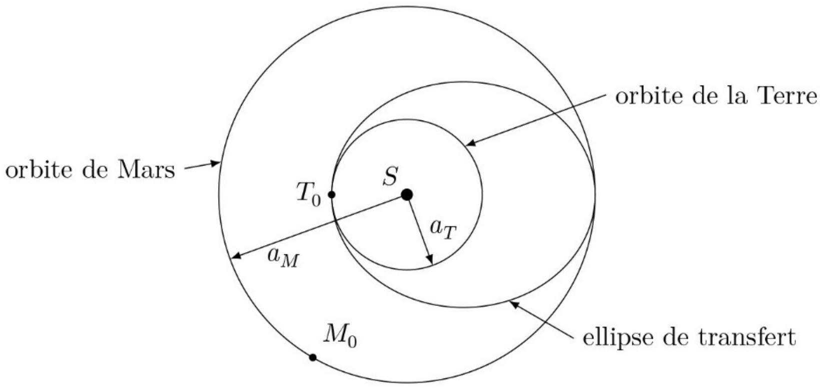


Figure 6

Q 16. Déterminer le demi grand axe a de l'ellipse de transfert.

On considère le transfert du vaisseau de la Terre vers la planète Mars, les positions initiales de la Terre et de Mars étant notées respectivement T_0 et M_0.

Q 17. Déterminer la durée du transfert. En déduire la position de Mars au moment du lancement sur Terre (M_0). En déduire également la position de la Terre au moment de l'arrivée du vaisseau à proximité de Mars (les positions de la Terre et de Mars seront à ce moment là notées respectivement T_1 et M_1).

Q 18. Montrer qu'un nouveau transfert, à partir de la Terre, ne peut avoir lieu qu'environ 780 jours après le premier lancement (période synodique).

Q 19. Une fois le vaisseau arrivé au voisinage de la planète Mars (M_1, T_1), combien de temps faut-il attendre pour envisager un transfert d'Hohmann permettant de ramener le vaisseau à proximité de la Terre ? On notera T_2 et M_2 les positions respectives de la Terre et de Mars au début de ce second transfert.

Q 20. Représenter les points T_0, M_0, T_1, M_1, T_2 et M_2, ainsi que les orbites d'aller et de retour, sur un schéma reproduisant la figure 6.

Q 21. En déduire qu'une mission aller-retour vers Mars dure au minimum 972 jours. Sachant qu'entre le départ de l'Hermès vers la Terre, suite à la tempête, et son retour sur Mars, il s'est écoulé 549 jours, commenter.

Données

Terre-Mars

	Terre	Mars
Composition de l'atmosphère	N_2 (77 %), O_2 (21 %)	CO_2 (95 %), N_2 (2,7 %)
Rayon des planètes (km)	6380	3390
Densité globale	5,5	3,9

Diverses constantes et grandeurs

Constante gravitationnelle	$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$
Célérité de la lumière	$c = 3{,}00 \times 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6{,}022 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8{,}314\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$
Masses molaires ($\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$)	H = 1, C = 12, N = 14, O = 16
Viscosité du CO_2 (supposée indépendante de la température)	$\eta = 1{,}07 \times 10^{-5}\ \mathrm{Pa \cdot s}$
Viscosité de l'air terrestre (à 15 °C)	$\eta_T = 1{,}79 \times 10^{-5}\ \mathrm{Pa \cdot s}$
Distance Terre-Soleil	$a_T = 1$ u.a. $= 1{,}50 \times 10^8$ km
Température de la surface du Soleil	$T_s = 5778$ K
Rayon du Soleil	$R_s = 6{,}96 \times 10^5$ km
Masse du vaisseau Hermès	≈ 500 t
1 psi = 0,0689 bar	

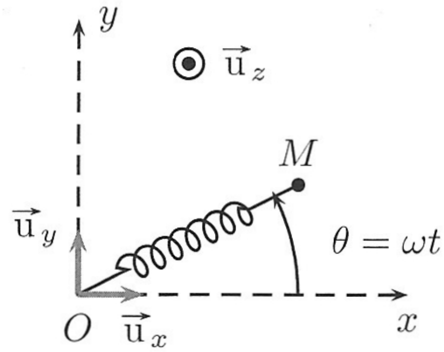
Pression de vapeur saturante de l'eau en fonction de la température

t (°C)	P_s (Pa)	t (°C)	P_s (Pa)	t (°C)	P_s (Pa)	t (°C)	P_s (Pa)
−75	0,122	−40	12,84	0	611,15	35	5626,7
−70	0,261	−35	27,71	5	872,60	40	7381,4
−65	0,540	−30	38,01	10	1228,1	45	9589,8
−60	1,080	−25	63,29	15	1705,6	50	12344
−55	2,093	−20	103,26	20	2338,8	55	15752
−50	3,936	−15	165,30	25	3169,0	60	19932
−45	7,202	−10	259,90	30	4245,5	65	25022

d'après CRC Handbook of Chemistry and Physics - 2004

Partie C – Ressort en rotation

On considère une table à coussin d'air horizontale sur laquelle peut se mouvoir, sans frottement, un mobile autoporteur ponctuel M de masse m accroché à l'extrémité d'un ressort. (voir figure en vue de dessus).



La table forme le plan $(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$, l'extrémité fixe du ressort est située en O. La table à coussin d'air permet de compenser le champ de pesanteur terrestre qui est dirigé le long de la verticale ascendante $\vec{g} = -g\,\overrightarrow{u_z}$. Le ressort possède une longueur à vide l_0 et sa constante de raideur est notée k.

1°) Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_O}(M)$du point M par rapport à O est conservé au cours du mouvement.

2°) À t = 0, le mobile M est abandonné en $A(x = \frac{6}{5}\, l_0, y = 0)$ sans vitesse initiale.
2a) Calculer $\overrightarrow{\sigma_O}(M)$ à l'aide des coordonnées cylindriques et en déduire la nature de la trajectoire.
2b) Établir l'expression de $\overrightarrow{OM}(t)$ et indiquer dans quel intervalle varie la longueur du ressort.

3°) On prend de nouvelles conditions initiales,

$$\overrightarrow{OM}\,(t = 0) = l_1\overrightarrow{u_x} \quad et \quad \vec{v}(t = 0) = l_1\omega\,\overrightarrow{u_y}$$

de manière à ce que le mobile autoporteur adopte un mouvement de rotation autour de l'axe (O, $\overrightarrow{u_z}$).
3a) Exprimer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_O}(M)$ et montrer qu'il se conserve au cours du mouvement. On exprimera sa norme σ en fonction de m, l_1 *et* ω.
3b) Montrer que l'énergie mécanique de M se conserve au cours du mouvement et donner son expression.
3c) Montrer que cette énergie peut être écrite sous la forme :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$$

Où l'on exprimera $E_{p,eff}(r)$ en fonction de r, σ, k, l_0 *et* m.
3d) Tracer l'allure de la fonction $E_{p,eff}(r)$et en déduire pourquoi la masse ne peut pas s'éloigner du pôle d'attraction O.