

Physique : DS5

Océans, atmosphère et communications (Centrale PC - 2018)

I) Particules chargées dans l'atmosphère

$$Q1) \text{ Soit } m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \wedge \vec{B}_0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} dv_x/dt \\ dv_y/dt \\ dv_z/dt \end{vmatrix} = \frac{q}{m} \begin{vmatrix} v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} = \frac{q}{m} \begin{vmatrix} v_y B_0 \\ -v_x B_0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\cdot \text{ D'où } \boxed{dv_x/dt = \frac{qB_0}{m} v_y, \quad dv_y/dt = -\frac{qB_0}{m} v_x \quad \text{et} \quad dv_z/dt = 0}$$

$$\cdot \text{ D'où } \underline{v_z = \text{cste}}$$

$$\cdot \text{ de plus } P = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = 0 = \frac{dE_c}{dt} \Rightarrow \underline{v^2 = \text{cste}}$$

$$Q2) \text{ Soit } \vec{v} = \vec{w} + \vec{v}_{\parallel} \quad \text{où } \vec{v}_{\parallel} = v_z \vec{e}_z$$

$$\text{Comme } \begin{cases} dv_z/dt = 0 \\ \vec{v}_{\parallel} \wedge \vec{B}_0 = \vec{0} \end{cases} \quad \text{on a : } \underline{m \frac{d\vec{w}}{dt} = q \vec{w} \wedge \vec{B}_0}$$

$$Q3) \text{ Posons } \vec{\Omega}_c = \frac{-q}{m} \vec{B}_0 \Rightarrow \frac{d\vec{w}}{dt} = \vec{w} \wedge \vec{\Omega}_c \Rightarrow \begin{vmatrix} dw_x/dt \\ dw_y/dt \\ dw_z/dt \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_x & w_y & w_z \\ 0 & 0 & \Omega_c \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow w_z = \text{cste} \quad \text{et} \quad \begin{cases} dw_x/dt = w_y \Omega_c & \textcircled{1} \\ dw_y/dt = -w_x \Omega_c & \textcircled{2} \end{cases}$$

On intègre d'où :

$$\begin{cases} u_x = \Omega_c y + C_1 \\ u_y = -\Omega_c x + C_2 \end{cases}$$

Preignons comme CI : $\begin{cases} u_x(0) = v_{\perp} \\ u_y(0) = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ \Rightarrow $\begin{cases} u_x = \Omega_c y + v_{\perp} \text{ (1')} \\ u_y = -\Omega_c x \text{ (2')} \end{cases}$

choix de plus simple

choix d'un bon système d'axes

① s'écrit alors : $\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = -\Omega_c^2 x \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = -\Omega_c^2 y - \Omega_c v_{\perp} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = A \cos(\Omega_c t) + B \sin(\Omega_c t) \\ y = A' \cos(\Omega_c t) + B' \sin(\Omega_c t) + v_{\perp} / \Omega_c \end{cases}$

des CI donnent : $\begin{cases} A = 0 \text{ et } B = v_{\perp} / \Omega_c \\ A' = -v_{\perp} / \Omega_c \text{ et } B' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{v_{\perp}}{\Omega_c} \sin(\Omega_c t) \\ y - \frac{v_{\perp}}{\Omega_c} = -\frac{v_{\perp}}{\Omega_c} \cos(\Omega_c t) \end{cases}$

Donc $x^2 + \left(y - \frac{v_{\perp}}{\Omega_c}\right)^2 = \left(\frac{v_{\perp}}{\Omega_c}\right)^2$

Equation d'un cercle de rayon $\rho_c = \left| \frac{v_{\perp}}{\Omega_c} \right|$ où $\Omega_c = -\frac{q}{m} B_0$

Q.4) d'ordre de grandeur B_0 est $10^{-5} \rightarrow 10^{-4} T \Rightarrow \begin{cases} \Omega_c \simeq 10^7 \text{ rad.s}^{-1} \text{ pour } e^- \\ \Omega_c \simeq 10^4 \text{ rad.s}^{-1} \text{ pour } p^+ \end{cases}$

Q.5) Soit $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q (\vec{E}_1 + \vec{v} \wedge \vec{B}_0) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{vmatrix} = \frac{q}{m} \begin{vmatrix} v_y B_0 + E_1 \\ -v_x B_0 \\ 0 \end{vmatrix}$

Q.6) On cherche une solution de la forme $\vec{v} = \vec{V}_d = v_{dx} \vec{e}_x + v_{dy} \vec{e}_y$

$\Rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{q}{m} (v_{dy} B_0 + E_1) \\ 0 = \frac{q}{m} (-v_{dx} B_0) \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_d = -\frac{E_1}{B_0} \vec{e}_y \quad \underline{\text{solution unique}}$

Q.7) Soit $\vec{u} = \vec{v} - \vec{V}_d$

$$\text{d'où } \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{q}{m} \left(\vec{E}_1 + (\vec{u} + \vec{V}_d) \wedge \vec{B}_0 \right)$$

$$\text{or d'après Q6 : } \frac{q}{m} \left[\vec{E}_1 + \vec{V}_d \wedge \vec{B}_0 \right] = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{q}{m} (\vec{u} \wedge \vec{B}_0)$$

Donc $\vec{v} = \vec{u} + \vec{V}_d$ se décompose en deux termes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u} \text{ responsable d'un movt circulaire dans le plan } (xOy) \\ \vec{V}_d \text{ d'un movt rectiligne suivant } \vec{u}_y \end{array} \right.$$

\Rightarrow d'ensemble forme une trajectoire cycloïdale

Q.8) Soit : $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e}{m} (\vec{E}_1 + \vec{v} \wedge \vec{B}_0)$ avec en ordre de grandeurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\frac{d\vec{v}}{dt}\| \sim v/\tau \\ \left\| -\frac{e}{m} \vec{v} \wedge \vec{B}_0 \right\| \sim \frac{e B_0 v}{m} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\|\frac{d\vec{v}}{dt}\|}{\left\| -\frac{e}{m} \vec{v} \wedge \vec{B}_0 \right\|} \sim \frac{m}{e B_0 \tau}$$

Ce rapport est très inférieur à 1 ssi $\frac{m}{e B_0 \tau} \ll 1 \Leftrightarrow \tau \Omega_c \gg 1$
 $\Leftrightarrow \tau \gg 1/\Omega_c$
 $\Leftrightarrow c \tau \gg c/\Omega_c$
 $\Leftrightarrow \underline{l \gg c/\Omega_c \sim 30 \text{ m}}$

Dans cette condition : $\vec{E}_1 + \vec{v} \wedge \vec{B}_0 = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{e}_z \wedge \vec{E}_1 + \vec{e}_z \wedge (\vec{v} \wedge \vec{B}_0) = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow \vec{e}_z \wedge \vec{E}_1 + \vec{v} (\underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{B}_0}_{=0}) - \vec{B}_0 (\underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{v}}_{=0}) = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow \vec{e}_z \wedge \vec{E}_1 + \vec{v} B_0 = \vec{0}$

or $\vec{f} = m^* (-e) \vec{v} \Rightarrow \vec{e}_z \wedge \vec{E}_1 + \frac{\vec{f}}{-m^* e} B_0 = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{O} = \vec{e}_z \wedge \vec{E}_1 - \frac{\Omega_c m}{m^* e^2} \vec{j} \quad \text{car } \Omega_c = \frac{e B_0}{m}$$

$$\text{or } \omega_p^2 = \frac{m^* e^2}{m \epsilon_0} \Rightarrow \vec{O} = \vec{e}_z \wedge \vec{E}_1 - \frac{\Omega_c}{\epsilon_0 \omega_p^2} \vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{j} = \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\Omega_c} \vec{e}_z \wedge \vec{E}_1$$

$$\Rightarrow \vec{j} = \gamma \vec{e}_z \wedge \vec{E}_1 \quad \text{où } \gamma = \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\Omega_c} \quad \text{soit } \gamma \gg 1/\Omega_c$$

$$\text{Q9) } \begin{cases} \Delta N \\ m^* = 10^{10} m^3 \\ B = 5 \cdot 10^{-5} T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Omega_c = 9 \cdot 10^6 \text{ rads}^{-1} \\ \omega_p = 6 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \\ \frac{\omega_p^2}{\Omega_c} = 4 \cdot 10^6 \text{ rads}^{-1} \end{cases}$$

Toutes ces pulsations sont très supérieures aux ondes radios d' $\omega = 50 \cdot 10^3 \text{ rads}^{-1}$ d'après l'annexe.

$$\text{Q10) Par définition } I_0 = \langle \Pi \rangle = \langle \text{Mem} \rangle c \quad \text{où } \langle \text{Mem} \rangle = \frac{\epsilon_0}{2} \langle E^2 \rangle + \frac{\langle B^2 \rangle}{2\mu_0}$$

$$\Rightarrow I_0 = c \left(\frac{\epsilon_0 \langle E^2 \rangle}{2} + \frac{\langle B^2 \rangle}{2\mu_0} \right)$$

$$\text{a } \langle \text{Mem} \rangle = 2 \langle \text{Me} \rangle = 2 \langle \text{Mm} \rangle \Rightarrow \frac{\langle B^2 \rangle}{2\mu_0} = \frac{\epsilon_0 \langle E^2 \rangle}{2} = I_0 / c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_1 = \sqrt{\frac{2 I_0}{\epsilon_0 c}} \\ B_1 = \sqrt{\frac{2 \mu_0 I_0}{c}} \end{cases}$$

$$\text{Pour avoir } B_1 \ll B_0 \text{ il faut } \sqrt{\frac{2 \mu_0 I_0}{c}} \ll B_0 \Leftrightarrow I_0 \ll \frac{B_0^2 c}{2 \mu_0} = \underline{3 \cdot 10^5 \text{ Wm}^{-2}}$$

d'intensité lumineuse reçue sur terre en provenance du soleil est de l'ordre 10^3 Wm^{-2} donc on peut négliger B_1 à B_0 .

Q11) En notation complexe : $\text{div} \leftrightarrow (i\vec{k} \cdot)$ $\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow (-i\omega)$ et $\text{rot} \leftrightarrow (i\vec{k} \wedge)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{MG} : i\vec{k} \cdot \vec{E}_1 = \rho / \epsilon_0 \\ \text{MT} : i\vec{k} \cdot \vec{B}_1 = 0 \\ \text{MF} : i\vec{k} \wedge \vec{E}_1 = i\omega \vec{B}_1 \\ \text{MA} : i\vec{k} \wedge \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j} - i\omega \mu_0 \epsilon_0 \vec{E}_1 \end{cases}$$

or $\vec{j} = \gamma(\vec{e}_z \wedge \vec{E}_1)$
 $\vec{k} = k\vec{e}_z$

d'où MA: $i\vec{k} \wedge \vec{B}_1 = \mu_0 [\gamma(\vec{e}_z \wedge \vec{E}_1) - i\omega \epsilon_0 \vec{E}_1]$

$$\Rightarrow \underbrace{(i\vec{k} \wedge \vec{B}_1)}_{\perp \vec{k}} \cdot \vec{k} = \mu_0 \vec{k} \cdot \underbrace{[\gamma(\vec{e}_z \wedge \vec{E}_1) - i\omega \epsilon_0 \vec{E}_1]}_{\perp \vec{e}_z}$$

$$\Rightarrow 0 = i\omega \mu_0 \epsilon_0 k \cdot \vec{E}_1$$

$$\Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E}_1 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\rho = 0 \text{ d'après MG}}$$

D'où $\vec{k} \cdot \vec{E}_1$ et $\vec{k} \cdot \vec{B}_1$ sont nul l'onde est donc une onde TEM

Q12) MF donne: $\vec{B}_1 = \frac{k}{\omega} (\vec{e}_z \wedge \vec{E}_1)$

donc MA s'écrit: $i k \vec{e}_z \wedge \left(\frac{k}{\omega} \vec{e}_z \wedge \vec{E}_1 \right) = \mu_0 \vec{j} - i\omega \epsilon_0 \mu_0 \vec{E}_1$

or $\vec{j} = \gamma(\vec{e}_z \wedge \vec{E}_1) = \epsilon_0 \frac{\omega p^2}{\omega c} (\vec{e}_z \wedge \vec{E}_1)$

$$\Rightarrow -i \frac{k^2}{\omega} \vec{E}_1 = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\omega p^2}{\omega c} (\vec{e}_z \wedge \vec{E}_1) - i\omega \epsilon_0 \mu_0 \vec{E}_1$$

$$\Rightarrow -i \frac{k^2 c^2}{\omega} \vec{E}_1 = \frac{\omega p^2}{\omega c} (\vec{e}_z \wedge \vec{E}_1) - i\omega \vec{E}_1$$

Comparons le poids relatif des 2 termes de droite :

$$\left\| \frac{\omega_p^2}{\Omega_c} (\vec{e}_z \wedge \vec{E}_1) \right\| \sim \frac{\omega_p^2}{\Omega_c} E_1 \quad \text{et} \quad \|i\omega \vec{E}_1\| \sim \omega E_1$$

$$\text{or } \frac{\omega_p^2}{\Omega_c} \gg \omega \quad (\text{Q9})$$

$$\Rightarrow \underline{-i \frac{k^2 c^2}{\omega} \vec{E}_1 = \frac{\omega_p^2}{\Omega_c} (\vec{e}_z \wedge \vec{E}_1)} \quad (11)$$

Supposons \vec{E}_1 polarisé rectilignement alors il faudrait \vec{E}_1 suivant \vec{u} mais aussi suivant $\vec{e}_z \wedge \vec{u}$ qui est orthogonal à \vec{u} . C'est impossible sauf si

$$\vec{E}_1 = \vec{0}?$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{E}_1 \text{ n'est pas polarisé rectilignement}}$$

$$(11) \Rightarrow k^2 c^2 \vec{E}_1 = i\omega \frac{\omega_p^2}{\Omega_c} (\vec{e}_z \wedge \vec{E}_1) \quad \text{ou} \quad \vec{E}_1 = E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y$$

$$\Rightarrow k^2 c^2 \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} = i\omega \frac{\omega_p^2}{\Omega_c} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow k^2 c^2 \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = i\omega \frac{\omega_p^2}{\Omega_c} \begin{pmatrix} -E_y \\ E_x \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} k^2 c^2 E_x = -i\omega \frac{\omega_p^2}{\Omega_c} E_y \\ k^2 c^2 E_y = i\omega \frac{\omega_p^2}{\Omega_c} E_x \end{cases} \Rightarrow k^2 c^2 E_x = -\left(\frac{i\omega \omega_p^2}{\Omega_c}\right)^2 \times \frac{1}{k^2 c^2}$$

$$\Rightarrow (k^2 c^2)^2 = \left(\frac{\omega \omega_p^2}{\Omega_c}\right)^2$$

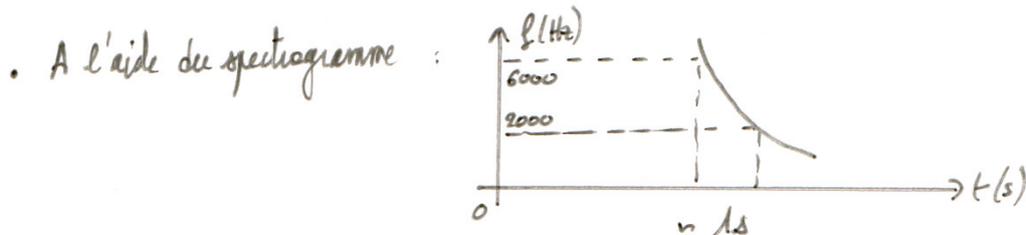
$$\Rightarrow \underline{c^2 k^2 = \frac{\omega_p^2 \omega}{\Omega_c^2}} \quad \text{CQFD}$$

Donc $\left\{ \begin{array}{l} k \text{ est réel} \Rightarrow \text{milieu transparent} \\ k \text{ n'est pas proportionnel à } \omega \Rightarrow \text{milieu dispersif} \end{array} \right\}$

Q13) Question ouverte:

$$\bullet \text{ On a } v_{\text{gr}} = \frac{\omega}{\text{Re}(k)} = \frac{c}{\omega_p} \sqrt{\omega \omega_c}$$

donc dans un paquet d'ondes les ondes de BF voyagent plus lentement que celles de HF.
de son produit évoquera un sifflement de tonalité descendante (aigu puis grave).



$$\text{on constate que } t_1 - t_2 = d/v_{\text{gr}_1} - d/v_{\text{gr}_2} = 1 \text{ s}$$

$$\Leftrightarrow d = (t_1 - t_2) \left(\frac{1}{v_{\text{gr}_1}} - \frac{1}{v_{\text{gr}_2}} \right)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{t_1 - t_2}{\frac{\omega_p}{c \sqrt{\omega_c}} \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_1}} - \frac{1}{\sqrt{\omega_2}} \right)}$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{(t_1 - t_2) c \sqrt{\omega_c} \cdot \sqrt{2\pi f_1 f_2}}{\omega_p \left(\sqrt{f_1} - \sqrt{f_2} \right)} \approx \underline{\underline{4 \cdot 10^7 \text{ m}}}$$

On a supposé que le récepteur était aussi situé dans l'ionosphère. De toute façon les autres couches de l'atmosphère $\approx 60 \text{ km} \ll 40000 \text{ km}$.

II Ondes acoustiques sous-marines

Q14) Il manque l'équation de conservation de la masse : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$

Q15) A partir de Navier-Stokes : $\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad } p + \rho \vec{g} + m \Delta \vec{v}$

• Écoulement parfait $\Rightarrow \eta \Delta \vec{v} = \vec{0}$

• $(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \ll \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ car ordre 2 en \vec{v} .

• $-\text{grad } p_s = -\rho \vec{g}$ (hydrostatique) $\Rightarrow -\text{grad } p + \rho \vec{g} = -\text{grad } p_a$

d'où $\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) = -\text{grad } p_a$

\Rightarrow A l'ordre 1 : $\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) = -\text{grad } p_a$ (1)

• Eq de conservation de la masse : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$

$$\Rightarrow \rho_0 \text{div} \left[\rho_0 (1 + \chi p_a) \vec{v} \right] + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (1 + \chi p_a) = 0$$

$$\Rightarrow \rho_0 \text{div } \vec{v} + \rho_0 \chi \frac{\partial p_a}{\partial t} = 0 \text{ si on se limite à l'ordre 1.}$$

$$\Rightarrow \text{div } \vec{v} = -\chi \frac{\partial p_a}{\partial t} \quad (2)$$

Q16) (1) s'écrit : $\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{v}) = -\Delta p_a$.

$$\Rightarrow \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\chi \frac{\partial p_a}{\partial t} \right) = -\Delta p_a \quad \Rightarrow \Delta p_a = \rho_0 \chi \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} = c_a^2 \Delta p_a \text{ où } c_a^2 = \frac{1}{\rho_0 \chi}$$

Q17) Pour onde sinusoïdale de pulsation ω on obtient l'équation de dispersion : $\omega = kc_a$

Q18) Soit $p_a(n,t) = P_{a0} \cos(kx - \omega t)$ avec $k = \frac{\omega}{c_a}$

or $\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\text{grad } p_a \Rightarrow \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = P_{a0} k (+1) \sin(kx - \omega t)$

$\Rightarrow \vec{v} = \vec{u}_x \frac{P_{a0} \cdot k}{\rho_0 \omega} \cos(kx - \omega t) + \vec{C}_1$
 $= \vec{0}$, on conserve une solution harmonique.

$\Rightarrow \vec{v} = \frac{P_{a0}}{\rho_0 c_a} \cos(kx - \omega t) \vec{u}_x$

D'où $\vec{v} = Z_a p_a \vec{u}_x$ où $Z_a = \frac{1}{\rho_0 c}$

Reque: la définition proposée est impropre car $p_a = Z_a v_a$ analogue à $\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$

Q19) Soit $p_a = \frac{A}{r} \cos(kr - \omega t)$ d'où $\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\text{grad } p_a \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \left[\frac{A}{r^2} \cos(kr - \omega t) + \frac{kA}{r} \sin(kr - \omega t) \right] \vec{u}_r$

$\Rightarrow \vec{v} = \frac{1}{\rho_0 \omega} \left[-\frac{A}{r^2} \sin(kr - \omega t) + \frac{kA}{r} \cos(kr - \omega t) \right] \vec{u}_r$

Pour avoir $\vec{v} = Z_a p_a \vec{u}_r$ il faut donc $\frac{kA}{r} \gg \frac{A}{r^2} \Rightarrow k \gg \frac{1}{r} \Rightarrow kr \gg 1$
 $\Rightarrow \frac{r}{\lambda} \gg 1 \Rightarrow \underline{r \gg \lambda}$

Approximation dite de champ lointain : "L'onde est localement plane"

Q20) Par définition: $dP_i = p_a dS \vec{m} \cdot \vec{v}$ où dP_i : puissance instantanée reçue par dS .
 $= Z_a p_a^2 dS \vec{m} \cdot \vec{e}_r$

$\Rightarrow dP = \langle dP_i \rangle = \frac{Z_a |p_a|^2}{2} dS \vec{m} \cdot \vec{e}_r$

$\Rightarrow \frac{dP}{dS} = I_a \cdot \vec{m} \cdot \vec{e}_r$ où $I_a = \frac{1}{2\rho_0 c} |p_a|^2$

$$Q21) \text{ Soit } |p_a|^2 = \left| \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)} \right|^2 = \frac{A^2}{r^2} \left| e^{i(k'r - \omega t)} e^{-k''r} \right|^2$$

$$= \frac{A^2}{r^2} e^{-2k''r}$$

$$\text{Donc } \frac{I_a(r_0)}{I_a(r)} = \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 e^{-2k''(r_0 - r)}$$

$$\Rightarrow P = 10 \log \frac{I_a(r_0)}{I_a(r)} = 20 \log \left(\frac{r}{r_0} \right) + \frac{20 k''(r_0 - r)}{\ln 10}$$

$$= 20 \log \left(\frac{r}{r_0} \right) + \alpha (r_0 - r)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{20 k''}{\ln 10}$$

Q22) Une erreur s'est glissée dans le sujet car sinon on aurait pas d'atténuation :

$$k'' = \frac{k'^2 \eta}{2 \rho_0 c a}$$

$$\text{or } \delta = \left| \frac{1}{k''} \right| \Rightarrow \delta = \frac{2 \rho_0 c a}{k'^2 \eta} = \frac{2 \rho_0 c a^3}{\omega^2 \eta} = \frac{2 \rho_0 c a^3}{4 \pi^2 f^2 \eta} = \frac{\rho_0 c a^3}{2 \pi^2 \eta} \cdot \frac{1}{f^2}$$

$$\text{Donc pour } \left\{ \begin{array}{l} f = 3 \text{ kHz} : k'' = 7,8 \cdot 10^{-8} \text{ m}^{-1}, \delta = 1,3 \cdot 10^7 \text{ m} \\ f = 30 \text{ kHz} : k'' = 7,8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^{-1}, \delta = 1,3 \cdot 10^5 \text{ m} \end{array} \right.$$

Q23) La quantité $k_0 L(\vec{r})$ est sans dimension $\Rightarrow \underline{L(\vec{r}) = \text{longueur}}$
 Son équivalent est le chemin optique

Q24) Notons d'une distance caractéristique alors $\|(\vec{\text{grad}} L)^2\| \sim \frac{L^2}{\delta^2}$ et $\left| \frac{i \Delta L}{k_0} \right| \sim \frac{L}{k_0 \delta^2}$

$$\text{Donc } \|(\vec{\text{grad}} L)^2\| \gg \left| \frac{i \Delta L}{k_0} \right| \text{ssi } L \gg \frac{1}{k_0} \Leftrightarrow L \gg \frac{\lambda_0}{2\pi} \Leftrightarrow \underline{L \gg \lambda_0}$$

Avec cette condition : $\vec{\text{grad}} L = n(r) \vec{e}_r$. Cette hypothèse consiste à négliger la diffraction.

Q25) Pour une surface d'égal chemin acoustique, $dL = 0$

$$\Leftrightarrow \vec{\text{grad}} L \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\Leftrightarrow m(r) \vec{u} \cdot d\vec{r} = 0$$

Donc le vecteur rayon acoustique est orthogonal localement aux surfaces iso-acoustiques.

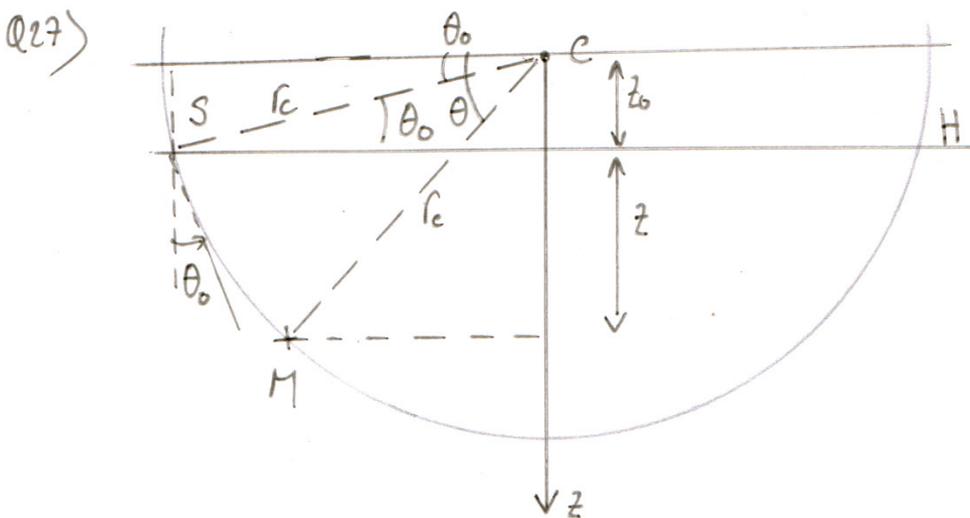
Cette loi rappelle le théorème de Malus (cours d'optique)

Q26). Par définition $c_a = \frac{c_{a0}}{m(r)} = c_{a0}(1 + \Omega z) \Rightarrow m(r) = \frac{1}{1 + \Omega z}$

or $m_0 \sin \theta_0 = m_1 \sin \theta_1$ avec $\theta_1 > \theta_0 \rightarrow m_1 < m_0$

d'où $\Omega > 0$ vu que $z_1 > z_0$

• de rayon remonte grâce au phénomène de réflexion totale.



Soit $m(z) \sin \theta(z) = m(z) \sin(\theta(z+dz)) = \text{cste} = m_0 \sin \theta_0$

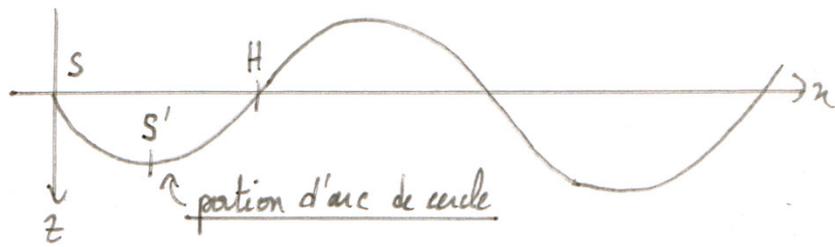
$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{m_0}{m} \sin \theta_0 = (1 + \Omega z) \sin \theta_0 \quad (1)$$

or $\begin{cases} z + z_0 = r_c \sin \theta \\ z_0 = r_c \sin \theta_0 \end{cases} \Rightarrow z = r_c (\sin \theta - \sin \theta_0)$ donc $\sin \theta = (1 + \Omega r_c (\sin \theta - \sin \theta_0)) \sin \theta_0$

$$\Leftrightarrow (1 - \Omega r_c \sin \theta_0) \sin \theta_0 = \sin \theta (1 - \Omega r_c \sin \theta)$$

Ce qui est vérifiéssi: $\Omega r_c \sin \theta_0 = 1$ d'où $r_c |\Omega \sin \theta_0| = 1$ (Q.E.D.)

Q28) En Q26, on a montré que le rayon acoustique est dévié vers des zones d'indice acoustique fort et donc de célérité faible. Le rayon va donc être attiré par la côte $z=0$.



$$Q29) \text{ soit } dt = \frac{dl}{c(z)} \text{ où } dl = r_c d\theta \Rightarrow dt = \frac{dl}{c_0(1+n_0 z)}$$

$$Q27) \text{ or } \sin\theta = (1+n_0 z) \sin\theta_0 \Rightarrow dt = \frac{dl}{c_0 \sin\theta} \sin\theta_0$$

$$\Rightarrow dt = \frac{r_c \sin\theta_0}{c_0 \sin\theta} d\theta$$

$$\text{or } r_c \sin\theta = \frac{1}{n_0} \Rightarrow dt = \frac{d\theta}{c_0 n_0 \sin\theta}$$

$$\text{a } dt_0 = \int_s^H \frac{d\theta}{c_0 n_0 \sin\theta} = 2 \int_s^{s'} \frac{d\theta}{c_0 n_0 \sin\theta} = \frac{2}{c_0 n_0} \int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sin\theta}$$

$$\Leftrightarrow dt_0 = \frac{2}{c_0 n_0} \left[\underbrace{\ln \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{=0} - \ln \tan\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \right]$$

$$\Rightarrow dt_0 = \frac{-2}{c_0 n_0} \ln \tan\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$$

$$Q30) \text{ soit } \Delta x = SH = 2r_c \cos\theta_0 \quad (\text{schéma Q27})$$

$$\Delta t = dt_0$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{\delta t_0}{SH} \cdot \Delta x = \frac{-2/c_0 n_0 \cdot \ln \tan(\theta_0/2)}{2r_c \cos\theta_0} \Delta x$$

$$\text{or } r_c = \frac{1}{n_0 \sin\theta_0} \Rightarrow \Delta t = \frac{-\tan\theta_0 \cdot \ln|\tan(\theta_0/2)|}{c_0} \cdot \Delta x \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{c_0} f(\theta_0)$$

Q31) On a $\theta_0 = \pi/2$, le rayon se propage en ligne droite suivant Ox. Comme z ne varie pas la célérité de l'onde acoustique est constante et égale à C_{ao} .

$$\Rightarrow \Delta t(\theta_0 = \pi/2) = \frac{\Delta x}{C_{ao}}$$

$$\Rightarrow \underline{f(\theta_0 = \pi/2) = 1} \quad \text{cf figure 5}$$

Q32) On a $f(\theta) - 1 \leq 0 \Rightarrow \Delta t \leq \frac{\Delta x}{C_{ao}}$. le temps de parcours le plus long est celui en ligne droite.

Q33) Une baleine émet des sons autour de 1kHz et supposons qu'elle émette selon un cône d'ouverture de 60° .

D'après l'annexe une baleine produit une unité de une à qqs secondes. Prenons $t_u = 5s$.

Le signal se propageant en ligne droite arrive après le signal se propageant en arcs de cercle. Le signal sera trouillé si: $t_u < |\Delta t(\pi/2) - \Delta t(60^\circ)|$

$$\text{d'où } t_u = \frac{\Delta x_m}{C_{ao}} [f(\pi/2) - f(60^\circ)]$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta x_m = \frac{C_{ao} t_u}{f(\pi/2) - f(60^\circ)}} \quad \approx \underline{100km}$$