

Physique : DS2

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

Partie I – Vol de la balle

La tête de club est en réalité assimilable à une surface plane dont l'inclinaison avec la verticale varie en fonction du type de club. L'impact de cette surface avec la balle est un phénomène très violent et très bref. Typiquement, lors d'un coup frappé avec un club de type « driver » (vitesse de la tête de club d'environ $50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$), la balle passe d'une vitesse initiale nulle à environ $70 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ à la fin du contact avec la tête, qui dure $0,50 \text{ ms}$. Cependant l'inclinaison de la tête de club entraîne un glissement de la balle le long de celle-ci pendant l'impact, ce qui conduit à une mise en rotation de la balle. Ainsi une balle frappée avec un « driver » quitte le sol en effectuant de l'ordre de 60 rotations par seconde. Dans le cas d'un coup sans aucun « effet » l'axe de rotation de la balle est horizontal et perpendiculaire à sa vitesse à la sortie du club.

On s'intéresse dans cette partie à l'effet de la rotation de la balle sur sa trajectoire aérienne. Pour cela, on effectue un changement de référentiel en se plaçant dans un référentiel où le centre de la balle est immobile et l'air en écoulement. On considérera ce référentiel galiléen pour l'étude de l'écoulement de l'air.

L'air est en écoulement parfait, stationnaire, irrotationnel, homogène et incompressible et on notera ρ sa masse volumique. On néglige la gravité.

Afin de mettre en évidence l'importance de la rotation, on s'intéresse à un modèle d'écoulement autour d'un cylindre de longueur infinie, de rayon R , animé d'un mouvement de rotation autour de son axe (Oz) fixe, avec un vecteur-rotation $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z$ dans le référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ galiléen.

Loin du cylindre, en amont de celui-ci, l'écoulement a une vitesse uniforme, $\vec{v}_0 = -v_0 \vec{u}_x$, avec v_0 constante et positive. On repère un point M de l'espace par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe (Oz).

II.A – De quelles variables (r , θ , z et t) le champ de vitesse \vec{v} dépend-il ?

II.B – Quelles sont les deux conditions aux limites vérifiées par \vec{v} ?

On définit le potentiel des vitesses φ associé à l'écoulement par $\vec{v} = \text{grad} \varphi$ et on admet que

$$\varphi(r, \theta) = \left(-v_0 r - \frac{p}{2\pi r} \right) \cos \theta + R^2 \Omega \theta$$

où p est une constante qui sera définie dans la suite.

II.C – Justifier l'introduction du potentiel des vitesses φ .

II.D – Donner les expressions des composantes du champ de vitesse v_r et v_θ .

II.E – Vérifier les conditions aux limites et en déduire p en fonction de R et v_0 .

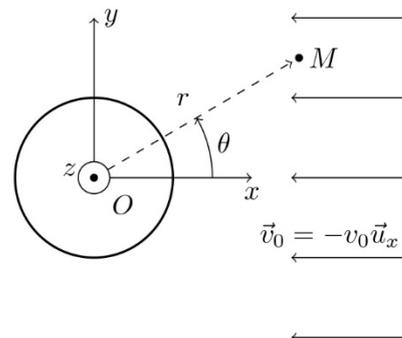


Figure 4

II.F – En déduire le champ de pression $P(r = R, \theta)$ à la surface du cylindre, en fonction de ρ , R , Ω , v_0 , θ et P_0 (valeur de la pression loin du cylindre, considérée uniforme).

II.G – En déduire, à l'aide d'un schéma clair et d'arguments de symétrie, que la résultante \vec{F}_p des forces de pression a une composante nulle selon \vec{u}_x .

II.H – En raisonnant sur une portion de cylindre de hauteur h , déterminer la force de pression \vec{F}_p selon \vec{u}_y et mettre finalement \vec{F}_p sous la forme $\vec{F}_p = \alpha \vec{v}_0 \wedge \vec{\Omega}$ en exprimant la constante α en fonction des données. On pourra utiliser $\int_0^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta = 0$ et $\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \pi$.

II.I – Applications

On admet que le résultat ci-dessus se transpose à une balle de golf, à condition de prendre pour le coefficient α une valeur appropriée.

II.I.1) Commenter la direction et le sens de la force \vec{F}_p selon que le golfeur a correctement frappé la balle ($\Omega > 0$)... ou a totalement raté son coup ($\Omega < 0$).

II.I.2) Calculer la norme de cette force au départ d'un coup de « driver » : $\Omega = 3,8 \times 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_0 = 70 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\alpha \approx 1,5 \times 10^{-5}$ (S.I.). Commenter, sachant que la balle a une masse $M_b = 46 \text{ g}$.

II.I.3) Que risque le golfeur si, à cause d'un swing imparfait, le vecteur-rotation n'est pas tout à fait porté par \vec{u}_z ?

II.I.4) Quel phénomène négligé ici faudrait-il prendre en compte pour une description complète des forces subies par la balle ? Quelle est sa conséquence sur la vitesse et la rotation de la balle au cours de son vol ?

Partie II – Physique du cavitron

En phase liquide, les molécules exercent entre elles des forces attractives (assurant entre autres la cohésion du liquide) qui permettent au liquide de supporter des forces de traction équivalentes à des pressions négatives.

La vie d'un arbre suppose une montée efficace de la sève (assimilée dans toute la suite à de l'eau) sur une hauteur qui peut atteindre quelques dizaines de mètres. Ceci conduit à l'existence de zones de pression négative, où l'état liquide de l'eau est métastable : sous l'effet d'une petite perturbation, des bulles de vapeur d'eau peuvent se former. Ceci se produit significativement lorsqu'un arbre subit un stress hydrique associant une forte évaporation (due à un fort ensoleillement) et une faible ressource en eau (due à des sols desséchés). La circulation de la sève est alors gênée par la formation de bulles de gaz au sein de l'écoulement. Pour tester quantitativement la sensibilité des espèces au stress hydrique, des chercheurs de l'INRA ont mis au point un dispositif appelé CAVITRON.

I.A. — Pressions négatives

□ 1 — Exprimer la pression p dans un arbre assimilé à une colonne d'eau verticale emprisonnée dans un tube fermé au sommet, supposée en équilibre mécanique sous l'effet des seules forces de pression et de pesanteur, en fonction de la masse volumique ρ_e de l'eau, de la cote z mesurée à partir du sol, de l'intensité de la pesanteur g et de la pression p_0 imposée par l'atmosphère au niveau du sol via les racines. Calculer l'altitude z_m à partir de laquelle la pression devient négative. Commenter la valeur obtenue.

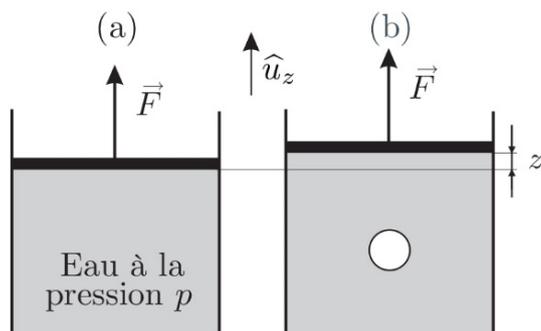


FIGURE 1 – Cylindre vertical

Pour les questions 2 à 5 on ne prendra en compte ni \vec{g} ni p_0 . Sur la figure 1(a), on envisage un volume V d'eau en équilibre dans un cylindre d'axe (O, \hat{u}_z) et de section S , fermé par un piston de surface S et de masse nulle sur lequel un opérateur exerce lentement une force de traction $\vec{F} = F \hat{u}_z$ avec $F > 0$ et \hat{u}_z vertical ascendant.

□ 2 — Exprimer la pression dans l'eau en fonction de F et S . Quel est son signe ?

L'opérateur veut créer au sein de l'eau liquide, une bulle de vapeur d'eau sphérique de rayon r en tirant le piston sur une hauteur z et en maintenant la force \vec{F} constante 1(b). On néglige la quantité d'eau contenue dans la bulle devant V , ce qui revient à l'assimiler à une bulle de vide.

□ 3 — On considère le système constitué d'une bulle vide de rayon r et de l'interface qui la sépare de l'eau à la pression p . Exprimer le travail infinitésimal δW_p des forces de pression quand le rayon de la bulle passe de r à $r + dr$. En déduire l'expression de la contribution des forces pressantes à l'énergie potentielle E_p du système.

On admet qu'il convient d'ajouter à cette énergie potentielle une énergie potentielle de tension superficielle de la forme $\gamma_e \Sigma$ où Σ est l'aire de l'interface entre l'eau liquide et l'eau vapeur et où la constante positive γ_e est le coefficient de tension superficielle de l'eau.

▣ 4 — Montrer que l'énergie potentielle totale du système s'exprime sous la forme d'un polynôme de degré 3 en r dont on précisera les coefficients. Montrer qu'elle admet un maximum en $r_c = -2\gamma_e/p$. On pose $x = r/r_c$ et $E_a = E_p(r_c)$. Calculer r_c et E_a pour $p = -2,0$ MPa. Tracer la courbe $\epsilon(x) = E_p(x)/E_a$ pour $x \in [0,2]$.

▣ 5 — Ce modèle n'est évidemment valide que pour $r < r_b$ où r_b est le rayon de la bulle que l'on considèrera égal à $2r_c$. Montrer que dans le cadre de ce modèle, l'état liquide sans bulle est un état d'équilibre stable mais qu'il n'est pas le plus stable : on dit qu'il est métastable. Quelle énergie faut-il apporter au système pour qu'il évolue spontanément vers l'équilibre le plus stable ? Quel est cet état ? Cette évolution est-elle envisageable si $p = -2,0$ MPa ?

I.B. — Conductance hydraulique

On envisage un écoulement d'eau, de masse volumique ρ_e et de viscosité dynamique η_e , dans un tuyau cylindrique d'axe (O, \hat{u}_x) horizontal, de longueur $2R$ et de section circulaire de rayon a . Les faces d'entrée et de sortie de ce cylindre sont centrées sur les points $A_1(x = -R)$ et $A_2(x = R)$ de l'axe (O, \hat{u}_x) où l'on impose respectivement des pressions p_1 et p_2 . L'ensemble est représenté sur la figure 2(a). On repère un point M dans l'eau par ses coordonnées cylindriques (r, θ, x) d'axe (O, \hat{u}_x) , avec $-R < x < R$, $0 < r < a$ et $0 < \theta < 2\pi$. Lorsque l'on impose une différence de pression $p_1 - p_2$ positive et constante, un écoulement d'eau incompressible et stationnaire apparaît. Cet écoulement est décrit par un champ des vitesses $\vec{v} = v(r, x) \hat{u}_x$ indépendant de θ et un champ de pression $p(x)$ indépendant de r et θ .

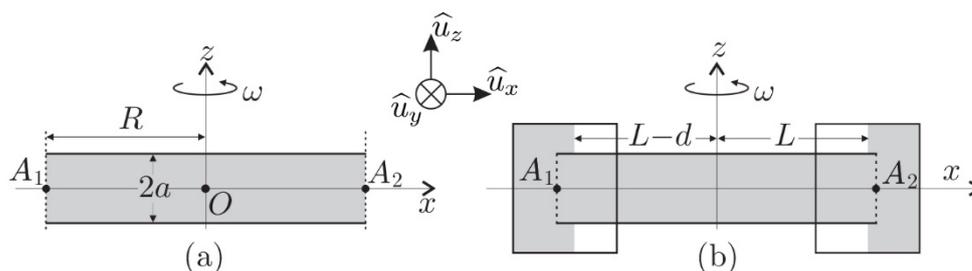


FIGURE 2 – Cylindre horizontal

Dans toute la partie I.B, on considère ce cylindre sans rotation, soit $\omega = 0$.

▣ 6 — Montrer que $v(r, x)$ est indépendant de x . On le notera $v(r)$ dans la suite.

On s'intéresse au système fermé (\mathcal{S}_r) constitué du fluide compris à l'instant t dans le cylindre d'axe (O, \hat{u}_x) et de rayon $r < a$, entre les abscisses x et $x + dx$. Le fluide situé au delà de r exerce sur la surface latérale de (\mathcal{S}_r) une force surfacique tangentielle de la forme :

$$\frac{d\vec{F}}{dS} = \epsilon \eta_e \frac{\partial v}{\partial r} \hat{u}_x \text{ où } \eta_e \text{ est la viscosité dynamique de l'eau et } \epsilon = \pm 1.$$

▣ 7 — Indiquer, en justifiant qualitativement la réponse, le choix du signe de ϵ correspondant à la situation étudiée. Exprimer la résultante des forces de viscosité sur (\mathcal{S}_r) . Justifier *sans calcul* que la quantité de mouvement du système (\mathcal{S}_r) est indépendante du temps. En déduire la relation :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{2\eta_e}{r} \frac{\partial v}{\partial r}$$

Justifier le fait que $\frac{dp}{dx}$ est une constante. En déduire l'expression de $p(x)$ en fonction de p_1 , p_2 , x et R .

On définit la conductance hydraulique $G_H = \frac{D_V}{p_1 - p_2}$ du tuyau, où D_V est le débit volumique.

▣ 8 — Dédire des questions précédentes l'expression de $v(r)$ en fonction de r , η_e , p_1 , p_2 , a et R . Exprimer G_H en fonction de η_e , R et a .

▣ 9 — Exprimer la vitesse moyenne $\bar{v} = \frac{D_V}{\pi a^2}$ en fonction de a , p_1 , p_2 , R et η_e . Vérifier que la force de viscosité subie par la tranche d'eau située à l'instant t dans le tuyau entre les abscisses x et $x + dx$ s'écrit :

$$d\vec{F} = -8\pi \eta_e \bar{v} dx \hat{u}_x \quad (1)$$

▣ 10 — Calculer \bar{v} et le nombre de REYNOLDS Re pour $a = 0,02$ mm (rayon typique des canaux dans lesquels la sève s'écoule), $p_1 - p_2 = 10^5$ Pa et $R = 0,4$ m. Que peut-on en conclure sur la nature de l'écoulement ?

I.C. — Le cavitron

Pour tester les effets du stress hydrique sur la conductance, on coupe une branche d'arbre quasi-rectiligne de longueur $2R$ que l'on met en communication avec deux récipients contenant de l'eau, non représentés sur la figure 2(a), dans des conditions telles que la pression aux extrémités $x = -R$ et $x = +R$ de la branche vaut toujours $p_1 = p(x = -R)$ et $p_2 = p(x = +R)$. On fait maintenant tourner l'ensemble autour de l'axe (O, \hat{u}_z) avec une vitesse angulaire $\omega > 0$ constante et suffisamment élevée pour que la pesanteur soit négligeable dans l'écoulement. On assimile la branche à un unique canal cylindrique d'axe (O, \hat{u}_x) et de rayon a dans lequel s'écoule la sève toujours assimilée à de l'eau.

▣ 11 — On étudie le mouvement de l'eau dans le référentiel (\mathcal{R}_b) solidaire de la branche. Soit une particule de fluide de masse $dm = \rho_e d\tau$, d'abscisse x et de vecteur vitesse $v \hat{u}_x$ dans le référentiel (\mathcal{R}_b) . Donner les expressions de la force d'inertie d'entraînement volumique \vec{f}_{ie} et de la force d'inertie de CORIOLIS volumique \vec{f}_{ic} subie par cette particule. Représenter ces forces sur une figure dans deux cas d'abscisses opposées.

On adopte désormais pour l'écoulement de l'eau dans la branche d'arbre en rotation un modèle semblable à celui introduit à la question 9. On fait l'hypothèse que le champ de pression ne dépend que de x , que l'écoulement est uniforme de vitesse $\bar{v} \hat{u}_x$ et que la paroi exerce sur la tranche de fluide située entre x et $x + dx$ une force de viscosité donnée par la relation (1).

▣ 12 — Montrer que la pression dans le domaine $x > 0$ s'écrit :

$$p(x > 0) = p_2 - \frac{\rho_e \omega^2 (R^2 - x^2)}{2} - \frac{8 \eta_e \bar{v} (x - R)}{a^2}$$

On montre de manière analogue (travail non demandé) que :

$$p(x < 0) = p_1 - \frac{\rho_e \omega^2 (R^2 - x^2)}{2} - \frac{8 \eta_e \bar{v} (x + R)}{a^2}$$

▣ 13 — En déduire les expressions de $p(x = 0)$ et \bar{v} en fonction de p_1 , p_2 , ρ_e , η_e , ω et R . Vérifier que la rotation est sans effet sur la conductance hydraulique G_H de la branche.

Pour imposer les pressions p_1 et p_2 , on place aux extrémités de la branche des réservoirs remplis partiellement d'eau avec des quantités légèrement différentes. Ces réservoirs sont solidaires de la branche en rotation à vitesse angulaire ω .

Lorsque l'équilibre est établi, la surface libre de l'eau dans les réservoirs devient verticale du fait des forces d'inertie. La branche, les réservoirs et la présence d'eau indiquée en gris sont représentés sur la figure 2(b).

On crée des ouvertures – non représentées sur la figure 2(b) – dans les réservoirs vers l'atmosphère, de telle sorte que l'air – qui occupe la partie des réservoirs non occupée par l'eau – impose la pression p_0 respectivement en $x_1 = -L + d$ et en $x_2 = L$ avec $L < R$ et $0 < d \ll L$. On mesure alors par une méthode optique le débit volumique en suivant l'évolution de la surface libre de l'eau dans l'un des réservoirs. Cette évolution est suffisamment lente au cours de l'expérience pour que l'on puisse supposer que les pressions p_1 et p_2 sont constantes.

▣ **14** — Exprimer p_1 et p_2 en fonction de ρ_e , p_0 , ω , L , R et d en supposant que l'eau est quasiment en équilibre relatif dans les réservoirs tournants. Vérifier que $p_1 - p_2 = \rho_e \omega^2 L d$ dans l'approximation $d \ll L$.

La figure 3 représente l'allure du graphe de la perte de conductance relative

$$\delta_G = 1 - \frac{G_H(\omega)}{G_H(\omega = 0)}$$

en fonction du paramètre $\Delta p = -\rho_e \omega^2 L^2$ mesuré en mégapascals dans un CAVITRON tel que $d = 1$ cm, $L = 0,3$ m pour une branche telle que $R = 0,4$ m.

▣ **15** — Calculer la valeur de ω permettant de faire baisser la conductance de 50 %, valeur choisie comme limite « objective » du stress hydrique par les chercheurs de l'INRA. Calculer la valeur correspondante de la pression $p_1 - p_2$. Proposer une interprétation sommaire de la baisse de conductance hydraulique lorsque des bulles de gaz se forment.

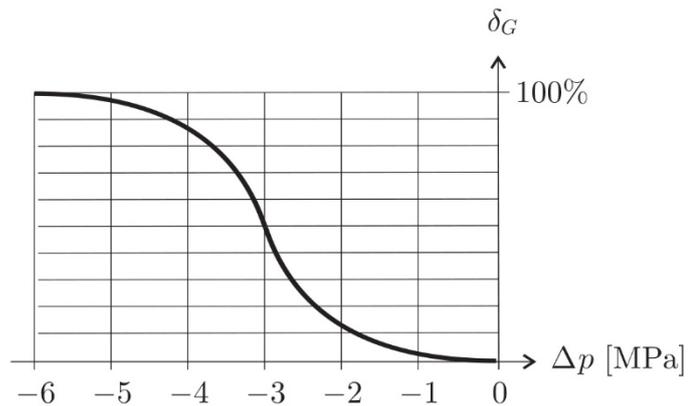


FIGURE 3 – Perte de conductance relative

Partie III – Etude de la couche limite

Une étude dynamique de la couche limite

Ce problème met en jeu la notion de couche limite qui intervient lorsqu'on étudie les écoulements laminares, à nombres de Reynolds néanmoins importants, autour d'un solide. Cette couche assure le raccordement entre la solution d'écoulement parfait qui prévaut loin du corps et la condition de vitesse nulle sur les parois. L'étude simplifiée proposée repose sur les travaux de deux physiciens allemands spécialistes en mécanique des fluides.

- Ludwig Prandtl (1875-1953) qui introduisit en 1904 la notion de couche limite dans l'écoulement d'un fluide autour d'un obstacle. Ses travaux le conduisirent également à établir la théorie hydrodynamique de l'aile portante d'envergure infinie dans un fluide parfait.
- Heinrich Blasius (1883-1970) qui publia de nombreux mémoires sur les écoulements de fluides visqueux autour d'obstacles et dans les tuyaux cylindriques.

Formulaire : équation de Navier-Stokes d'un fluide newtonien visqueux incompressible

$$\mu \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right] = \mu \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \eta \Delta \vec{v}$$

I Préliminaire

On s'intéresse à un régime variable d'écoulement au sein d'un fluide visqueux et incompressible dont le champ des vitesses s'écrit $\vec{v} = v_x(y, t) \vec{u}_x$. L'axe Ox est horizontal et la pression ne dépend pas de x . Cela peut, par exemple, concerner le régime transitoire d'accès à un écoulement stationnaire de cisaillement simple.

I.A – Rappeler, en introduisant la viscosité dynamique η dont on indiquera l'unité S.I., l'expression de la force de viscosité exercée, au niveau de la surface élémentaire d'aire dS et de normale \vec{u}_y , par la portion de fluide d'abscisses supérieures à y sur la portion de fluide d'abscisses inférieures à y .

On dit que cette force traduit un transfert diffusif de quantité de mouvement. Préciser cette notion en soulignant en quoi cela diffère d'un transfert convectif. Quel phénomène simple explique le brassage moléculaire qui est à l'origine de cette diffusion ?

I.B – Établir l'expression $d\vec{F}_{\text{visc}}$ de la résultante des forces de viscosité agissant sur l'élément de volume $d\tau$ défini par les intervalles $(x, x + dx)$, $(y, y + dy)$, $(z, z + dz)$.

I.C –

I.C.1) Écrire la relation fondamentale de la dynamique appliquée à la particule de fluide de volume $d\tau$ et constater que l'on retrouve l'équation de Navier-Stokes dans le cas particulier d'écoulement envisagé.

En cas d'échec à cette question (en particulier si l'on n'a pas répondu à la **question I.B**) on poursuivra en utilisant l'équation de Navier-Stokes proposée dans le formulaire dont on donnera toutefois la signification des différents termes.

I.C.2) En projetant cette équation sur \vec{u}_x , obtenir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $v_x(y, t)$ appelée équation de diffusion. Lui donner une forme remarquable commune à toutes les équations de diffusion en introduisant la diffusivité de quantité de mouvement ou viscosité cinématique ν que l'on exprimera à l'aide de η et de la masse volumique μ . Quelle est l'unité S.I. de ν ?

I.D – En quoi le phénomène de diffusion est-il irréversible et comment cela est-il pris en compte dans l'équation de diffusion ? Donner une autre forme d'équations aux dérivées partielles régissant des phénomènes réversibles que l'on nommera.

I.E – Grâce à l'équation de diffusion, établir un lien très simple entre la viscosité cinématique ν , la distance caractéristique selon Oy : L_y , et la durée caractéristique τ du phénomène de diffusion. (On pourra exploiter un raisonnement en ordre de grandeur ou une analyse dimensionnelle.)

II Ordre de grandeur de l'épaisseur d'une couche limite

On se propose d'évaluer l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite (affectée par la viscosité) au voisinage d'une plaque plane sur laquelle arrive un écoulement laminaire uniforme de vitesse $\vec{U} = U\vec{x}$ parallèle à la plaque.

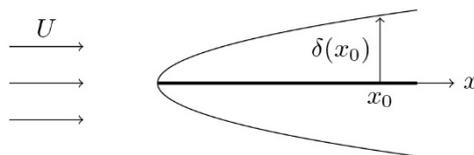


Figure 1

Cette zone qui assure le raccordement entre la condition de vitesse nulle contre la plaque et l'écoulement uniforme, s'établit par diffusion perpendiculairement à la plaque à partir du moment où le fluide aborde l'extrémité de celle-ci.

Estimer l'ordre de grandeur $\delta(x_0)$ de l'épaisseur de la couche limite en exploitant le résultat de la **question I.E** et en tenant compte du fait que lorsque le fluide atteint l'abscisse x_0 (à partir de l'extrémité de la plaque), le phénomène diffusif perpendiculairement à la plaque, s'est déjà produit pendant la durée x_0/U .

Rappeler l'expression du nombre de Reynolds si l'on prend x_0 comme dimension caractéristique d'écoulement : Re_{x_0} .

Exprimer $\delta(x_0)/x_0$ à l'aide de Re_{x_0} .

Proposer alors un critère de pertinence pour l'utilisation de la notion de couche limite.

III Cas d'un écoulement de Poiseuille plan

On considère maintenant l'écoulement d'un fluide visqueux entre deux plans horizontaux d'abscisses $y = -d/2$ et $y = +d/2$. L'axe horizontal Ox définit la direction et le sens de l'écoulement tandis que l'axe Oy est vertical ascendant : $\vec{g} = -g\vec{y}$.

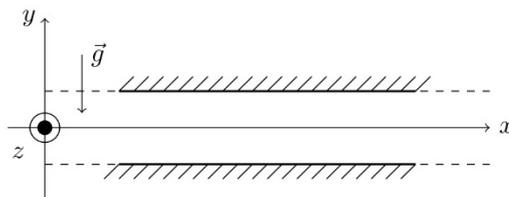


Figure 2

III.A – On considère une zone suffisamment éloignée de l'extrémité par laquelle le fluide aborde le dispositif pour ignorer tout phénomène d'entrée et faire comme si les parois étaient illimitées. On étudie alors un écoulement stationnaire caractérisé par le champ des vitesses $\vec{v} = v_x(y)\vec{u}_x$ et un champ de pression $p(x, y)$.

III.A.1)

a) Écrire l'équation locale du mouvement en mettant à profit le résultat de la **question I.B** (ou en exploitant l'équation donnée dans le formulaire). La projeter sur \vec{u}_x et \vec{u}_y .

b) En déduire que $\partial p / \partial x = K$ (constante).

c) Donner la loi $v_x(y)$ en fonction de K , η , y et d . Montrer que le profil des vitesses est parabolique.

III.A.2) On note $\Delta p = p(x, y) - p(x + L, y)$ la différence de pression qui doit exister entre deux points de même altitude et distants de L selon Ox pour maintenir cet écoulement.

Établir l'expression du débit volumique D_V à travers une section de largeur h selon Oz en fonction de Δp , L , h , d et η .

Avec quelle loi électrique la relation entre Δp et D_V suggère-t-elle une analogie? Introduire une résistance hydraulique.

III.A.3) Si, en maintenant Δp , on divise d par 2, que devient le débit?

Quel débit total circule alors à travers deux dispositifs identiques d'épaisseur $d/2$, chacun étant soumis à la différence de pression Δp sur une longueur L ?

En déduire une différence importante avec la notion de résistance électrique.

III.B – On examine maintenant le phénomène d'entrée dans le dispositif précédent. Un fluide en écoulement laminaire uniforme de vitesse $\vec{U} = U\vec{u}_x$ pénètre dans l'intervalle situé entre deux plaques planes parallèles au plan xOz , distantes de d .

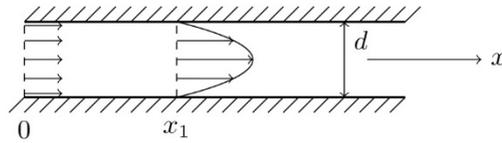


Figure 3

En exploitant le phénomène de croissance de couche limite à partir de l'arête de chaque plaque (cf. partie II), évaluer en fonction de U , d et ν , la distance x_1 parcourue par le fluide depuis son entrée dans le dispositif avant que s'établisse le profil parabolique de vitesse.

Montrer qu'on peut exprimer le rapport x_1/d à l'aide du nombre de Reynolds si l'on choisit judicieusement la dimension caractéristique de l'écoulement.

IV Équation du mouvement dans la couche limite

On considère un écoulement laminaire stationnaire et incompressible, près d'une plaque plane horizontale $y = 0$, à nombre de Reynolds grand devant 1, de façon que la notion de couche limite ait un sens. On se limite au cas d'un écoulement uniforme hors de la couche limite : $\vec{v}_{\text{ext}} = U\vec{u}_x$. Le fluide a la masse volumique μ et la viscosité dynamique η . On adopte le modèle d'un écoulement bidimensionnel dans la couche limite, caractérisé par le champ des vitesses $\vec{v} = v_x(x, y)\vec{u}_x + v_y(x, y)\vec{u}_y$ et le champ de pression $p(x, y)$.

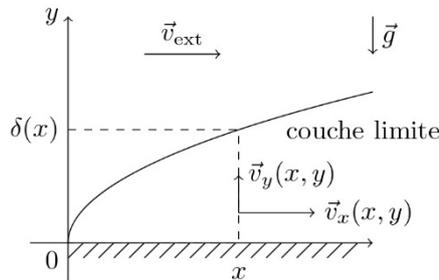


Figure 4

On admettra que, dans ce cas, la résultante des forces de viscosité agissant sur un élément de volume $d\tau$ s'écrit $d\vec{F}_{\text{visc}} = \eta(\Delta v_x \vec{u}_x + \Delta v_y \vec{u}_y) d\tau$.

IV.A – Écrire l'équation traduisant l'incompressibilité.

IV.B – Écrire les projections sur \vec{u}_x et \vec{u}_y de l'équation fondamentale de la dynamique en utilisant les constantes μ , ν et g .

IV.C – *Raisonnement sur les ordres de grandeur*

Pour évaluer (dans la couche limite) l'ordre de grandeur de la dérivée d'une grandeur par rapport à x , on considère le quotient de cette grandeur par x_0 (valeur « typique » de x) et pour la dérivée d'une grandeur par rapport à y , on considère le quotient de cette grandeur par $\delta(x_0)$ (épaisseur de couche limite en x_0).

Exemples : $\partial v_x / \partial x$ de l'ordre de v_x / x_0 , $\partial v_x / \partial y$ de l'ordre de $v_x / \delta(x_0)$.

IV.C.1) En utilisant l'équation obtenue au **IV.A**, relier les ordres de grandeur de v_x et v_y au nombre de Reynolds Re_{x_0} . En déduire que $v_y \ll v_x$.

IV.C.2) Montrer également que

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}$$

IV.C.3) Montrer que

$$v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad \text{et} \quad v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

sont du même ordre de grandeur.

Montrer, en se plaçant au bord extérieur de la couche limite, où v_x est de l'ordre de U que

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

est du même ordre que les deux termes précédents.

IV.C.4) Réécrire les équations du **IV.B** en les simplifiant grâce à **IV.C.2**. On admettra que la faiblesse de v_y (en comparaison à v_x) conduit à ignorer toutes les dérivées partielles de v_y lors de la projection sur \vec{u}_y . En déduire que

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx -\mu g$$

IV.D – Puisque la couche limite est très étroite en altitude, et compte tenu de la relation précédente, la pression p , à x donné, a quasiment la même valeur qu'à l'extérieur immédiat de cette couche. Hors de la couche limite (on rappelle que l'écoulement y est parfait) la pression dépend-t-elle de x ?

Que dire alors de $\frac{\partial p}{\partial x}$ dans la couche limite ?

En déduire l'équation :

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

Données numériques

- intensité de la pesanteur : $g = 1 \times 10^1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- masse volumique de l'eau : $\rho_e = 1 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- pression atmosphérique au niveau du sol : $p_0 = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$
- viscosité dynamique de l'eau : $\eta_e = 1 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$
- coefficient de tension superficielle de l'eau : $\gamma_e = 7 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$
- masse volumique de l'air : $\rho_a = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- viscosité dynamique de l'air : $\eta_a = 2 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$

Formulaire

Lois de Coulomb : Un solide en contact quasi-ponctuel sur un support subit de la part du support des actions de contact équivalentes à une force \vec{F} que l'on peut décomposer en une composante normale \vec{N} et une composante tangentielle \vec{T} .

En l'absence de glissement, on a $\|\vec{T}\| < f \|\vec{N}\|$ où f est le coefficient de frottement.

En présence de glissement, la composante tangentielle \vec{T} est dirigée dans la direction opposée à celle du vecteur-vitesse de glissement et on a $\|\vec{T}\| = f \|\vec{N}\|$.

Expression de la divergence d'un champ de vecteurs en coordonnées cylindriques
(r, θ, x)

$$\text{div } \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_x}{\partial x}$$