Physique : DM11

Q1) En appliquant le PFD : $m\vec{a} = \vec{F}_{exc} + \vec{P} + \underbrace{\vec{F}_d + \vec{F}_N}_{\vec{F}_{TOT}} + \vec{F}_R$

Le mouvement se fait suivant (Ox) d'où $m\ddot{y} = 0 \Leftrightarrow F_d + F_N = 0$

$$\Rightarrow \boxed{m\vec{a} = \vec{F}_{exc} + \vec{P} + \vec{F}_R}$$

Q2) On est dans le cas sans amortissement et sans excitation d'où $\vec{F}_R = -k(x - x_0)\vec{u}_x$

avec $x_0 = 0$ d'après l'énoncé : $\Rightarrow m\ddot{x} = -kx$

$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$$

Q3) On reconnaît une E.D d'un oscillateur harmonique

$$\Rightarrow x = A_0 \sin(\omega_0 t) + B_0 \cos(\omega_0 t) \text{ où } \boxed{\omega_0 = \sqrt{k/m}}$$

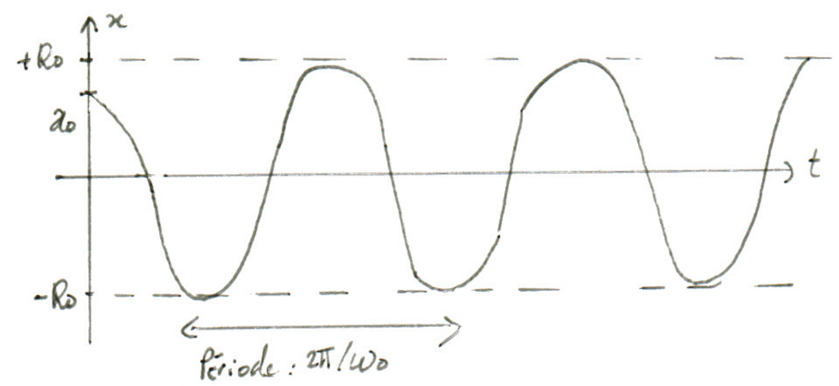
or $\begin{cases} x(0) = x_0 = B \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = A_0\omega_0 \end{cases}$ $\Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \dfrac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)}$

Q4) On pose $x(t) = R_0 \cos(\omega_0 t - \phi_0)$

$$= R_0 [\cos(\omega_0 t)\cos(\phi_0) + \sin(\omega_0 t)\sin(\phi_0)]$$

Par analogie : $\begin{cases} R_0 \cos \phi_0 = x_0 \\ R_0 \sin \phi_0 = \dot{x}_0/\omega_0 \end{cases}$ $\Rightarrow \boxed{\begin{cases} R_0^2 = x_0^2 + \left(\dfrac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)^2 \\ \tan \phi_0 = \dfrac{\dot{x}_0}{x_0\omega_0} \end{cases}}$

Q5)



Q6) Calculons $E(t)$:

. Par définition : $E = K + U$

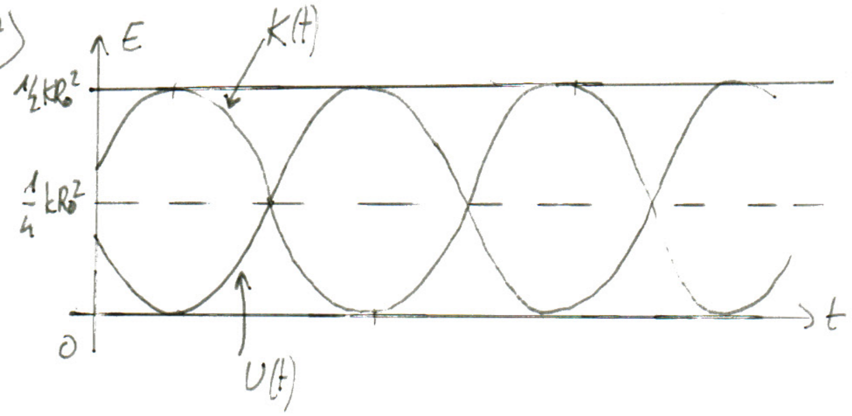
$$= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$= \frac{1}{2} k R_0^2 \cos^2(\omega_0 t - \phi_0) + \frac{1}{2} \underbrace{m \omega_0^2}_{k} \sin^2(\omega_0 t - \phi_0) . R_0^2$$

$$= \frac{1}{2} k R_0^2$$

. On remarque que l'énergie se conserve car il n'y a pas de forces non conservatives.

Q7)



Q8) On rajoute la force de frottement : $m\ddot{x} = -kx - \gamma \dot{x}$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{\gamma}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + 2\xi\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{où} \quad \begin{cases} \omega_0^2 = k/m \\ 2\xi\omega_0 = \gamma/m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{\gamma}{2m\omega_0} \Rightarrow \boxed{\xi = \frac{\gamma}{2\sqrt{km}}}$$

Q9) Soit la solution :

$$x(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left[A_d\cos(\omega_d t) + B_d\sin(\omega_d t)\right]$$

avec $\begin{cases} x(0) = x_0 = A_d. \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = \left[\omega_d B_d - \xi\omega_0 A_d\right] \end{cases}$

D'où : $B_d = \dfrac{\dot{x}_0 + \xi\omega_0 A_d}{\omega_d} = \dfrac{\dot{x}_0}{\omega_d} + \xi x_0 \dfrac{\omega_0}{\omega_d}$

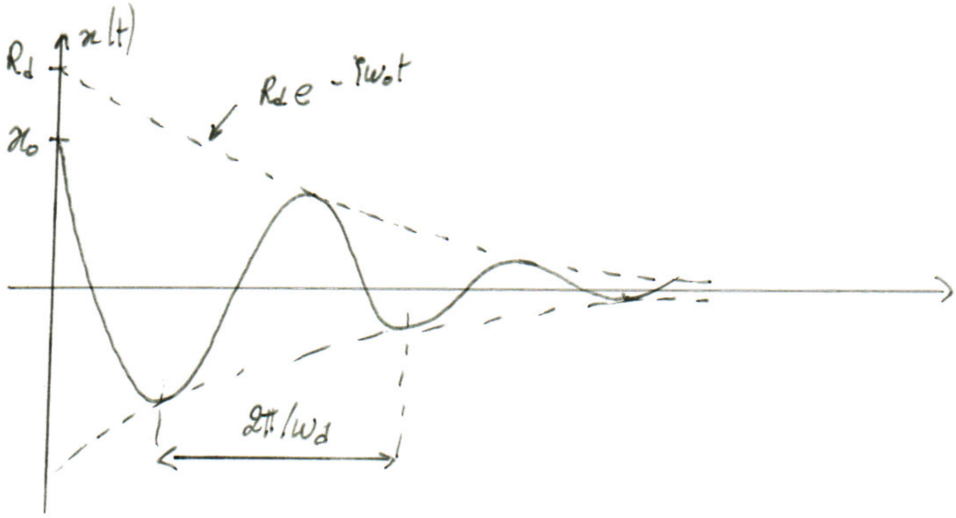
$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} A_d = x_0 \\ B_d = \dfrac{\dot{x}_0 + \xi x_0\omega_0}{\omega_d} \end{cases}}$$

Q10) Soit $x(t) = R_d\, e^{-\xi\omega_0 t}\cos(\omega_d t - \phi_d)$

$$= R_d\, e^{-\xi\omega_0 t}\left[\cos(\omega_d t)\cos\phi_d + \sin(\omega_d t)\sin\phi_d\right]$$

Par analogie : $\begin{cases} A_d = R_d\cos\phi_d \\ B_d = R_d\sin\phi_d \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} R_d^2 = A_d^2 + B_d^2 \\ \tan\phi_d = \dfrac{B_d}{A_d} \end{cases}}$

Q11)



Q12) Calculons $E(t)$

Soit $E(t) = K + U$

$$= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$= \frac{1}{2} m \left[R_d^2 e^{-2\xi\omega_0 t} \left(-\xi\omega_0 \cos(\omega_d t - \phi_d) - \omega_d \sin(\omega_d t - \phi_d) \right) \right]^2$$

$$+ \frac{1}{2} \underbrace{k}_{m\omega_0^2} R_d^2 e^{-2\xi\omega_0 t} \cos^2(\omega_d t - \phi_d)$$

$$= \frac{1}{2} m \, R_d^2 e^{-2\xi\omega_0 t} \left[\left((\xi\omega_0)^2 + \omega_0^2 \right) \cos^2(\omega_d t - \phi_d) + \overbrace{\omega_d^2}^{= \omega_0^2 - \xi^2\omega_0^2} \sin^2(\omega_d t - \phi_d) \right.$$
$$\left. + 2\xi\omega_0\omega_d \sin(\omega_d t - \phi_d) \cos(\omega_d t - \phi_d) \right]$$

$$= \frac{1}{2} m R_d^2 e^{-2\xi\omega_0 t} \left[\omega_0^2 + \xi^2\omega_0^2 \left(\cos^2(\omega_d t - \phi_d) - \sin^2(\omega_d t - \phi_d) \right) \right.$$
$$\left. + 2\xi\omega_0^2 \sqrt{1-\xi^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(2\omega_d t - 2\phi_d) \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{E(t) = \frac{1}{2} k R_d^2 e^{-2\xi\omega_0 t} \left[1 + \xi^2 \cos(2\omega_d t - 2\phi_d) + \xi\sqrt{1-\xi^2} \sin(2\omega_d t - 2\phi_d) \right]}$$

. Si $\xi = 0$: $E(t) = \frac{1}{2} k R_d^2$ on retrouve le cas sans frottement.

. Si $\xi = 1$: $E(t) = \frac{1}{2} R_d^2 e^{-2\omega_0 t} \left[1 + \cos(\underbrace{2\omega_d}_{=0} - 2\phi_d) \right]$

$= \frac{1}{2} R_d^2 e^{-2\omega_0 t}$, l'énergie décroît de façon exponentielle.

Q13) D'après le théorème de l'E_m : $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{nc}$.

$$\Leftrightarrow \frac{dE_m}{dt} = -\gamma \vec{v} \cdot \vec{v}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{dE_m}{dt} = -\gamma v^2 < 0$$ $\Rightarrow$ l'énergie décroît car les forces de frottement s'opposent au mouvement

Q14) Calculons $\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$:

Or $\begin{cases} x_1 = R_d e^{-\xi\omega_0 t_1}\cos(\omega_d t_1 - \phi_d) \\ x_2 = R_d e^{-\xi\omega_0 t_2}\cos(\omega_d t_2 - \phi_d) \end{cases}$

D'où $\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln\left[e^{-\xi\omega_0(t_1-t_2)}\right]$ où $t_2 = t_1 + \tau_d$.

$\Rightarrow \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \xi\omega_0\tau_d$. avec $\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$

Si $\xi \ll 1 \Rightarrow \boxed{\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \simeq 2\pi\xi}$

Q15) • D'après la figure proposée : $\begin{cases} x_2 = 0{,}010\,661\text{ m} \\ x_1 = 0{,}014\,602\text{ m} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{\xi \simeq 0{,}0501}}$

or $\xi \ll 1 \Rightarrow \omega_d \sim \omega_0 = \frac{2\pi}{t_2 - t_1} = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

D'où $k = \frac{4\pi^2}{(t_2-t_1)^2}\cdot m = \underline{\underline{2{,}71.10^5\ kg.s^{-2}}}$

• Pour finir : $\gamma = 2\xi\sqrt{km}$ d'après (Q8)

$\Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 1{,}73.10^4\ kg.s^{-1}}}$

• Lorsque ξ augmente, la décroissance sera plus rapide.

Q16) <u>On rajoute l'excitation</u>

Cette fois on peut écrire sur Ox : $m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + F_0\cos(\omega t)$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_0 t}$$

Q17) On utilise la notation complexe d'où :

$$-\omega^2\underline{X} + 2\xi\omega_0(j\omega)\underline{X} + \omega_0^2\underline{X} = \frac{F_0}{m}.$$

$$\Rightarrow \underline{X} = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2-\omega^2) + j.\,2\xi\omega_0\omega}$$

D'où : $\begin{cases} X = |\underline{X}| = \dfrac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2\omega^2}} \\ \tan\phi = -\dfrac{2\xi\omega_0\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \quad \text{(erreur de signe dans l'énoncé)} \end{cases}$

Q18) <u>Calculons M</u> :

$$M = \frac{X}{F_0/k} = \frac{k/m}{\sqrt{\ldots}} = \frac{\omega_0^2/\omega_0^2}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4\xi^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{M = \frac{1}{\sqrt{\underbrace{(1-r^2)^2+4\xi^2r^2}_{A}}}}$$

Q19) Cherchons la valeur de r qui rend M maximal en dérivant la qté A

$$\frac{dA}{dr} = 0 \Leftrightarrow -2r(2).(1-r^2) + 8\xi^2 r = 0 \Leftrightarrow (1-r^2) - 2\xi^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{r^2 = 1-2\xi^2} \quad \Rightarrow \boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}}$$

Q.20) Notre plateforme a une période de résonance de 4s ainsi $T \simeq 2T_0$. On est suffisamment loin pour <u>ne pas avoir le développement d'oscillations de grandes amplitudes.</u>