Physique : DS1

PARTIE A – PLATEFORME EN MER (E3A – PC – 2019)

Q1) En appliquant le PFD : $m\vec{a} = \vec{F}_{exc} + \vec{P} + \underbrace{\vec{F}_d + \vec{F}_N}_{\vec{F}_{TOT}} + \vec{F}_R$

Le mouvement se fait suivant (Ox) d'où $m\ddot{y} = 0 \Leftrightarrow F_d + F_N = 0$

$$\Rightarrow \boxed{m\vec{a} = \vec{F}_{exc} + \vec{P} + \vec{F}_R}$$

Q2) On est dans le cas sans amortissement et sans excitation d'où $\vec{F}_R = -k(x-x_0)\vec{u}_x$

avec $x_0 = 0$ d'après l'énoncé : $\Rightarrow m\ddot{x} = -kx$

$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$$

Q3) On reconnaît une E.D d'un oscillateur harmonique

$$\Rightarrow x = A_0 \sin(\omega_0 t) + B_0 \cos(\omega_0 t) \text{ où } \boxed{\omega_0 = \sqrt{k/m}}$$

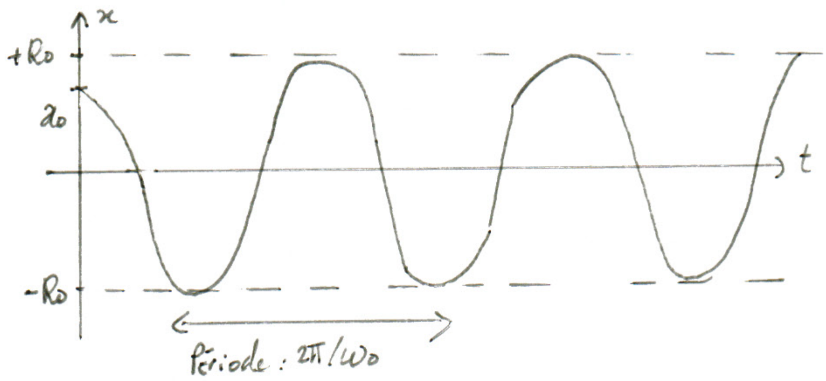
or $\begin{cases} x(0) = x_0 = B \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = A_0\omega_0 \end{cases}$ $\Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \dfrac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)}$

Q4) On pose $x(t) = R_0 \cos(\omega_0 t - \phi_0)$

$$= R_0 [\cos(\omega_0 t)\cos(\phi_0) + \sin(\omega_0 t)\sin(\phi_0)]$$

Par analogie : $\begin{cases} R_0 \cos\phi_0 = x_0 \\ R_0 \sin\phi_0 = \dot{x}_0/\omega_0 \end{cases}$ $\Rightarrow \boxed{\begin{cases} R_0^2 = x_0^2 + \left(\dfrac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)^2 \\ \tan\phi_0 = \dfrac{\dot{x}_0}{x_0\omega_0} \end{cases}}$

Q5)



Q6) Calculons $E(t)$:

. Par définition : $E = K + U$

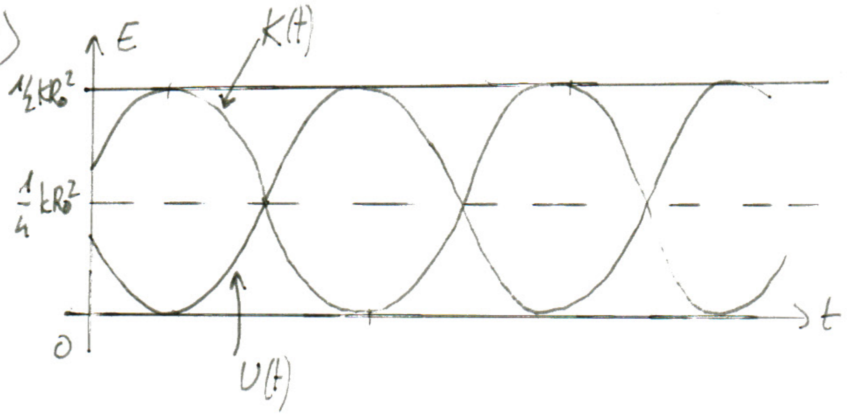
$$= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$= \frac{1}{2} k R_0^2 \cos^2(\omega_0 t - \varphi_0) + \frac{1}{2} \underbrace{m \omega_0^2}_{k} \sin^2(\omega_0 t - \varphi_0) . R_0^2$$

$$= \frac{1}{2} k R_0^2$$

. On remarque que l'énergie se conserve car il n'y a pas de forces non conservatives.

Q7)



Q8) On rajoute la force de frottement : $m\ddot{x} = -kx - \gamma \dot{x}$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{\gamma}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + 2\xi \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{où} \quad \begin{cases} \omega_0^2 = k/m \\ 2\xi\omega_0 = \gamma/m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{\gamma}{2m\omega_0} \quad \Rightarrow \boxed{\xi = \frac{\gamma}{2\sqrt{km}}}$$

Q9) Soit la solution :

$$x(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left[A_d \cos(\omega_d t) + B_d \sin(\omega_d t)\right]$$

avec $\begin{cases} x(0) = x_0 = A_d. \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = \left[\omega_d B_d - \xi\omega_0 A_d\right] \end{cases}$

D'où : $B_d = \dfrac{\dot{x}_0 + \xi\omega_0 A_d}{\omega_d} = \dfrac{\dot{x}_0}{\omega_d} + \xi x_0 \dfrac{\omega_0}{\omega_d}$

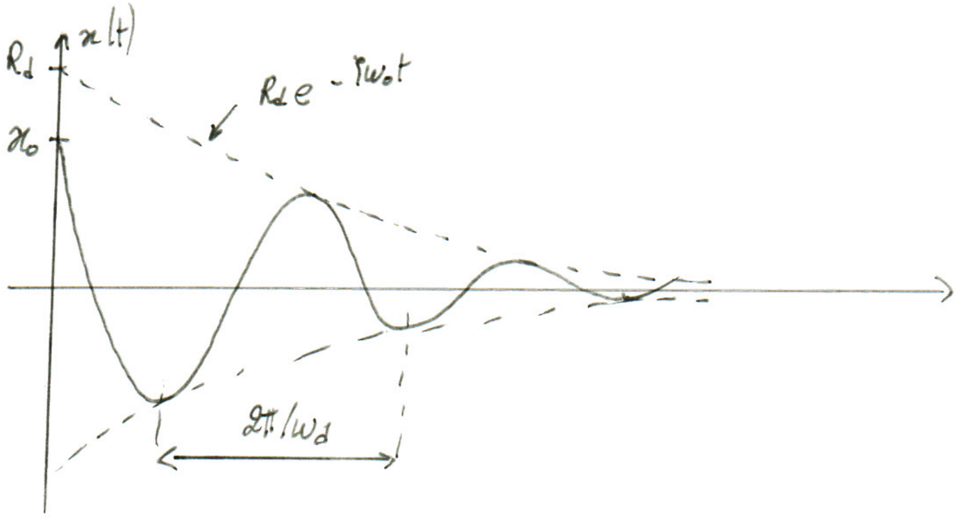
$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} A_d = x_0 \\ B_d = \dfrac{\dot{x}_0 + \xi x_0 \omega_0}{\omega_d} \end{cases}}$$

Q10) Soit $x(t) = R_d\, e^{-\xi\omega_0 t} \cos(\omega_d t - \phi_d)$

$$= R_d\, e^{-\xi\omega_0 t}\left[\cos(\omega_d t)\cos\phi_d + \sin(\omega_d t)\sin\phi_d\right]$$

Par analogie : $\begin{cases} A_d = R_d \cos\phi_d \\ B_d = R_d \sin\phi_d \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} R_d^2 = A_d^2 + B_d^2 \\ \tan\phi_d = \dfrac{B_d}{A_d} \end{cases}}$

Q11)



Q12) Calculons $E(t)$

Soit $E(t) = K + U$

$$= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$= \frac{1}{2} m \left[R_d^2 e^{-2\xi\omega_0 t} \left(-\xi\omega_0 \cos(\omega_d t - \phi_d) - \omega_d \sin(\omega_d t - \phi_d) \right) \right]^2$$

$$+ \frac{1}{2} \underbrace{k}_{m\omega_0^2} R_d^2 e^{-2\xi\omega_0 t} \cos^2(\omega_d t - \phi_d)$$

$$= \frac{1}{2} m R_d^2 e^{-2\xi\omega_0 t} \left[\left((\xi\omega_0)^2 + \omega_0^2 \right) \cos^2(\omega_d t - \phi_d) + \overbrace{\omega_d^2}^{= \omega_0^2 - \xi^2\omega_0^2} \sin^2(\omega_d t - \phi_d) \right.$$
$$\left. + 2\xi\omega_0\omega_d \sin(\omega_d t - \phi_d)\cos(\omega_d t - \phi_d) \right]$$

$$= \frac{1}{2} m R_d^2 e^{-2\xi\omega_0 t} \left[\omega_0^2 + \xi^2\omega_0^2 \left(\cos^2(\omega_d t - \phi_d) - \sin^2(\omega_d t - \phi_d) \right) \right.$$
$$\left. + 2\xi\omega_0^2 \sqrt{1-\xi^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(2\omega_d t - 2\phi_d) \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{E(t) = \frac{1}{2} k R_d^2 e^{-2\xi\omega_0 t} \left[1 + \xi^2 \cos(2\omega_d t - 2\phi_d) + \xi\sqrt{1-\xi^2} \sin(2\omega_d t - 2\phi_d) \right]}$$

. Si $\xi = 0$: $E(t) = \frac{1}{2} k R_d^2$ on retrouve le cas sans frottement.

. Si $\xi = 1$: $E(t) = \frac{1}{2} R_d^2 e^{-2\omega_0 t} \left[1 + \cos(\underbrace{2\omega_d}_{=0} - 2\phi_d) \right]$

$$= \frac{1}{2} R_d^2 e^{-2\omega_0 t}$$, l'énergie décroît de façon exponentielle.

Q13) D'après le théorème de l'E_m : $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{nc}$.

$$\Leftrightarrow \frac{dE_m}{dt} = -\gamma \vec{v} \cdot \vec{v}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{dE_m}{dt} = -\gamma v^2 < 0$$ $\Rightarrow$ l'énergie décroît car les forces de frottement s'opposent au mouvement

Q14) Calculons $\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$:

Or $\begin{cases} x_1 = R_d e^{-\xi\omega_0 t_1}\cos(\omega_d t_1 - \phi_d) \\ x_2 = R_d e^{-\xi\omega_0 t_2}\cos(\omega_d t_2 - \phi_d) \end{cases}$

D'où $\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln\left[e^{-\xi\omega_0(t_1-t_2)}\right]$ où $t_2 = t_1 + \tau_d$.

$\Rightarrow \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \xi\omega_0\tau_d$. avec $\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \frac{2\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$

Si $\xi \ll 1 \Rightarrow \boxed{\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \simeq 2\pi\xi}$

Q15) • D'après la figure proposée : $\begin{cases} x_2 = 0{,}010\,661\ m \\ x_1 = 0{,}014\,602\ m \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{\xi \simeq 0{,}0501}}$

or $\xi \ll 1 \Rightarrow \omega_d \sim \omega_0 = \frac{2\pi}{t_2 - t_1} = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

D'où $k = \frac{4\pi^2}{(t_2-t_1)^2}\cdot m = \underline{\underline{2{,}71.10^5\ kg.s^{-2}}}$

• Pour finir : $\gamma = 2\xi\sqrt{km}$ d'après (Q8)

$\Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 1{,}73.10^4\ kg.s^{-1}}}$

• Lorsque ξ augmente, la décroissance sera plus rapide.

Q16) <u>On rajoute l'excitation</u>

Cette fois on peut écrire sur Ox : $m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + F_0\cos(\omega t)$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_0 t}$$

Q17) On utilise la notation complexe d'où :

$$-\omega^2\underline{X} + 2\xi\omega_0(j\omega)\underline{X} + \omega_0^2\underline{X} = \frac{F_0}{m}.$$

$$\Rightarrow \underline{X} = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2-\omega^2) + j.\,2\xi\omega_0\omega}$$

D'où :
$$\begin{cases} X = |\underline{X}| = \dfrac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2\omega^2}} \\ \tan\phi = -\dfrac{2\xi\omega_0\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \quad \text{(erreur de signe dans l'énoncé)} \end{cases}$$

Q18) <u>Calculons M</u> :

$$M = \frac{X}{F_0/k} = \frac{k/m}{\sqrt{\cdots}} = \frac{\omega_0^2/\omega_0^2}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4\xi^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{M = \frac{1}{\sqrt{\underbrace{(1-r^2)^2 + 4\xi^2 r^2}_{A}}}}$$

Q19) Cherchons la valeur de r qui rend M maximal en dérivant la qté A

$$\frac{dA}{dr} = 0 \Leftrightarrow -2r(2).(1-r^2) + 8\xi^2 r = 0 \Leftrightarrow (1-r^2) - 2\xi^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{r^2 = 1 - 2\xi^2} \Rightarrow \boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}}$$

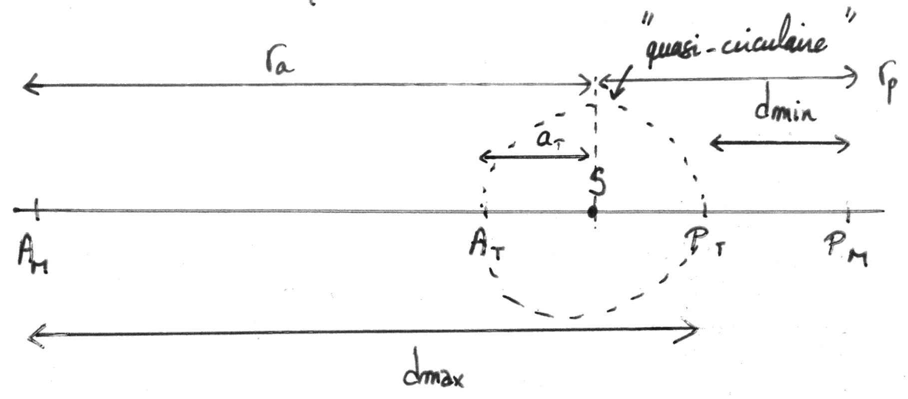
Q.20) Notre plateforme a une période de résonance de 4s ainsi $T \simeq 2T_0$. On est suffisamment loin pour <u>ne pas avoir le développement d'oscillations de grandes amplitudes.</u>

PARTIE B – Seul sur Mars (Centrale – PSI – 2019)

Partie I : La planète Mars

Q1) D'après l'article les signaux mettent de $t_1 = 5\,min$ à $t_2 = 22\,min$ pour se propager entre les 2 planètes.

On a comme données : $\begin{cases} a_T = 150.10^6\,km \\ R_T = 6380\,km \\ R_M = 3390\,km \end{cases}$



Donc $2a_m = d_{min} + d_{max}$ et $\boxed{\begin{cases} r_a = d_{max} - a_T = 246.10^6\,km \\ r_p = d_{min} + a_T = 240.10^6\,km \end{cases}}$

$\Leftrightarrow 2a_m = c\,(t_1 + t_2)$

$\Leftrightarrow \boxed{a_m = \frac{c}{2}.(t_1+t_2)} = 2{,}43.10^{11}\,m \Rightarrow \underline{\underline{a_m = 243.10^6\,km}}$

Q2) D'après la troisième loi de Képler : $\frac{a_M^3}{T_M^2} = \frac{a_T^3}{T_T^2} = cste$ Choix de $T_T = 365{,}25\,jour$

$\Rightarrow \boxed{a_M = a_T\left(\frac{T_M}{T_T}\right)^{2/3}} = \underline{\underline{228.10^6\,km}}$

Or $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_S}{4\pi^2} \Rightarrow \boxed{M_S = \frac{4\pi^2}{G}\frac{a^3}{T^2}} = \underline{2{,}00.10^{30}\,kg}$

Q3) Le champ de pesanteur s'il se limite au champ de gravitation :

$$g_M = \frac{G M_M}{R_M^2} = G.\frac{4/3 \pi R_M^3 . \rho_M}{R_M^2} \quad \text{(astre sphérique homogène)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{g_M = \frac{4}{3}\pi G \rho_M R_M} = \underline{\underline{3{,}69\ ms^{-2}}}$$

II Tempête sur Mars

II.A L'atmosphère martienne

Q4) • D'après les données

$$\begin{cases} 1\,psi = 0{,}0689\,bar \\ p = 4{,}75\,psi \\ x(\text{Oxygène}) = 21{,}01\,\%. \end{cases}$$

Donc $p(O_2) = x(O_2).p = 0{,}0688\ bar$

• Or sur terre on a $p(O_2) \simeq 0{,}2\,bar$. De plus on admet que pour respirer il faut que $p(O_2) \geqslant 0{,}16\,bar$.

$\Rightarrow$ La pression partielle en oxygène est trop faible

Q5) Si on assimile l'atmosphère à un gaz parfait on a : $pV = nRT$

$$\Leftrightarrow p = \frac{mRT}{MV}$$

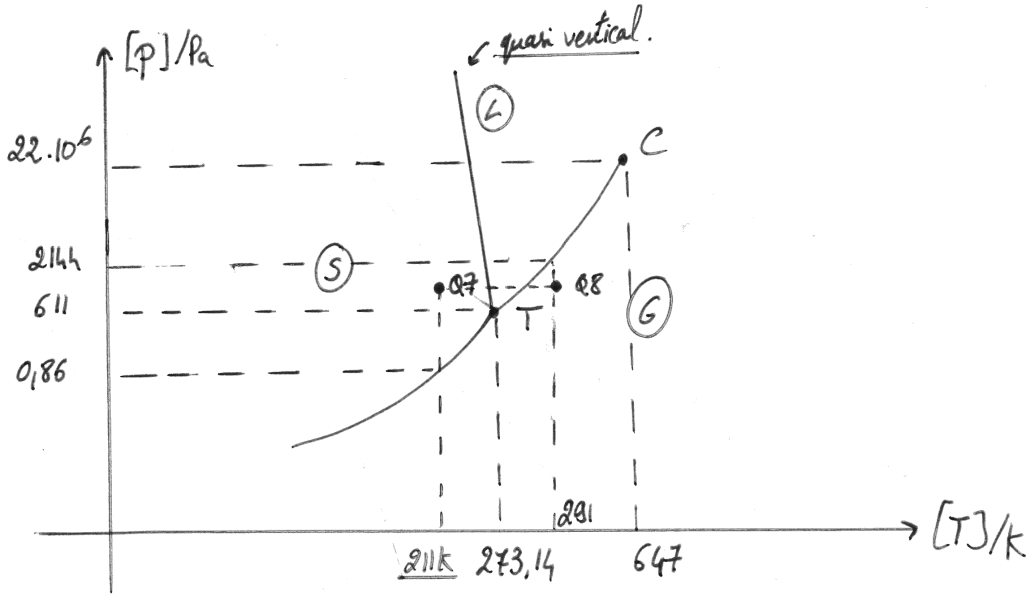
$$\Leftrightarrow p = \rho\frac{RT}{M}$$

Vu la composition incomplète de Mars on prend $M = 43{,}5\,g.mol^{-1}$ (97% CO_2, 3% N_2)

d'où : $\rho = \dfrac{pM}{RT} = 0{,}0187\ kg.m^{-3}$

Sur terre : $\rho = 1{,}3\,kg.m^{-3}$ $\Rightarrow \boxed{\dfrac{\rho_{mars}}{\rho_{terre}} = 0{,}014}$

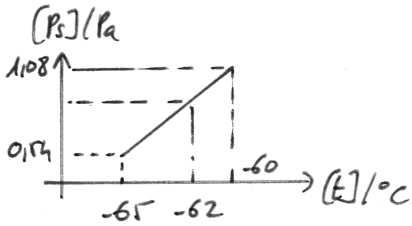
Q6)



• Le pt triple est le point où les 3 phases sont en équilibre

• Au delà du point critique, il y a continuité de l'état fluide. Avant on distingue les 2 phases : (L) et (V).

Q7) D'après l'annexe pour $t = -62°C$ on a : $P_s = \frac{1,08 - 0,54}{5} \times 3 + 0,54$



$\Rightarrow$ $\underline{P_s = 0,864 \text{ Pa}}$ et $T = 211K$. Or $P_{Mars} = 758$ Pa, donc le point représentatif est obtenu <u>dans la phase solide</u>.

Q8). Pour $t = 18,46°C$ on a $p_s = \frac{2338,8 - 1705,6}{5} \times 3,46 + 1705,6 = 2144$ Pa

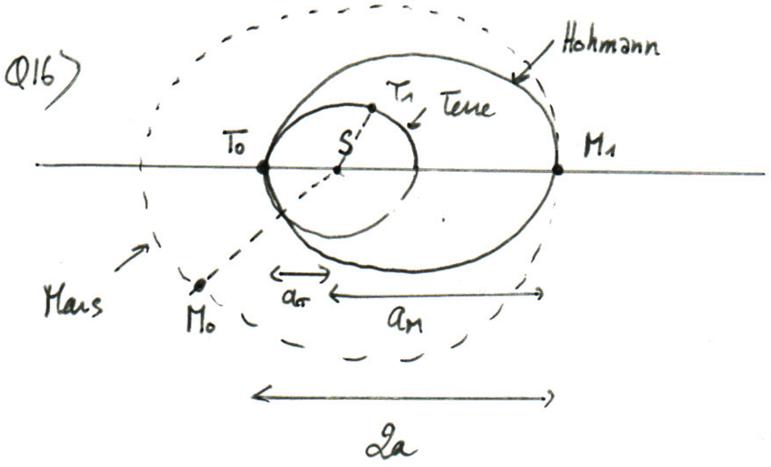
$\Rightarrow$ $P_{Mars} < P_s$: on est dans la phase gazeuse.

• Le corps étant formé principalement d'eau, il va se mettre à bouillir. De plus il n'aura plus assez d'O_2 pour respirer car $p(O_2) = \underline{1,06 \text{ Pa}}$

IV) Sauvetage de Mark Watney

IV.A) Trajectoire du vaisseau Hermès

Q16)



D'après la figure 6 : $2a = a_T + a_M \Rightarrow \boxed{a = \frac{a_T + a_M}{2}} = \underline{\underline{189.10^6\ km}}$

Q17) • Soit τ la durée du transfert t.q $\tau = \frac{T}{2}$

or $\frac{a^3}{T^2} = \frac{a_T^3}{T_T^2} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{1}{2} \cdot T_t \left(\frac{a}{a_T}\right)^{3/2}} = \underline{\underline{258,3\ \text{jours}}}$

• Positions de Mars au moment du lancement sur terre.

Pendant la durée τ : $\begin{cases} T_0 \to T_1 \\ M_0 \to M_1 \quad \text{t.q} \quad (\widehat{SM_0, SM_1}) = \alpha \\ N_0 \to N_1 \quad \text{(navette)} \end{cases}$

• Donc pendant $\begin{cases} \tau \quad \text{Mars parcourt } \alpha \\ \frac{T_M}{2} \quad \text{— " —} \quad \pi \end{cases} \Rightarrow \alpha / \pi = \frac{\tau}{T_M/2}$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = 2\pi \frac{\tau}{T_M}} = \underline{\underline{2,36\ rad = 135°}}$

• De même pour la terre $\frac{\beta}{\pi} = \frac{\tau}{T_T/2}$ où $\beta = (\widehat{ST_0, ST_1})$

$\Rightarrow \boxed{\beta = 2\pi\, \tau / T_T} = 4,44\ rad = \underline{\underline{254,5°}}$

Q18). Un nouveau tir peut avoir lieu lorsque α reprend la valeur de 135°.

$$\text{Or} \begin{cases} \theta_T = \omega_T . t . \\ \theta_M = \omega_M t + \theta_0 \quad \text{où } \theta_0 = \pi - \alpha = 44,6° \end{cases}$$

$\Rightarrow$ On pourra à nouveau lancer ssi $\theta_M - \theta_T = (\omega_M - \omega_T)t + \theta_0 = \theta_0 + 2\pi n$.

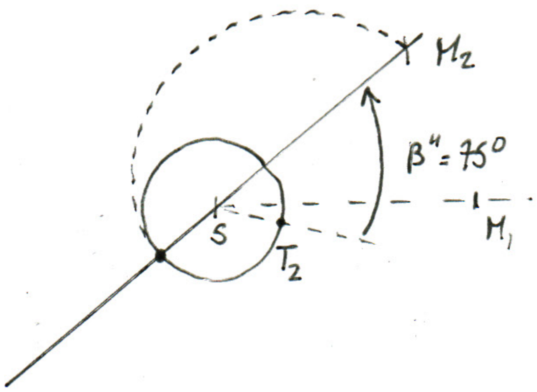
$$\Leftrightarrow (\omega_M - \omega_T)t = 2\pi n$$

$$\Leftrightarrow t = n . \frac{2\pi}{\omega_M - \omega_T} = n . \frac{1}{\frac{1}{T_M} - \frac{1}{T_T}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{t = n . \frac{T_M T_T}{\underbrace{T_T - T_M}_{<0}}}$$

Si $n = -1$ on obtient : $\underline{\underline{t = 779,9 \text{ jour}}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{T_{sym} = 780 \text{ jour}}$

Q19) Pour envisager une hohmann de sortie il faut que la terre soit positionner $\beta' = 255°$ avant le périgée c'est-à-dire que $\widehat{ST_2, SM_2} = \beta'' = 75°$



$$\text{Soit} \begin{cases} \theta_t = \omega_T t + \beta'' \\ \theta_m = \omega_M t \end{cases}$$

Or $\theta_m - \theta_t = \beta'' + 2n'\pi$ $\Rightarrow$ $(\omega_M - \omega_t)t - \beta'' = \beta'' + 2n'\pi$

D'où $(\omega_M - \omega_T)t = 2\beta'' + 2n'\pi$

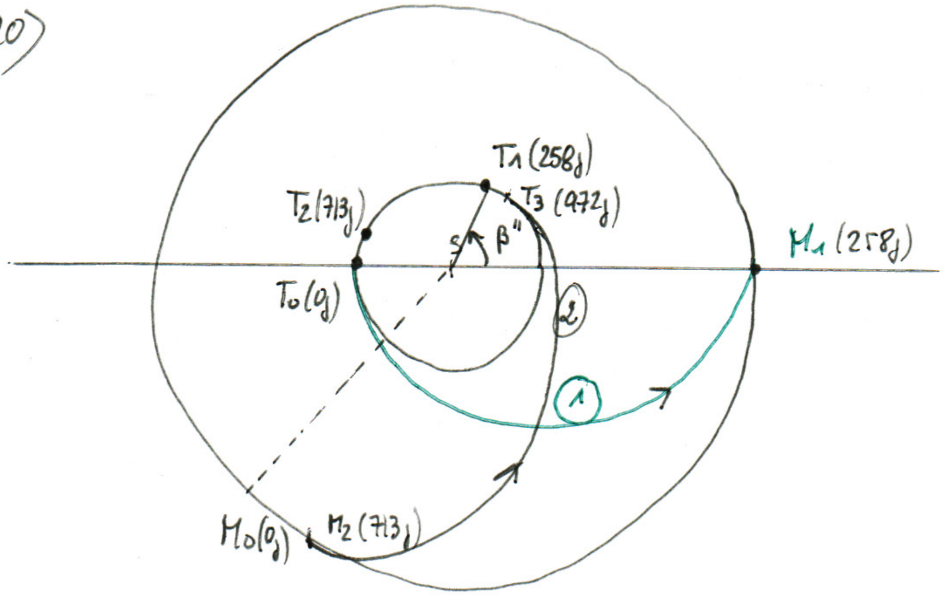
$$\Rightarrow 2\pi\left(\frac{1}{T_M} - \frac{1}{T_T}\right)t = 2\beta'' + 2n'\pi$$

$$\Rightarrow 2\pi\underbrace{\left(\frac{T_M - T_T}{T_M . T_T}\right)}_{<0}t = 2\pi\left(n' + \frac{\beta''}{\pi}\right) \iff -2\pi\frac{t}{T_{syn}} = 2\pi\left(n' + \frac{\beta''}{\pi}\right)$$

Prenons $n' = -1$, première valeur acceptable d'où :

$$\Rightarrow \underline{\tau' = T_{syn}\left[1 - \frac{\beta''}{\pi}\right]} = 455 \text{ jours}$$

Q20)

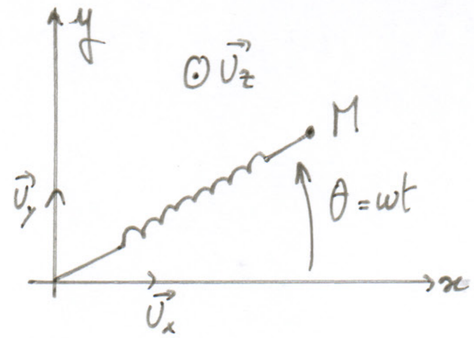


Q21) Dans le cas "parfait" : $\underline{\text{Durée du transfert} = 2\tau + \tau'} = \underline{\underline{972 \text{ jours}}}$ CQFD

Le vaisseau hermès dispose d'une propulsion nucléaire d'où le temps de trajet moins important.

Partie C – Ressort en rotation (CCP TSI 2015)

1°)



Bilan des forces . $\vec{f} = -k(r - l_0)\vec{u}_r$

. $\vec{P} + \vec{R} = 0$ grâce à la table à coussin d'air

D'où $\dfrac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{f} = r\vec{u}_r \wedge (-k(r-l_0)\vec{u}_r)$

$= \vec{0}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{\sigma}_0 = \vec{cste}}$

2a) . Par définition : $\vec{\sigma}_0 = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = m \begin{vmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2\dot{\theta} \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{\sigma}_0 = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$

. On reconnaît un problème à forces centrales donc le mouvement est plan. De plus $\vec{v}_0(M) = \vec{0}$ et $y = 0$ d'où : $\begin{cases} \vec{\sigma}_0 = \vec{0} \\ \vec{OM} = x\vec{u}_x \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{la trajectoire du mobile est rectiligne suivant } (Ox)}$

2b) Soit $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \Sigma \vec{F} \Leftrightarrow \ddot{x} = -k(x - l_0)/m \Leftrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 l_0$ où $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$

d'où $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + l_0$

or $\begin{cases} x(0) = 6/5\, l_0 = A\cos\varphi + l_0 \\ \dot{x}(0) = 0 = -A\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ A = l_0/5 \end{cases}$ d'où $\boxed{\begin{cases} x = \dfrac{l_0}{5}\cos(\omega_0 t + \varphi) + l_0 \\ \text{et} \\ x \in [4/5\, l_0 ; 6/5\, l_0] \end{cases}}$

(3a) Le résultat du (2a) se retrouve : $\vec{\sigma_O} = mr^2\dot{\theta}\,\vec{u_z} = \vec{cste}$

$$CI \Rightarrow \boxed{\sigma = m l_1^2 \omega}$$

(3b) Absence de frottements $\Rightarrow E_m = cste$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}k(r-l_0)^2 + cste \quad (E_{pp} = cste)$$

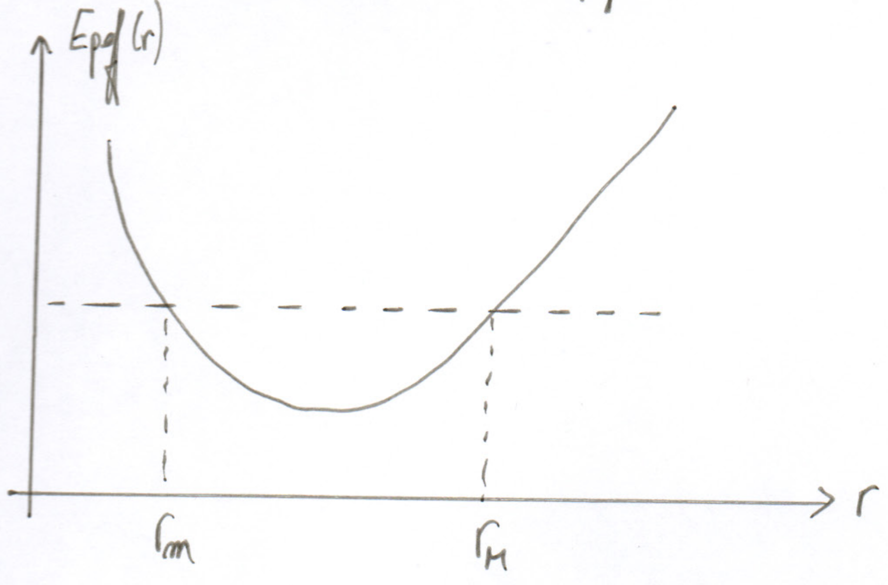
On choisit $cste = 0$ $\Rightarrow \boxed{E_m = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}k(r-l_0)^2}$

(3c) Soit $r^2\dot{\theta} = \frac{\sigma}{m}$ $\Leftrightarrow$ $\dot{\theta}^2 = \frac{\sigma^2}{m^2r^4}$ avec $\sigma = m l_1^2 \omega$

$$\text{donc } E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2 \cdot \frac{\sigma^2}{m^2r^4} + \frac{1}{2}k(r-l_0)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}k(r-l_0)^2 + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{mr^2}}_{E_{peff}(r)}}$$

(3d)



La forme de $E_{peff}(r)$ entraîne que quelque soit la valeur de E_m, r est borné par 2 valeurs r_m et r_M $\Rightarrow$ C'est un état lié

--- FIN ---