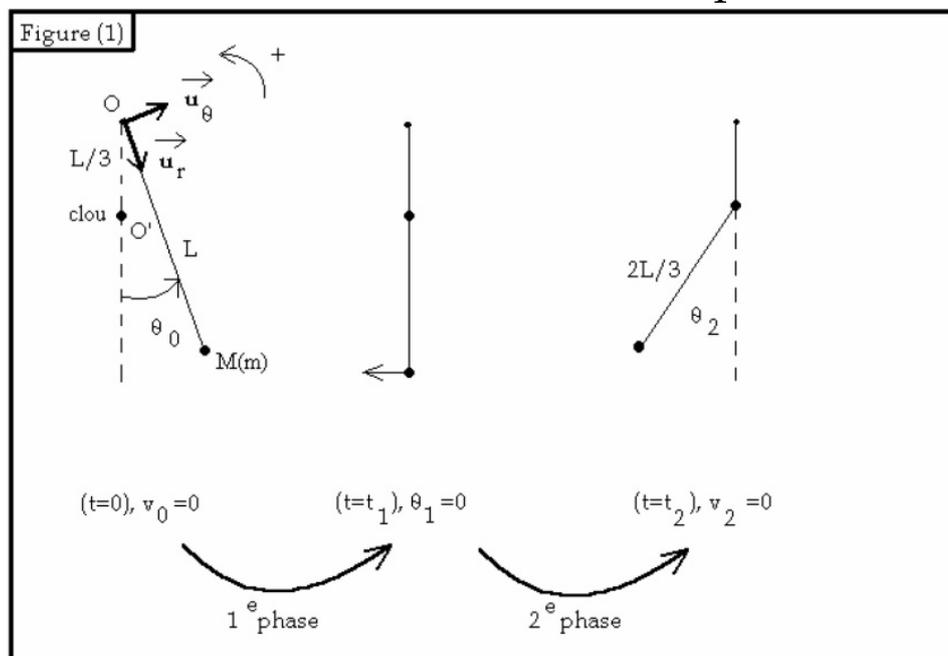


# Physique : DM1

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, **la qualité de la rédaction**, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

## Partie I – Pendule « simple »



On rappelle qu'une fonction  $y = f(x)$  est une fonction continue en  $x_0$  si et seulement si la limite à gauche en  $x_0$  de  $f$  est égale à la limite à droite et à la valeur  $f(x_0)$ . Dans tout ce sujet, on notera  $x_0^-$  une valeur de  $x$  immédiatement inférieure à  $x_0$ ,  $x_0^+$  une valeur de  $x$  immédiatement supérieure à  $x_0$ . La continuité peut donc s'écrire aussi :

$$f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$$

On rappelle les coordonnées dans la base polaire des vecteurs position  $\overline{OM}$ , vitesse  $\vec{v}$  et accélération  $\vec{a}$  dans le cas du mouvement circulaire de rayon  $r$  :

$$\overline{OM} = r\vec{u}_r \quad \vec{v} = r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta \quad \vec{a} = -r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \vec{u}_r + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{u}_\theta$$

### Première partie : Mécanique

**I.1.** On considère un mobile ponctuel de masse constante  $m$  soumis, dans un référentiel galiléen, à un ensemble de forces de résultante  $\vec{f}$ , partout et constamment définie dans l'espace et le temps.

**Question 1.** En utilisant le principe fondamental de la dynamique (ou théorème du centre d'inertie), montrer que, sous cette hypothèse, la norme  $v$  du vecteur vitesse du mobile est une fonction continue du temps.

**I.2.** On étudie un pendule simple modifié, présenté sur la figure (1). Un mobile ponctuel  $M$  de masse  $m$ , est accroché à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur  $L$  et de masse négligeable,

dont l'autre extrémité est fixe en O. On néglige tout frottement et on repère l'inclinaison  $\theta$  du brin de fil soutenant M par rapport à la verticale. Lorsque  $\theta > 0$ , le système se comporte comme un pendule simple de centre O et de longueur de fil  $L$ . A la verticale et en dessous de O, un clou est planté en O' avec  $OO' = \frac{L}{3}$ , qui bloquera la partie haute du fil vers la gauche : quand  $\theta < 0$ , le système se comporte donc comme un pendule simple de centre O' et de longueur de fil  $\frac{2L}{3}$ . A la date  $t = 0$ , on abandonne sans vitesse initiale le mobile M en donnant au fil une inclinaison initiale  $\theta(0) = \theta_0 > 0$ . On note  $t_1$  la date de la première rencontre du fil avec le clou,  $t_2$  la date de première annulation de la vitesse du mobile pour  $\theta < 0$ . L'intervalle de dates  $[0, t_1[$  est nommé première phase du mouvement, l'intervalle  $]t_1, t_2]$  est nommé deuxième phase. A la date  $t_1^-$  immédiatement inférieure à  $t_1$ , le fil n'a pas encore touché le clou et à la date  $t_1^+$  immédiatement supérieure, le fil vient de toucher le clou.

- Question 2.** Etablir l'équation différentielle vérifiée par  $\theta$  pour la première phase du mouvement.
- Question 3.** Dans l'hypothèse des petites oscillations, on suppose que  $\sin \theta \approx \theta$ . Reconnaitre l'équation différentielle d'un certain type d'oscillateur et en déduire, sans résoudre l'équation, la durée  $\delta t_I$  de la première phase du mouvement.
- Question 4.** En utilisant le théorème de l'énergie mécanique, déterminer la vitesse  $v_1^-$  de M à la date  $t_1^-$ . En déduire la vitesse angulaire  $\omega_1^- = \frac{d\theta}{dt}$  à cette date.
- Question 5.** Le blocage de la partie supérieure du fil par le clou ne s'accompagne d'aucun transfert énergétique. Déterminer la vitesse  $v_1^+$  de M à la date  $t_1^+$ . En déduire la vitesse angulaire  $\omega_1^+ = \frac{d\theta}{dt}$  à cette date.
- Question 6.** En utilisant le résultat des questions 2 et 3, donner sans calcul la durée  $\delta t_{II}$  de la deuxième phase.
- Question 7.** Déterminer l'expression de l'angle  $\theta_2$  à la date  $t_2$ .
- Question 8.** Décrire brièvement la suite du mouvement de ce système et donner l'expression de sa période  $T$ .
- Question 9.** Dresser l'allure du portrait de phase, dans le système d'axes  $\left(\theta, \frac{d\theta}{dt}\right)$ . Conclure.

# Partie II : L'atome

## PROBLÈME

### De l'évolution du concept d'atome au cours du XX<sup>e</sup> siècle

Ce problème aborde certaines étapes de l'histoire des sciences qui ont permis, au cours du XX<sup>e</sup> siècle, de préciser la structure et les propriétés de l'atome. Dans la **partie I**, on s'intéressera à l'expérience de *E. Rutherford*, qui conduisit à abandonner le modèle de *J. J. Thomson* au profit de celui de *J. Perrin*. Les limites de ce modèle feront l'objet de la **partie II**, limites qui seront partiellement levées dans la **partie III** avec les postulats de *N. Bohr*. L'expérience historique de *O. Stern* et *W. Gerlach*, décrite dans la **partie IV**, apportera la preuve de l'existence d'un moment magnétique propre de l'électron. On verra dans la **partie V** de quelle manière l'interprétation première de cette expérience a été mise en défaut avec l'effet Zeeman. C'est finalement la mécanique quantique qui apporte à ce jour la description la plus complète de l'atome : la **partie VI** étudiera le mouvement de l'électron d'un atome d'hydrogène à partir de l'équation de *E. Schrödinger*.

Les effets liés à la gravité seront négligés dans l'ensemble du problème.

Le rotationnel d'un champ  $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$  a pour expression, en coordonnées cartésiennes :

$$\text{rot}\vec{F} = \begin{pmatrix} \partial F_z / \partial y - \partial F_y / \partial z \\ \partial F_x / \partial z - \partial F_z / \partial x \\ \partial F_y / \partial x - \partial F_x / \partial y \end{pmatrix}.$$

#### Données numériques

Constante de Planck	$h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Charge électrique élémentaire	$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Electronvolt	$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
Permittivité du vide	$\epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

### Partie I - Limite du modèle de *J. J. Thomson* à travers l'expérience de *E. Rutherford*

En 1898, *J. J. Thomson* fait l'hypothèse que les atomes sont constitués d'électrons emprisonnés dans une sorte de gelée de charges positives. Ce modèle est appelé modèle du "plum pudding", car *J. J. Thomson* compare les électrons aux raisins du célèbre dessert anglais. Le physicien *Jean Perrin* imagine, quant à lui, l'atome à l'image du système solaire. Il suppose que les électrons gravitent, à des distances immenses, autour d'un « soleil » d'électricité positive, sur des orbites pour lesquelles force coulombienne et force d'inertie s'équilibrent.

En 1909, *Ernest Rutherford*, procède à une série d'expériences dans lesquelles un faisceau de particules alpha (noyaux d'hélium 4 :  ${}^4_2\text{He}$ ), ayant toutes la même énergie cinétique, est lancé contre une mince feuille d'or. Il observe que la majorité des particules alpha traversent la feuille d'or, mais qu'une faible proportion d'entre elles « rebondit » sur celle-ci. Le but de cette partie est de déterminer quel modèle est en accord avec cette observation expérimentale.

Nous nous plaçons d'abord dans le cadre du modèle de *J. J. Thomson*, supposant une répartition uniforme de la charge positive dans la feuille d'or.

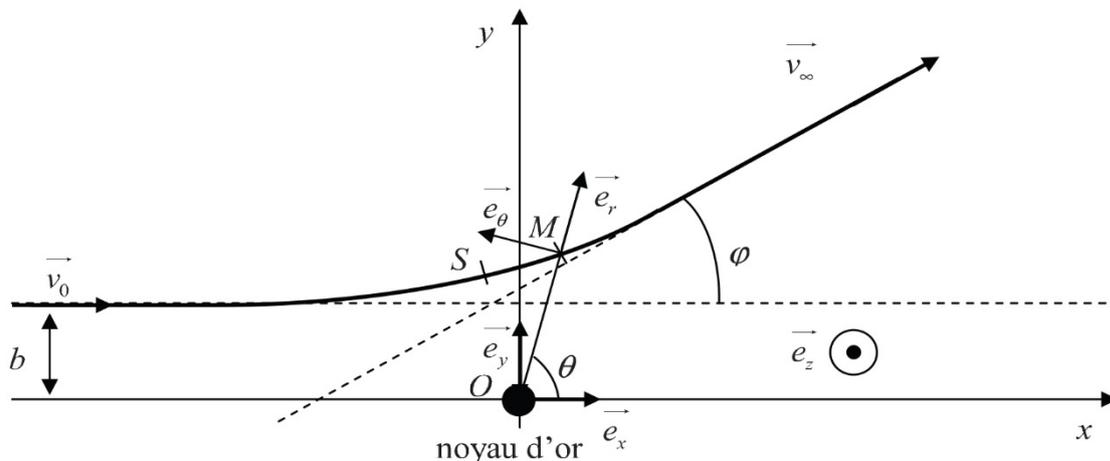
**Q1.** Expliquer qualitativement pourquoi le modèle proposé par *J. J. Thomson* est incompatible avec les observations de *E. Rutherford*.

Nous nous plaçons maintenant dans le cadre du modèle de *J. Perrin*, supposant l'existence d'un noyau massif de charge positive, et on étudie le mouvement de la particule alpha lors de son passage à proximité de ce noyau.

Le noyau d'or, de charge positive ponctuelle  $Z.e$ , supposé ponctuel et immobile dans le référentiel galiléen du laboratoire, se situe au point  $O$ , origine d'un repère cartésien orthonormé  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

Nous considérons qu'à l'instant initial  $t = 0$  s, la particule alpha, de masse  $m_\alpha$  et de charge électrique  $q_\alpha = +2.e$ , vient de « l'infini » avec un mouvement rectiligne uniforme caractérisé par un vecteur vitesse  $\vec{v}_0 = \vec{v}(t=0) = v_0 \cdot \vec{e}_x$ . On désigne par  $b$  la distance du point  $O$  à la trajectoire de la particule à l'infini (**figure 1**). À chaque instant  $t$ , on note  $d(t)$  la distance entre la particule alpha et le point  $O$ . La particule alpha est donc repérée par le vecteur position  $\vec{OM}(t) = d(t) \cdot \vec{e}_r$ , avec  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  une base cylindrique locale directe.

Au plus proche du point  $O$ , la particule alpha est au point  $S$ , la distance minimale en ce point est notée  $d_m$ . La particule alpha est non relativiste. L'expérience a été réalisée sous très faible pression.



**Figure 1** – Expérience de *Ernest Rutherford*

**Q2.** Donner l'expression de la force qui s'exerce sur la particule alpha en fonction de  $e$ ,  $Z$ ,  $d$ ,  $\epsilon_0$  et  $\vec{e}_r$ . Donner l'expression de l'énergie potentielle  $E_p$  qui y est associée, en considérant que  $\lim_{d \rightarrow +\infty} E_p(d) = 0$ , en fonction de  $e$ ,  $Z$ ,  $d$  et  $\epsilon_0$ . Réécrire ces deux expressions en fonction de

$$K = \frac{Z \cdot e^2}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \text{ et } d.$$

Citer les propriétés de cette force qui permettent d'affirmer que le moment cinétique  $\vec{L}_O$  par rapport au point  $O$  et l'énergie mécanique  $E_M$  de la particule alpha se conservent.

- Q3.** Déterminer, en fonction de  $m_\alpha$  et  $v_0$ , l'énergie mécanique  $E_M$  de la particule alpha.
- Q4.** Exprimer le moment cinétique  $\vec{L}_O$ , en fonction de  $b$ ,  $m_\alpha$ ,  $v_0$  et l'un des vecteurs unitaires du trièdre direct  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . Pour cela, vous pourrez calculer  $\vec{L}_O$  en  $M_0$ , position initiale de la particule alpha telle que  $\vec{OM}_0 = X \cdot \vec{e}_x + b \cdot \vec{e}_y$ .
- Q5.** Établir, à un instant  $t$  quelconque, l'expression du moment cinétique  $\vec{L}_O$  en fonction de  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ ,  $m_\alpha$ ,  $d$  et de l'un des vecteurs unitaires du trièdre direct  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

En déduire une relation entre  $d$ ,  $b$ ,  $\dot{\theta}$  et  $v_0$ .

- Q6.** Au sommet  $S$  de la trajectoire, le vecteur vitesse  $\vec{v}_S$ , de norme  $v_S$ , de la particule alpha est perpendiculaire au rayon vecteur  $\vec{OS}$ , de norme  $d_m$ . Déterminer un polynôme du second degré en  $d_m$  et en déduire l'expression de  $d_m$  en fonction de  $K$ ,  $b$ ,  $m_\alpha$  et  $v_0$ .
- Q7.** Malheureusement,  $b$  est inaccessible à la mesure. Par contre, l'angle de déviation  $\varphi$  est facilement mesurable. Il faut donc trouver la relation qui lie  $\varphi$  à  $b$ . Pour cela, vous écrivez le principe fondamental de la dynamique (P.F.D.) en fonction de  $K$ ,  $d$ ,  $m_\alpha$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{e}_r$ . Projeter le P.F.D. sur l'axe des  $x$  en introduisant la composante  $v_x$  de la vitesse selon l'axe des  $x$ , et l'angle  $\theta$  (**figure 1**, page 3).

Réécrire cette équation en fonction uniquement de  $v_x$ ,  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $K$ ,  $b$ ,  $m_\alpha$  et  $v_0$ .

Intégrer cette équation entre  $t = 0$  et  $t \rightarrow \infty$ . On remarquera que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) \approx \varphi$ .

En déduire que la relation qui lie  $\varphi$  à  $b$  est :  $\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{K}{b \cdot m_\alpha \cdot v_0^2}$ .

On rappelle que :  $\cos \varphi - 1 = -2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$  et  $\sin \varphi = 2 \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ .

- Q8.** À partir de quelle valeur de  $\varphi$  les particules alpha rebondissent-elles sur la feuille d'or ? Expliquer pourquoi le modèle de *J. Perrin* permet d'interpréter les observations de *E. Rutherford*.

Nous nous proposons maintenant d'évaluer une borne supérieure à la dimension de ce noyau.

- Q9.** Montrer que la relation qui lie  $d_m$  à  $\varphi$  est :  $d_m = \frac{K}{m_\alpha \cdot v_0^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\right)$ .

- Q10.** Pour quelle valeur  $\varphi_m$  de l'angle  $\varphi$ , la distance d'approche est-elle minimale ? Déterminer, dans ce cas, l'expression de  $d_m$  en fonction de  $K$ ,  $m_\alpha$  et  $v_0$ .

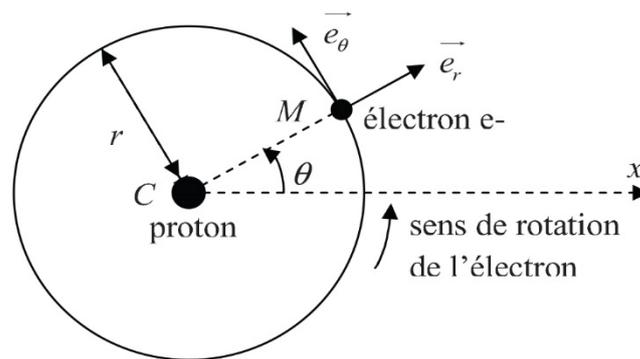
- Q11.** Que vaut  $b$  pour  $\varphi = \varphi_m$  ? Représenter l'allure de la trajectoire de la particule alpha pour cet angle et faire figurer  $d_m$  sur votre schéma. Justifier que  $d_m$  constitue une borne supérieure du rayon du noyau.  
Sachant que l'énergie typique d'une particule alpha est de 5 MeV et que le numéro atomique de l'or est  $Z = 79$ , déterminer numériquement la valeur de  $d_m$ .

- Q12.** Justifier que, pour effectuer des expériences de physique nucléaire, il faut disposer de particules de haute énergie.

## Partie II - Limite du modèle planétaire

Le modèle de *J. J. Thomson* est écarté et l'on considère que les électrons évoluent, avec un mouvement circulaire uniforme, autour d'un noyau massif de charge électrique positive. Néanmoins, ce modèle est en contradiction avec une loi classique de l'électromagnétisme : toute particule chargée et accélérée émet de l'énergie électromagnétique.

Pour mettre en évidence les conséquences de cette loi classique de l'électromagnétisme, nous allons étudier le mouvement de l'électron de l'atome d'hydrogène, de masse  $m_e$  et de charge électrique  $q_e = -e$ , qui tourne autour de son noyau, un proton de masse  $m_p$  et de charge électrique  $q_p = +e$ , sur une orbite circulaire de rayon  $r$  (**figure 2**). Le noyau est considéré, dans le référentiel galiléen du laboratoire, fixe, ponctuel et placé en son centre  $C$ . Le centre de la trajectoire circulaire de l'électron est donc  $C$ .



**Figure 2** – Modèle planétaire de l'atome d'hydrogène

Pour étudier le mouvement circulaire de l'électron, nous allons utiliser le repère polaire pour lequel, en un point  $M$  de la trajectoire décrite par l'électron, on associe deux vecteurs unitaires  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  (**figure 2**).  $\vec{e}_\theta$  est le vecteur tangent à la trajectoire au point  $M$  et dirigé dans le sens du mouvement. La position de l'électron est repérée par le vecteur position :  $\overrightarrow{CM} = r \cdot \vec{e}_r$  et l'angle  $\theta = (\overrightarrow{Cx}, \overrightarrow{CM})$ .

- Q13.** Déterminer l'expression du vecteur vitesse  $\vec{v}$  de l'électron en fonction de  $e$ ,  $m_e$ ,  $\epsilon_0$ ,  $r$  et d'un vecteur unitaire.
- Q14.** Exprimer l'énergie mécanique  $E_M(r)$  de l'électron sous la forme  $E_M(r) = A \cdot f(r)$  où  $A$  est une constante négative dont vous préciserez l'expression en fonction de  $e$ ,  $\epsilon_0$  et  $f(r)$  une fonction qui ne dépend que de  $r$  que vous déterminerez également.

**Q15.** Une loi classique de l'électromagnétisme indique que toute particule chargée et accélérée émet de l'énergie électromagnétique. Aussi, d'après cette théorie, l'électron devrait émettre un rayonnement électromagnétique de puissance moyenne :

$$P(r) = \frac{\omega^4 \cdot e^2 \cdot r^2}{12 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot c^3}$$

où  $\omega$  est la vitesse angulaire de l'électron et  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide.

Cette puissance peut être mise sous la forme  $P(r) = P_0 \cdot \frac{1}{r^4}$ , où  $P_0$  est une constante.

Déterminer l'expression de  $P_0$  et son unité.

Justifier que le rayon de la trajectoire de l'électron diminue au cours du temps.

**Q16.** Montrer qu'il existe une relation différentielle de la forme :  $r^2 \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{P_0}{A}$ .

**Q17.** À  $t = 0$ , on suppose que l'électron se trouve sur une orbite de rayon  $R$ . Donner l'expression, en fonction de  $P_0$ ,  $R$  et  $A$ , du temps  $t_f$  mis par l'électron pour atteindre le noyau.

On donne  $R = 1,0 \cdot 10^{-10}$  m, calculer  $t_f$ . Commenter le résultat obtenu.

### Partie III - Postulats de *N. Bohr*

Les contradictions théoriques précédentes vont être « levées » par *Niels Bohr*. En 1913, ce dernier postule, d'une part, l'existence d'orbites circulaires sur lesquelles l'électron ne rayonne pas (postulat mécanique) et, d'autre part, que le mouvement d'un électron d'une orbite à l'autre se traduit par l'émission ou l'absorption d'énergie électromagnétique (postulat optique).

Le postulat mécanique traduit la quantification de la norme du moment cinétique  $L$  de l'électron par rapport au centre de l'atome

$$L = n \cdot \hbar = n \cdot \frac{h}{2 \cdot \pi}$$

où  $n$  est le nombre quantique principal,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $h$  la constante de Planck.

Vous considérerez qu'un électron sur une orbite de rayon  $r$  possède une vitesse  $v = \frac{e}{\sqrt{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot m_e \cdot r}}$

et une énergie mécanique  $E_M = -\frac{e^2}{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$ .

**Q18.** Montrer que le postulat mécanique implique que l'électron ne peut se trouver que sur certaines orbites de rayon  $r_n = r_0 \cdot n^2$ .

Préciser l'expression de  $r_0$  en fonction de  $\epsilon_0$ ,  $h$ ,  $m_e$  et  $e$ . Calculer la valeur de  $r_0$ .

**Q19.** En traduisant le fait que l'onde de matière associée à l'électron doit interférer constructivement avec elle-même après un tour sur son orbite, établir une relation entre la longueur d'onde de *De Broglie* de l'électron  $\lambda$  et le périmètre  $\mathcal{P}$  de son orbite.

Montrer qu'on retrouve alors le postulat mécanique de *N. Bohr*.

- Q20.** Montrer que le postulat mécanique implique que l'électron qui se trouve sur une orbite de rayon  $r_n$  possède une énergie mécanique  $E_M = -\frac{E_0}{n^2}$ .  
Préciser l'expression de  $E_0$  en fonction de  $\epsilon_0$ ,  $h$ ,  $m_e$  et  $e$ . Calculer, en électronvolt, la valeur de  $E_0$ . Que représente physiquement  $E_0$  ?

Lorsqu'un électron va d'une orbite externe vers une orbite interne, on parle de réarrangement du cortège électronique ou de désexcitation et cela se traduit par l'émission d'un photon.

- Q21.** Montrer que la longueur d'onde du photon émis est liée aux nombres quantiques  $n_i$  et  $n_f$  des orbites de départ et d'arrivée de l'électron par l'expression de *Rydberg - Ritz* :

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \cdot \left[ \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right] \text{ avec } n_i > n_f. R_H \text{ est la constante de Rydberg.}$$

Préciser l'expression de  $R_H$  en fonction de  $E_0$ ,  $h$  et  $c$ . Indiquer sa valeur et son unité.

- Q22.** Les raies de la série de *Lyman* sont celles pour lesquelles l'électron est revenu à la couche K ( $n_f = 1$ ). Dans ce cas, la mesure des trois premières raies donne les longueurs d'onde suivantes :  $\lambda_1 = 121,5 \text{ nm}$  ;  $\lambda_2 = 102,5 \text{ nm}$  ;  $\lambda_3 = 97,2 \text{ nm}$ .  
À quelle partie du spectre électromagnétique ces longueurs d'onde correspondent-elles ? Calculer, à partir de ces valeurs expérimentales, la constante de *Rydberg*. Conclure.