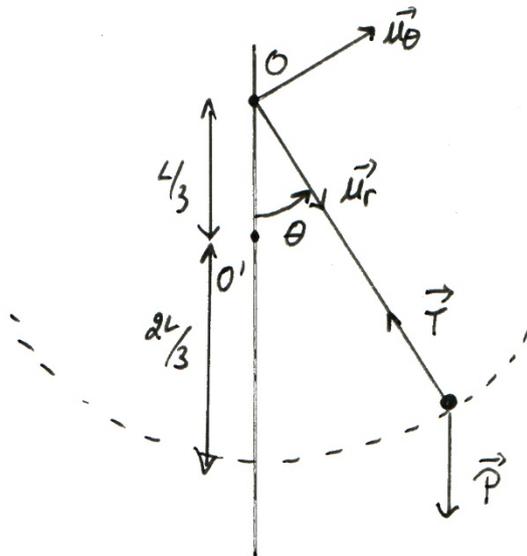


Physique : DM1

Partie I – Pendule « simple » (Mines d'Albi 2005)



$$1^{\circ}) \text{ D'après le PFD: } m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}$$

Or \vec{f} est toujours défini donc \vec{v} est une fonction dérivable du temps.
 $\Rightarrow \vec{v}$ est continue | (1)

2^o) PFD appliqué à la masse m dans \mathcal{R} référentiel galiléen :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

$$\text{On projette: } \begin{cases} \vec{e}_r : -T + mg \cos \theta = -mr\dot{\theta}^2 = -mL\dot{\theta}^2 & (2) \\ \vec{e}_\theta : 0 - mg \sin \theta = mr\ddot{\theta} = mL\ddot{\theta} & (3) \end{cases}$$

$$(3) \Rightarrow \underline{L\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0} \quad (4)$$

3^o) Pour de petites oscillations : $\sin \theta \approx \theta$ d'où : $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ avec $\omega_0^2 = g/l$

$$\Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\text{Or } \delta t_{\pm} \text{ représente un quart de période d'où } \underline{\delta t_{\pm} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}}} \quad (5)$$

4°) Absence de forces non conservatives $\Rightarrow E_m = \text{cste}$
 $\Rightarrow \Delta E_c = -\Delta E_p$
 $\Rightarrow \frac{1}{2} m (v_1^-)^2 - 0 = mgL(1 - \cos \theta_0)$
 D'où $v_1^- = \sqrt{2gL(1 - \cos \theta_0)}$ (6)

Or $v = L\omega$, mais dans cette phase θ décroît donc $\omega < 0$
 $\Rightarrow \omega_1^- = -\sqrt{\frac{2g(1 - \cos \theta_0)}{L}}$ (7)

5°) la vitesse est continue avec $v = \left(\frac{2L}{3}\right)\omega$, d'où :

$$\begin{cases} v_1^+ = \sqrt{2gL(1 - \cos \theta_0)} \\ \omega_1^+ = -\sqrt{\frac{3}{2L}g(1 - \cos \theta_0)} \end{cases} \quad (4')$$

6°) On a toujours affaire à un quart du mouvement total mais $L' = 2L/3$ d'où :

$$\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{g/(2L/3)} \\ \delta t_{II} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2L}{3g}} \end{cases} \quad (8)$$

7°) Il y a toujours conservation de l' E_m : $-\frac{1}{2} m (\omega_1^+)^2 = mg\left(\frac{2L}{3}\right) [\cos \theta_2 - 1]$

Comme $v_1^- = v_1^+$: $mgL(1 - \cos \theta_0) = mg\left(\frac{2L}{3}\right) [1 - \cos \theta_2]$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos \theta_0 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cos \theta_2$$

$$\Leftrightarrow \cos \theta_2 = \frac{-1 + 3 \cos \theta_0}{2} \quad (9)$$

8°) Le mouvement se décompose en quatre parties

I : $\delta t_I = \frac{\pi}{2} \sqrt{L/g}$

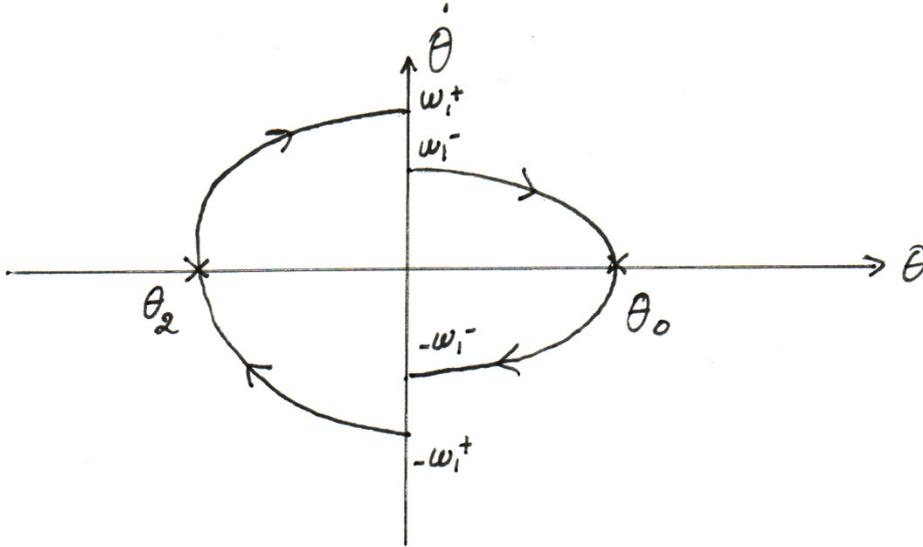
II : $\delta t_{II} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2L}{3g}}$

III : identique à δt_{II} .

IV : $\delta t_{IV} = \delta t_I$

$$\Rightarrow T = \pi \left(\sqrt{\frac{L}{g}} + \sqrt{\frac{2L}{3g}} \right)$$

3°) Sur chaque portion on a affaire à un oscillateur harmonique dont le portrait de phase est un oscillateur harmonique. On va donc se retrouver avec des demi-ellipses suivant qu'on tourne autour de O ou de O' .



On vérifie sur le portrait de phase que $\dot{\theta}$ est discontinue
 θ et θ sont continus.

Partie II :

L'atome au cours du 19^{ème} siècle (CCP - 2019 - PC)

Q1) Selon le modèle de Thomson, la répartition des charges positives est uniforme, donc toutes les particules α lancées contre une feuille d'or devraient avoir le même comportement

Q2) La force de Coulomb exercée sur " α " par le noyau d'or est :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze \cdot Ze}{d^2} \vec{e}_r \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \vec{e}_r$$

or $\vec{F} = -\text{grad } E_p$ d'où : $dE_p = -\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} d"d"$

$$\Rightarrow E_p = +\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 d} + \text{cte}$$

or $\lim_{d \rightarrow \infty} E_p = 0$ d'où $E_p = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 d}$

Par conséquent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = k/d^2 \vec{e}_r \\ E_p = k/d \end{array} \right. \quad \text{où } k = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0}$$

• \vec{F} est une force conservative $\Rightarrow E_m = \text{cte}$

• \vec{F} est une force centrale $\Rightarrow \vec{L}_O = \text{cte}$

Q3) L'énergie mécanique est telle que : $E_m = \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2 + E_p$

On $E_p(t \rightarrow \infty) = \frac{k}{d_{\infty}} \rightarrow 0$ d'où $E_m(t=0) = \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2$

Q4) Par définition: $\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m_\alpha \vec{V}_0$
 $= (X\vec{e}_x + b\vec{e}_y) \wedge v_0 \vec{e}_x \cdot m_\alpha$
 $\Leftrightarrow \vec{L}_0 = -b m_\alpha v_0 \vec{e}_z$

Q5) A t: $\vec{L}_0 = m_\alpha \begin{vmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \dot{d} \\ d\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix} = \underline{\underline{m_\alpha d^2 \dot{\theta} \vec{e}_z}}$

Comme $\vec{L}_0 = \text{cste}$: $m_\alpha d^2 \dot{\theta} = -b m_\alpha v_0$
 $\Leftrightarrow \underline{\underline{d^2 \dot{\theta} = -b v_0}}$

Q6). Soit $E_m(t) = E_m(0) \Leftrightarrow \frac{k}{d} + \frac{1}{2} m_\alpha (d^2 + (d\dot{\theta})^2) = \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2$

• Au sommet de la trajectoire en S, la vitesse est perpendiculaire à $\vec{OS} \Rightarrow \vec{v} = v \vec{e}_\theta$
 $\Rightarrow \dot{d}_m = 0$

d'où $\frac{1}{2} m_\alpha \frac{d^2 \dot{\theta}_m^2}{dm} + \frac{k}{dm} = \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2$ (1)

• Et en S: $\vec{L}_0 = \vec{OS} \wedge m v_s \vec{e}_\theta = m_\alpha dm (dm \dot{\theta}_m) \vec{e}_z$
 $= -b m_\alpha v_0 \vec{e}_z$ } $\Rightarrow \dot{\theta}_m = -\frac{b v_0}{dm^2}$ (2)

(2) et (1) donnent: $\frac{1}{2} m_\alpha \frac{d^2}{dm} \left(-\frac{b v_0}{dm^2} \right)^2 + \frac{k}{dm} = \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m_\alpha b^2 v_0^2 + k dm - \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2 dm^2 = 0$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{dm^2 - \frac{2k}{m_\alpha v_0^2} dm - b^2 = 0}}$ t.g $\Delta = \sqrt{\frac{4k^2}{m_\alpha^2 v_0^4} + 4b^2}$

$\Rightarrow dm = \frac{k}{m_\alpha v_0^2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{m_\alpha^2 v_0^4} + b^2}$ < 0 si on prend le signe \ominus .

$$\text{D'où } dm = \frac{k}{m \alpha v_0^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{b^2 m^2 v_0^4}{k^2}} \right]$$

Q7) PFD: $m \alpha \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{k}{d^2} \vec{e}_r$

d'où sur \vec{e}_x : $m \alpha \frac{dv_x}{dt} = \frac{k}{d^2} \cos \theta$

or $d^2\theta = -b v_0$ (Q.5)

$$\Rightarrow m \alpha \frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{b v_0} \cos \theta \cdot \dot{\theta} \quad \rightarrow \quad dv_x = -\frac{k}{m \alpha b v_0} \cos \theta d\theta$$

On intègre cette relation: $\int_{v_x(\pi)}^{v_x(\varphi)} dv_x = -\frac{k}{m \alpha b v_0} \int_{\pi}^{\varphi} \cos \theta d\theta$
entre $\theta = \pi$ et $\theta = \varphi$
 $t = 0$ $t \rightarrow \infty$

$$\Leftrightarrow v_x(\varphi) - v_x(\pi) = -\frac{k}{m \alpha b v_0} (\sin \varphi - \sin \pi)$$

or $v_x(\pi) = v_0$
 $v_x(\varphi) = v_{\infty} \cos \varphi \Rightarrow v_{\infty} \cos \varphi - v_0 = -\frac{k}{m \alpha b v_0} \sin \varphi$

Or $E_m = \text{cte} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m \alpha v_0^2 + \frac{k}{\underbrace{d(t=0)}_{=0}} = \frac{1}{2} m \alpha v_{\infty}^2 + \frac{k}{\underbrace{d(t \rightarrow \infty)}_{=0}} \Rightarrow \underline{v_0 = v_{\infty}}$

$$\text{d'où } v_0 (\cos \varphi - 1) = -\frac{k}{m \alpha b v_0} \sin \varphi$$

$$\Leftrightarrow v_0 \left(-2 \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right) = -\frac{k}{m \alpha b v_0} \times 2 \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right)$$

$$\text{D'où } \tan \left(\frac{\varphi}{2} \right) = \frac{k}{m \alpha b v_0^2}$$

Q8) On peut définir le rebond si $\varphi > \pi/2$ or $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ d'où :

$$\text{Il y aura rebond si } \frac{k}{m_{\alpha} b v_0^2} > 1$$

$$\Leftrightarrow b < \frac{k}{m_{\alpha} v_0^2}$$

Dans le cas du modèle de J.J. Perrin il faudrait que les particules soient proches du noyau pour pouvoir rebondir.

Q9) D'après Q6 : $d_m = \frac{k}{m_{\alpha} v_0^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2(\varphi/2)}} \right)$

$$\text{or } 1 + \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{1 + \tan^2 x}{\tan^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x \cdot \tan^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\text{d'où } d_m = \frac{k}{m_{\alpha} v_0^2} \left(1 + \frac{1}{\sin(\varphi/2)} \right)$$

Q10) Or d_m est minimal si $\sin(\varphi/2)$ est maximal
 $\Leftrightarrow \varphi = \pi$

$$\text{d'où } d_{m \min} = d_m(\pi) = \frac{2k}{m_{\alpha} v_0^2}$$

Q11) Si $\varphi = \pi$ alors $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{k}{m_{\alpha} b v_0^2}$ d'après Q.7

d'où $b = 0$ et la trajectoire est rectiligne selon (Ox) .



• On a $E_m = \frac{1}{2} m_{\alpha} v_0^2 + \frac{k}{d^2} = \frac{k}{d_m^2} \Rightarrow$ si $d_m \rightarrow 0$ alors $v_0 \rightarrow \infty$ par conséquent d_m est une borne supérieure du rayon du noyau

$$t.q \quad dm = \frac{K}{E_p} = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 E_m} \quad \Bigg| = \underline{4,5 \cdot 10^{-14} \text{ m}}$$

Q12) Plus l'énergie des particules sera élevée, plus on pourra étendre des valeurs de dm faible et par conséquent affiner la mesure du rayon du noyau.

Q13) PFD appliqué à l' e^- : $m\vec{a} = \vec{F}$

$$\Leftrightarrow m_e \frac{v^2}{r} \vec{e}_r = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

$$\Leftrightarrow \underline{\vec{v} = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r \cdot m_e}} \vec{e}_\theta} \quad \text{car } \vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

Q14) Par définition: $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$

$$= \frac{1}{2} m_e \cdot \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r m_e} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$= -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

D'où $E_m = A f(r)$ avec $\left\{ \begin{array}{l} A = -e^2/8\pi\epsilon_0 \\ f(r) = 1/r \end{array} \right.$

Q15) Pour une trajectoire circulaire $\omega = \frac{v}{r} \rightarrow \omega^4 = \frac{1}{r^4} \cdot \frac{e^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^2 m_e^2}$

d'où $P(r) = \frac{e^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^6 m_e^2} = \frac{e^2 r^2}{12\pi \epsilon_0 c^3}$

or $\overbrace{P(r)}^{\omega} = P_0 / r^4$

$\rightarrow P_0 = \frac{e^6}{192 \cdot \pi^3 \epsilon_0^3 m_e^2 c^3}$ qui s'exprime en W.m⁴

Si la particule émet de l'énergie électromagnétique alors elle perd de l'Em.

Si Em \Rightarrow , vu que $E_m = -\frac{|A|}{r}$ on a alors r qui diminue.

Q16) D'après le théorème de la puissance mécanique:

$$\frac{dE_m}{dt} = -P(r)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{A}{r^2} \cdot \frac{dr}{dt} = -\frac{P_0}{r^4} \quad \text{car } d\left(\frac{1}{r}\right)/dt = \frac{d(1/r)}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{r^2 \frac{dr}{dt} = \frac{P_0}{A}}}$$

Q17) D'où: $r^2 dr = \frac{P_0}{A} dt$

$$\Rightarrow \int_R^0 r^2 dr = \int_0^{t_p} \frac{P_0}{A} dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{R^3}{3} = \frac{P_0}{A} t_p$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{t_p = \frac{|A|R^3}{3P_0} = 2,1 \cdot 10^{-10} \text{ s}}}$$

$$\text{ou } \begin{cases} A = -1,15 \cdot 10^{-28} \text{ Jm} \\ P_0 = 1,82 \cdot 10^{-49} \text{ Wm}^4 \end{cases}$$

ce temps est très petit et par conséquent l'atome serait instable.

Q18) D'après Bohr: $L = n\hbar \Leftrightarrow mvr = n \cdot \hbar/2\pi$

$$\Leftrightarrow \pi r \cdot \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e}} = \frac{n\hbar}{\sqrt{4\pi^2}} \quad \Leftrightarrow m_e r \cdot \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} = \frac{n^2 \hbar^2}{4\pi^2}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{n^2 \hbar^2 \epsilon_0}{m_e \pi e^2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{r_n = n^2 r_0 \quad \text{ou } r_0 = \frac{\hbar^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2} = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}}}$$

Q19) Si l'onde interfère après un tour sur son orbite alors :

$$P = n\lambda \Leftrightarrow m\lambda = 2\pi r \text{ où } \lambda = \frac{h}{m_e v}$$

$$\Leftrightarrow m \cdot \frac{h}{m_e v} = 2\pi r$$

$$\Leftrightarrow m_e v r = \frac{m h}{2\pi}$$

$$\underline{\Leftrightarrow m_e v r = n \frac{h}{2\pi}}$$

Q20) On a $\begin{cases} E_m = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \\ \frac{d^2}{r} = m^2 r_0 \end{cases}$ d'où $E_m = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 m^2 r_0} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 m^2 \times \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2}}$

$$\underline{\Leftrightarrow E_m = -\frac{E_0}{m^2} \text{ où } E_0 = \frac{m_e \cdot e^4}{8h^2 \epsilon_0^2} = 13,6 \text{ eV}}$$

où $-E_0$ représente l'énergie du niveau fondamental de H.

Q21) Comme $\Delta E = h\nu \Leftrightarrow \left| -\frac{E_0}{m_f^2} + \frac{E_0}{m_i^2} \right| = \frac{hc}{\lambda}$ où $m_f < m_i$ $\frac{m_i}{m_f}$ ↓ désexcitation.

$$\underline{\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{hc}{E_0} \left(\frac{1}{m_f^2} - \frac{1}{m_i^2} \right)} \Rightarrow R_H = \frac{hc}{E_0}$$

Q22). D'après l'énoncé $\begin{cases} \lambda_1 = 121,5 \text{ nm} \\ \lambda_2 = 102,5 \text{ nm} \\ \lambda_3 = 97,2 \text{ nm} \end{cases}$ ces longueurs d'ondes appartiennent à l'UV.

de plus $R_H = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{m_e^2 \cdot m_f^2}{m_i^2 \cdot m_f^2} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{m_e^2 - 1}{m_i^2} \Leftrightarrow R_H = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{m_i^2} \right)$

Pour $m_i = 2$: $R_H = 1,097 \text{ m}^{-1}$

$m_i = 3$: $R_H = 1,098 \text{ m}^{-1}$

$m_i = 4$: $R_H = 1,097 \text{ m}^{-1}$

$$\Rightarrow \underline{R_H = 1,097 \text{ m}^{-1}}$$

de bon accord des valeurs numériques obtenues valident le modèle de Bohr