

Physique : DM11

Partie A - L'atome le plus simple de l'univers (CCP MP-2018)

$$Q1) \text{ Soit } \vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

$$Q2) \text{ Trajectoire circulaire uniforme: } m v^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi m \epsilon_0 r}}$$

$$Q3) \text{ Soit } dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{O}M \Rightarrow E_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\text{or } E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \times \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\Rightarrow E_c = -\frac{E_p}{2} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

$$Q4) \text{ On a } \vec{L} = r \vec{u}_r (m v) \Rightarrow L = \sqrt{\frac{m e r e^2}{4\pi\epsilon_0}}$$

$$Q5) \text{ Bohr: } \frac{m e r e^2}{4\pi\epsilon_0} = m^2 \hbar^2 \text{ d'où } r_m = m^2 a_B \text{ avec } a_B = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m e^2}$$

$$Q6) \text{ Soit } E_m = E_c + E_p = \frac{E_p}{2} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 m^2 a_B}$$

$$\text{D'où } E_m = -\frac{R_y}{m^2} \text{ où } R_y = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_B} = \frac{m e \cdot e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2}$$

Q7) Rayon de Bohr = rayon de l'atome H dans son état fondamental $1s^1$

A.N: $a_B = 52,919 \text{ pm}$ et $R_y = 13,606 \text{ eV}$

$$Q8) \text{ Soit } E_m = \frac{E_p}{2} = -E_c \text{ d'où } \frac{1}{2} m_e v_m^2 = + R_y / m^2$$

$$\Leftrightarrow v_m^2 = \frac{2 R_y}{m_e n^2}$$

$$\Rightarrow v_m = \sqrt{\frac{2 R_y}{m_e} \cdot \frac{1}{n}}$$

$$\text{A.N.: } \underline{v_1 = 2,1877 \cdot 10^6 \text{ ms}^{-1}} \Rightarrow \frac{v_1}{c} \ll 1 \Rightarrow \text{mouvement non relativiste}$$

$$Q9) \text{ Soit } \psi(\vec{r}, t) = K(\vec{r}, t) e^{-iEt/\hbar} \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar} K(\vec{r}, t) e^{-iEt/\hbar}$$

$$\text{d'où Schrödinger s'écrit: } \underline{E K(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta K(\vec{r}, t) + E_p(\vec{r}) \cdot K(\vec{r}, t)}$$

$$Q10) \text{ D'après Q3, } E_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$Q11) \text{ Si } K(\vec{r}) = K(\theta) \text{ alors } \Delta K = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 K}{\partial \theta^2} \text{ car } r=R.$$

$$\text{Comme } E_p = 2E \text{ on a: } 0 = -\frac{\hbar^2}{2m_e R^2} \frac{\partial^2 K}{\partial \theta^2} + E \cdot K$$

$$\Leftrightarrow \frac{\hbar^2}{2m_e R^2} \frac{\partial^2 K(\theta)}{\partial \theta^2} = E K(\theta)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 K}{d\theta^2} + \frac{2m_e R^2 E}{\hbar^2} K(\theta) = 0$$

$$\text{or } E = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow \frac{d^2 K}{d\theta^2} - \underbrace{\frac{m_e R e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}}_{\eta^2} K = 0$$

$$\text{D'où } \underline{K(\theta) = A e^{i\eta\theta} + B e^{-i\eta\theta}}$$

Q12) Il faut que $K(\theta + \pi) = K(\theta)$ pour cela il faut que n soit un entier n par exemple.

$$\Rightarrow \frac{m_e R e^2}{4\pi \epsilon_0 \hbar^2} = m^2$$

$$\Rightarrow R = m^2 \cdot \frac{4\pi \epsilon_0 \hbar^2}{m_e \cdot e^2}$$

On retrouve le résultat $R = m^2 \cdot a_B$

Q13) lors de la désexcitation : $E_p = E_{sup} - E_{inf}$

$$\Leftrightarrow \frac{hc}{\lambda} = -R_H \frac{1}{n^2} + R_H \frac{1}{m^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \text{ où } R_H = \frac{R_H}{hc}$$

Q14) Soit $R_H = 1,0974 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ d'où le tableau suivant

	H α	H β	H γ	H δ
$\lambda_{Ritz}(\text{nm})$	656,10	486,00	433,93	410,06
$\lambda_{exp}(\text{nm})$	$656,3 \pm 0,3$	$486,1 \pm 0,2$	$434,0 \pm 0,2$	$410,2 \pm 0,2$

des intervalles d'incertitude englobent bien les valeurs de Ritz

Q15) Soit $\alpha_1 = \sqrt{\frac{2R_H}{m_e}} = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 \hbar^2} = \alpha \cdot c$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\alpha_1}{c}$ qui est sans dimension.

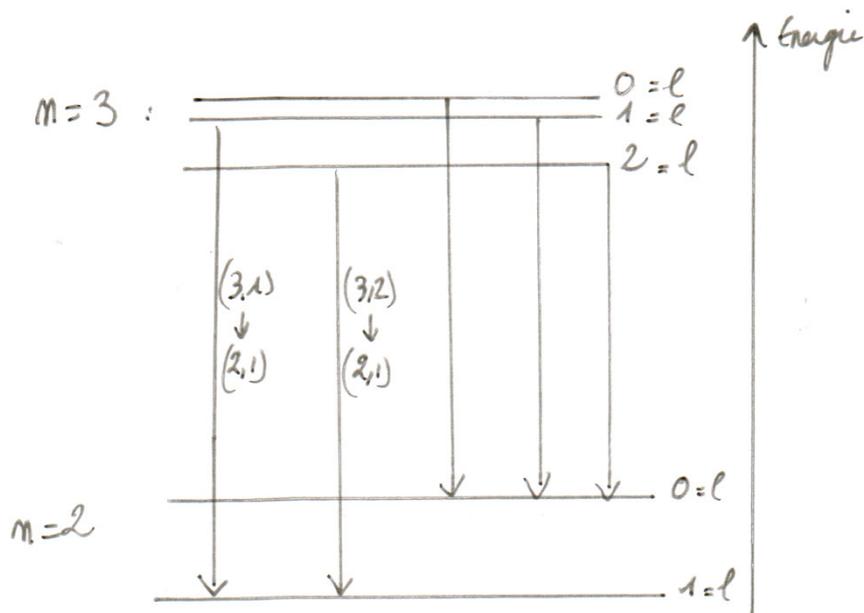
Q16) On a donc $\alpha = 7,2974 \cdot 10^{-3}$ et $1/\alpha = 137,03$

Q17) La formule de Sommerfeld apporte une correction à la formule de Bohr. Il y a dégénérescence pour un n donné.

• Pour un n donné on a n niveaux d'énergies possibles :

$$\text{Si } n=2 : \begin{cases} l=0 \\ l=1 \end{cases} \quad \text{et si } n=3 : \begin{cases} l=0 \\ l=1 \\ l=2 \end{cases}$$

Q18)



D'après la formule de Sommerfeld : $E_{n,l} = E_n - \frac{\alpha^2 R_y}{n^4} \left(\frac{n}{l+1} - \frac{3}{4} \right)$

avec $\frac{n}{l+1} \geq 1$ d'où $E_{n,l}$ décroît avec l

\Rightarrow Pour un n donné, le niveau de plus basse énergie est celui de l le plus élevé.

Soit $E_{2,l} = E_2 - \frac{\alpha^2 R_y}{16} \left(\frac{2}{l+1} - \frac{3}{4} \right) \Rightarrow \Delta E_l = -\frac{\alpha^2 R_y}{16} (1-2)$

$\Rightarrow \Delta E_l = \frac{\alpha^2 R_y}{16} = \underline{\underline{4,5283 \cdot 10^{-5} \text{ eV}}}$

$$Q19) \text{ Soit } \begin{cases} \Delta E_a = E_{31} - E_{20} \\ \Delta E_b = E_{31} - E_{21} \end{cases}$$

$$\text{D'où } \Delta E = E_{21} - E_{20} = \Delta E_f.$$

$$\Rightarrow hc \cdot \Delta\sigma = \Delta E_f$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta E_f = hc \cdot \Delta\sigma} \Leftrightarrow \underline{\Delta\sigma = \frac{\Delta E_f}{hc}} = \underline{0,36524 \text{ cm}^{-1}}$$

Q20)

$$\cdot \text{ Si } \sigma_m = 15237,40 \text{ cm}^{-1} \rightarrow \lambda_m = 656,2799 \text{ nm} : \underline{\text{ROUGE}}$$

$$\cdot \text{ Et } \frac{\Delta\sigma_{\text{exp}}}{\sigma_m} = 2,36 \cdot 10^{-5} \ll \frac{\Delta\sigma(\text{Na})}{\sigma} \Rightarrow \text{doublet plus fin que le sodium.}$$

Partie B - Radioactivité et effet tunnel (Mines 2016 - PC)

$$18) \text{ Soit } dP = |\psi|^2 dx \Rightarrow \boxed{[\psi] = L^{-1/2}}$$

19) On a 100% de chance de trouver l'e⁻ dans l'espace tout entier.

20) Soit $\rho = |\psi|^2$ représente la densité de probabilité de présence du quanton t, q

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

21) Particule non relativiste : $v/c \ll 1$

Soit $\psi(x,t) = \varphi(x)f(t) = \varphi(x)e^{-iEt/\hbar}$ par conséquent :

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + V\varphi = E\varphi \text{ où } \varphi = \varphi(x)}$$

$$\text{d'où } \underline{dP = |\psi|^2 dx = |\varphi|^2 dx} \text{ car } |f(t)|^2 = 1$$

$$22) \text{ On a } V(x) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{k^2} \varphi = 0$$

Comme $E = \hbar\omega > 0$ on a alors $\varphi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$

$$\Rightarrow \varphi = \underbrace{Ae^{i(kx - \omega t)}}_{\substack{\text{onde se propageant} \\ \text{vers } x > 0.}} + \underbrace{Be^{-i(kx + \omega t)}}_{\substack{\text{onde se propageant} \\ \text{vers } x \text{ négatifs}}}$$

23) En relation avec le cours sur les ondes :

$$\boxed{\vec{k} = \pm k\vec{e}_x \text{ où } k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}}$$

$$\text{Or } E = E_c = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Rightarrow \boxed{\vec{p} = \hbar\vec{k}}$$

24) En mécanique classique, une particule ne peut pas franchir une barrière énergétique plus haute que son énergie de départ. La particule serait donc réfléchi.

29) A.N.:

a	0,50 mm	1,00 mm	2,00 mm
qa	2,58	5,16	10,3
T	$2,27 \cdot 10^{-2}$	$1,32 \cdot 10^{-4}$	$4,38 \cdot 10^{-9}$

Pour la barrière épaisse : $qa \gg 1$ d'où $T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4t(V_0 - E)} \operatorname{sh}^2(qa)}$

est t.q $\begin{cases} \operatorname{sh} qa \sim e^{qa} \\ \text{et} \\ e^{qa} \gg 1 \end{cases}$ d'où $T \sim \frac{4t(V_0 - E)}{V_0^2} \frac{1}{(e^{2qa}/2)^2}$

$$\Rightarrow T = \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2qa} \Rightarrow \ln T = \ln T_0 - 2qa$$

$T_0 = \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2}$

Remarquons que : $\frac{\partial T_0}{\partial E} = \frac{16}{V_0^2} (V_0 - 2E)$ d'où

E	0	$V_0/2$	V_0
$\partial T_0 / \partial E$	+	0	-
T_0	0	↗ ↘	0

au 4^e = 1,3.

A part aux positions extrêmes $|\ln T_0| \ll | -2qa | \Rightarrow \ln T \sim -2qa$

30) Soit $\frac{A}{Z} X \rightarrow \frac{4}{2} \text{He} + \frac{A-4}{Z-2} X$ d'où $V = \frac{(Z-2)e \cdot 2e}{4\pi\epsilon_0 x}$

$$\Rightarrow k = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0} = 4,7 \cdot 10^{-36} \text{C}^2$$

donc $V_0 = \frac{k}{4\pi\epsilon_0 x_0} = 1,18 \cdot 10^{-14} \text{J} = 74,4 \text{ MeV}$

Soit $\frac{k}{4\pi\epsilon_0 x_m} = E \Leftrightarrow x_m = \frac{k}{4\pi\epsilon_0 E} = 55 \text{ fm}$

Or $q = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar = 4 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-1} \Rightarrow q(x_m - x_0) = 250 \gg 1$
 \Rightarrow la barrière est dite épaisse

$$31) \text{ D'après 29) } \ln T \approx -2qa \Leftrightarrow T = e^{-2qa}$$

$$\text{donc } T(x+dx) = T(x) e^{-2q dx}$$

$$\Leftrightarrow \ln T(x+dx) = \ln T(x) - 2q dx$$

$$\Leftrightarrow d \ln T = -2q dx$$

$$\Leftrightarrow d \ln T = -2 \sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}} dx$$

$$\text{D'où } \ln T \approx -\frac{2}{\hbar} \int_{x_0}^{x_m} \sqrt{2m_x \left(\frac{\hbar^2 k^2}{4\pi^2 \epsilon_0 x} - E \right)} dx \quad \text{car } \ln T(x_0) \ll \ln T \text{ d'après 29)}$$

$$32) \text{ D'où } \ln T = -\frac{2}{\hbar} \int_{x_0}^{x_m} \sqrt{2m_x E} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{4\pi^2 \epsilon_0 x} \cdot \frac{1}{E} - 1 \right)^{1/2} dx \quad \text{où } E = \frac{\hbar^2 k^2}{4\pi^2 \epsilon_0 x_m}$$

$$\Leftrightarrow \ln T = -\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m_x E} \int_{x_0}^{x_m} \sqrt{\frac{x_m}{x} - 1} dx$$

$$\Leftrightarrow \ln T \approx -\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m_x E} \times x_m \left(\frac{\pi}{2} - 2 \sqrt{\frac{x_0}{x_m}} \right) \text{ d'après l'énoncé.}$$

$$\approx -\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m_x E} \cdot \frac{\hbar^2 k^2}{4\pi^2 \epsilon_0 E} \left(\frac{\pi}{2} - 2 \sqrt{x_0 \cdot \left(\frac{4\pi^2 \epsilon_0 E}{\hbar^2 k^2} \right)^{1/2}} \right)$$

$$\approx -\frac{1}{4\pi^2 \epsilon_0} \sqrt{\frac{2m_x}{E}} + \frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{2m_x x_0 k^2}{\pi \epsilon_0}}$$

$$\Leftrightarrow \ln T = a - \frac{b}{\sqrt{E}} \quad \text{où } \begin{cases} a = \frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{2m_x x_0 k^2}{\pi \epsilon_0}} \\ b = \frac{\hbar^2 k^2}{4\pi^2 \epsilon_0 \hbar} \end{cases}$$

$$33) \text{ Par définition : } t_m = \frac{2x_0}{v} \quad \text{où } E = \frac{1}{2} m_x v^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E}{m_x}}$$

$$\Rightarrow t_m = x_0 \sqrt{\frac{2m_x}{E}}$$

le nombre de rebond par unité de temps est :

$$n = \frac{1}{t_m} = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{E}{2m\alpha}}$$

- Pour un unique rebond, la probabilité d'émettre une particule est égale à T , avec $T \ll 1$
- Pour un nombre de rebonds $dN = n dt$ on a :

$$dP = dN \cdot T \Leftrightarrow dP = \frac{T}{t_m} dt.$$

- Soit $N(t)$ le nombre de particules à l'instant t .
et dM le nombre de désintégration entre t et $dt+t$ qui vérifie :

$$\begin{aligned} N(t+dt) - N(t) &= dM < 0. \\ &= -N(t) \cdot dP \\ &= -N(t) \cdot \frac{T}{t_m} dt \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \frac{dM}{N} = -\frac{T}{t_m} dt \Leftrightarrow M = N(0) e^{-T/t_m \cdot t}$$

$$\begin{aligned} \text{donc à } t_{1/2} : \frac{N(0)}{2} &= N(0) e^{-T/t_m \cdot t_{1/2}} \\ \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) &= -\frac{T}{t_m} \cdot t_{1/2} \\ \Leftrightarrow t_{1/2} &= \frac{t_m \ln 2}{T} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \ln t_{1/2} = \ln t_m - \ln T + \ln(\ln 2) \text{ avec } \ln T = a - b/\sqrt{E}$$

$$\Leftrightarrow \ln t_{1/2} = \ln t_m - a + \frac{b}{\sqrt{E}} + \ln(\ln 2)$$

$$\text{or } t_m = \text{cte d'où } \ln t_{1/2} = \text{cte} + \frac{b}{\sqrt{E}}$$

34) Sur le graphe proposé on vérifie bien que $\ln t_{1/2}$ est une loi affine en $\frac{1}{\sqrt{E}}$ avec une origine commune qui dépend de l'élément.