Physique : DM6

Le tore (Mines PSI 2014)

II - Conducteur

(6) ε_0 : permittivité du vide t.q $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\,Fm^{-1}$

(7) Soit : $\operatorname{div}\vec{j} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

or $\begin{cases} \operatorname{div}\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \\ \text{et } \vec{j} = \gamma\vec{E} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{div}\vec{j} = \rho\gamma/\varepsilon_0$

Donc $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho/\tau = 0$ ou $\tau = \dfrac{\varepsilon_0}{\gamma} = 10^{-19}\,s$

$\Rightarrow \rho = \rho(0)\, e^{-t/\tau}$ avec $\tau = 10^{-19}\,s$

$\Rightarrow \boxed{\rho \to 0 \text{ au bout de qqs } \tau}$

(8) Dans le cadre de l'ARQS magnétique $\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \ll \vec{j}$.

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}}$

En effet en ordre de grandeur $\begin{cases} \dfrac{B}{a} = \mu_0\left(j + \varepsilon_0 \dfrac{E}{T}\right) & (\alpha) \\ \text{et} \\ E/a = B/T \quad \left(\operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) & (\beta) \end{cases}$

or $\vec{j} = \gamma\vec{E} \Rightarrow \gamma \gg \dfrac{\varepsilon_0}{T} \Leftrightarrow \boxed{T \gg \tau}$

(9) En régime permanent : $\begin{cases} \operatorname{div}\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \to 0 \\ \operatorname{rot}\vec{E} = \vec{0} \end{cases}$

D'où $\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V \Rightarrow \boxed{\Delta V = 0}$

(10) Soit $\begin{cases} \dfrac{d^2V}{d\theta^2} = 0 \\ V(0) = U \\ V(\alpha) = 0 \end{cases} \Rightarrow V = A\theta + B \Rightarrow V = U + \dfrac{\theta(-U)}{\alpha}$

$\Rightarrow \boxed{V = U \dfrac{\alpha - \theta}{\alpha}}$

Donc $\vec{E} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \vec{E} = \dfrac{U}{\alpha r}\vec{u}_\theta \\ \text{et} \\ \vec{j} = \dfrac{\gamma U}{\alpha r}\vec{u}_\theta \end{cases}}$

(11) Soit $I = \iint \vec{j}\cdot\vec{dS}$

$\Leftrightarrow I = \dfrac{\gamma U}{\alpha}\displaystyle\int_a^b \dfrac{dr}{r}\int_0^c dz \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{\gamma c}{\alpha} U \ln\dfrac{b}{a} = I}$

$\boxed{\text{et } R = \dfrac{U}{I} = \dfrac{\alpha}{\gamma c}\dfrac{1}{\ln(b/a)}}$

(12) On a : $\boxed{R = \dfrac{L}{\gamma S}}$ or $\ln\dfrac{b}{a} = \ln\left(1 + \dfrac{b-a}{a}\right) \sim \dfrac{b-a}{a}$

d'où $R = \dfrac{\alpha}{\gamma c} \cdot \dfrac{a}{b-a}$

or $S = c(b-a) \Rightarrow R = \dfrac{\alpha}{\gamma}\dfrac{a}{S}$

et $L = \alpha a \Rightarrow \boxed{R \sim L/\gamma S}$ CQFD

III) Etude d'une pince ampèremétique

13) Dans le cas de l'ARQS magnétique on néglige les phénomènes de propagation t.q : $\tau \ll T$ où $\tau = \frac{a}{c}$ avec a : taille caractéristique du système

or (α) et (β) donnent
$$\frac{B}{a} = \mu_0\left(j + \varepsilon_0 \frac{Ba}{T^2}\right)$$
$$= \mu_0 j + \frac{Ba}{c^2T^2}$$
$$= \mu_0 j + Ba.\left(\frac{\tau}{T}\right)^2$$
$$\Rightarrow \frac{B}{a} = \mu_0 j \quad \text{si } \tau \ll T$$
$$\Rightarrow \boxed{\vec{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{si } \tau \ll T}$$

14) » On a invariance par révolution autour de Oz : $\Rightarrow B(r,z)$

» le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie d'où $\vec{B} = B(r,z)\vec{u}_\theta$

Donc $\oint_C \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 (i + N i_1)$
$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi r}(i + N i_1)\vec{u}_\theta}$$

15) Pour une spire : $\phi = \iint_S \vec{B}.\vec{dS} = \frac{\mu_0}{2\pi}(i + N i_1) \ln\left(\frac{b'}{a}\right).c$

d'où pour le tore : $\phi = \frac{\mu_0 N}{2\pi}(i + N i_1)\, c \ln(b'/a)$

or $\phi = L i_1 + M i$ d'où
$$\boxed{\begin{cases} L = NM = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} c \ln(b'/a) \\ M = \frac{\mu_0 N}{2\pi} c \ln(b'/a) \end{cases} \quad \text{où } b' = a + b}$$

(16) Soit $\lambda = \dfrac{dR}{d\ell}$

$\Rightarrow R = \lambda \ell$

$\Rightarrow R_p = N \times \lambda \times (2c + 2(b-a))$

$\Rightarrow \boxed{R_p = 2\lambda N (b+c-a)}$

(17) Soit $u = R_p i_1 + L \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di}{dt} = 0$ en circuit fermé.

$\Leftrightarrow R_p \underline{i}_1 + j\omega (L\underline{i}_1 + M\underline{i}) = 0 \Leftrightarrow \underline{i}_1 (R_p + jL\omega) = -Mj\omega \underline{i}$

$\Leftrightarrow \boxed{\dfrac{\underline{i}_1}{\underline{i}} = -\dfrac{jM\omega}{R_p + jL\omega} = \underline{H}}$

(18) Il faut que $\underline{i}_1 = k\underline{i}$ donc $\boxed{L\omega \gg R_p.}$

$\Leftrightarrow \omega \gg R_p/L$

Dans ce cas : $\boxed{\dfrac{i_1}{i} = -\dfrac{M}{L} = -N}$