

Physique : DM11

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats littéraux, et à souligner les applications numériques.

Partie I – Cuvette parabolöique

On désire étudier les mouvements possibles d'un point matériel M , de masse m , sous l'action du champ de pesanteur \mathbf{g} , à l'intérieur d'une cavité fixe que l'on suppose solidaire d'un référentiel terrestre R ($O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) supposé galiléen. La surface extérieure de cette cavité est un parabolöide de révolution P , d'axe vertical ascendant Oz , dont l'équation en coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) est $\rho^2 - az = 0$ avec $a > 0$ (Figure A-1).

Cette surface étant parfaitement lisse, le point matériel M glisse sans frottement sur P .

Compte tenu de la symétrie du problème, on utilisera les coordonnées cylindriques de M , la base de projection étant celle de R_c ($O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$) (Figure A-1).

On suppose la liaison unilatérale, c'est-à-dire que les coordonnées ρ et z de M satisfont à l'inégalité :

$$z \geq \frac{\rho^2}{a}$$

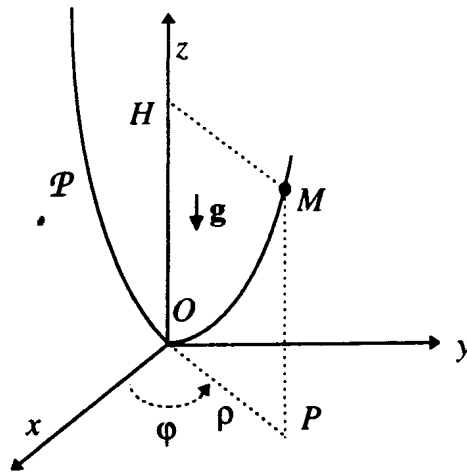


Figure A-1

1. Moment cinétique

- Exprimer, dans la base de R_c , la vitesse de M par rapport à R .
- Quelle est l'expression, dans la base de R_c , du moment cinétique en O , \vec{L}_O , par rapport à R ? En déduire sa projection selon l'axe Oz .
- Montrer que la réaction \vec{R} qu'exerce P sur M est contenue dans le plan OHP . En appliquant le théorème du moment cinétique en O , sous forme vectorielle, montrer que la projection de L_O sur Oz se conserve au cours du temps. Expliciter cette relation de conservation en fonction de φ et ρ . Dans la suite, pour simplifier l'écriture, on désignera par L cette constante.

2. Energie

- Quelle est, en fonction des coordonnées et de leurs dérivées, l'expression de l'énergie cinétique E_k de la particule M par rapport à R ?
- Justifier l'existence d'une énergie potentielle E_p dont dérivent les forces extérieures agissant sur M . Exprimer E_p en fonction de ρ en supposant que $E_p(0) = 0$.
- Que peut-on dire de l'énergie mécanique de M dans le champ de pesanteur ?

3. Discussion générale du mouvement

- Déduire de ce qui précède une équation du premier ordre, à une seule inconnue, de la forme :

$\frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + E_{p,ef}(\rho) = E_m$ où $G(\rho)$ est positif et sans dimension et où $E_{p,ef}(\rho)$ est une énergie potentielle effective.

Expliciter $G(\rho)$ et $E_{p,ef}(\rho)$.

- Représenter avec soin le graphe $E_{p,ef}(\rho)$. Montrer que $E_{p,ef}(\rho)$ passe par un minimum pour une valeur ρ_m de ρ que l'on exprimera en fonction de L , m , a et g , intensité du champ de pesanteur.
- Discuter, à l'aide du graphe $E_{p,ef}(\rho)$, de la nature du mouvement de M . En déduire que la trajectoire de M sur P est nécessairement tracée sur une région de P limitée par deux cercles définis à l'aide des constantes du mouvement et des données du problème. On se contentera d'indiquer quelle équation il conviendrait de résoudre pour déterminer ces deux cercles.

4. Etude de quelques mouvements particuliers

- A quelle condition sur L la trajectoire de M sur P est-elle une parabole méridienne ?
- Déterminer les conditions initiales auxquelles il faut satisfaire pour que la trajectoire de M sur P soit un cercle horizontal.
- Une petite perturbation écarte légèrement la coordonnée ρ de la valeur ρ_m pour laquelle $E_{p,ef}(\rho)$ est minimal. Montrer que $\varepsilon = \rho - \rho_m$ oscille avec une période que l'on calculera dans le cas où $\rho_m = 1$ m et $a = 2$ m. On rappelle que $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$.

5. Réalisation du contact

La force de réaction qu'exerce P sur M s'écrit : $\vec{R} = R\vec{e}_n$, \vec{e}_n étant le vecteur unitaire porté par la normale intérieure à P au point M .

Ecrire, sous forme vectorielle, la loi fondamentale appliquée au mouvement de M par rapport à R . En déduire, en projetant selon \vec{e}_n , que le contact ne peut être rompu.

6. Réalité du mouvement

L'expérience montre que la bille se stabilise finalement au fond de la cuvette, quelles que soient les conditions initiales du mouvement. Commenter à l'aide du graphe $E_{p,ef}(\rho)$.

Partie II - ATV

Automated Transfer Vehicle

Les véhicules de transfert automatique ou ATV (de l'anglais "Automated Transfer Vehicle") sont des vaisseaux spatiaux desservant la station spatiale internationale et chargés d'assurer son ravitaillement en énergie, matériaux et combustibles. De par leur nature, ils assurent et garantissent la viabilité et le fonctionnement de la station. En terme de défis techniques et de performances, ils constituent le plus ambitieux des projets de construction spatiale jamais entrepris en Europe.

Dans la suite de ce problème, nous ferons référence aux objets étudiés en utilisant leurs acronymes anglais : ATV pour Automated Transfert Vehicle (véhicule de transfert automatique), ISS pour International Space Station (station spatiale internationale).

Nous allons nous intéresser à quelques phases du voyage du troisième vaisseau de la série ATV, l'ATV-3 Edoardo Amaldi, et décrire quelques étapes majeures de son odyssée spatiale allant de son lancement par la fusée Ariane V à sa destruction lors de sa rentrée dans l'atmosphère.

L'ATV-3 Edoardo Amaldi a été lancé, par la dernière version du lanceur Ariane V, le 23 mars 2012, il a rejoint en moins de six jours l'ISS. Il s'y est arrimé le 29 mars. La manœuvre s'est déroulée à une vitesse de $28\,000\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ avec une précision meilleure que 10 cm. Il l'a quittée le 4 octobre 2012 pour se détruire, comme prévu, lors de sa phase de rentrée atmosphérique au-dessus du pacifique.

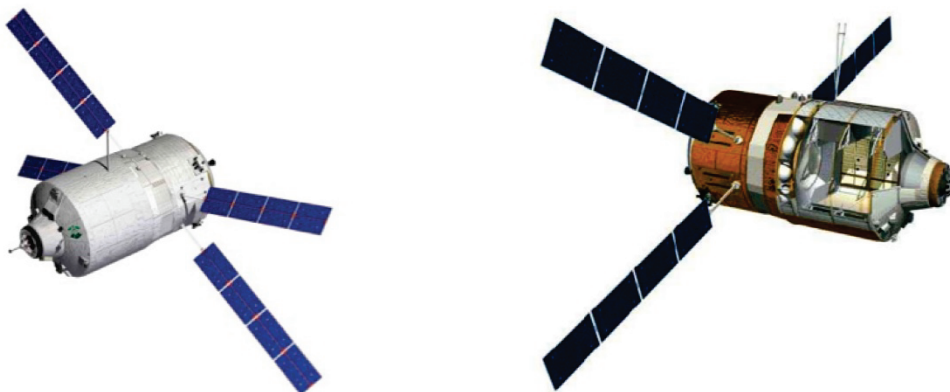


Figure 1 ATV-3 - Edoardo Amaldi

I L'orbite de l'ISS

L'ISS se trouve sur une orbite quasiment circulaire, à une altitude $d_s = 400,0\text{ km}$, dont le plan orbital forme un angle de $51,6^\circ$ avec le plan de l'équateur. Après une dizaine de minutes de vol, Ariane V libère l'ATV sur une première orbite circulaire, dite d'injection, d'altitude $d_i = 250,0\text{ km}$, située dans le même plan orbital que l'orbite de l'ISS. Puis l'ATV, en empruntant une orbite elliptique, rejoint l'orbite de l'ISS.

I.A – Préliminaires gravitationnels

La Terre est assimilée à un objet de symétrie sphérique de rayon R_T et de centre T . Pour suivre un point M de l'espace, on utilise le référentiel géocentrique de centre T et un système de coordonnées sphériques. M est repéré par le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{TM}$.

I.A.1) Rappeler les expressions de la force d'attraction gravitationnelle et de la force de Coulomb s'exerçant respectivement entre deux objets ponctuels de masses m, m' et de charges q, q' distants de r .

I.A.2) Le champ d'attraction gravitationnel créé par la Terre en M est noté $\vec{A}(\vec{r})$.

En raisonnant par analogie entre les forces gravitationnelles et coulombiennes, exprimer l'équivalent pour le champ $\vec{A}(\vec{r})$ du théorème de Gauss pour le champ électrique.

I.A.3) Démontrer que le champ d'attraction gravitationnel créé par la Terre s'exprime à l'extérieur de celle-ci, en un point M , sous la forme $\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{k}{r^3}\vec{r}$.

Déterminer l'expression de k en fonction de la masse de la Terre M_T , puis en fonction de la norme du champ de gravitation g_0 à la surface de la Terre et du rayon de la Terre R_T .

On donne $g_0 = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ et le rayon terrestre moyen $R_T = 6370 \text{ km}$.

I.B – L'orbite circulaire de l'ISS

I.B.1) Montrer qu'un mobile sans propulsion décrivant une trajectoire circulaire dans le champ de gravitation possède une vitesse uniforme.

I.B.2) Déterminer la vitesse et la vitesse angulaire de rotation du mobile en fonction du rayon de l'orbite et de k .

I.B.3) Retrouver la troisième loi de Kepler pour ce type d'orbite.

I.B.4) Exprimer l'énergie potentielle du mobile de masse m (référence d'énergie potentielle nulle à l'infini) en fonction du rayon de l'orbite. Faire de même pour l'énergie cinétique.

Quelle relation lie l'énergie cinétique et l'énergie potentielle ?

Ce résultat est connu sous le nom du théorème du viriel.

I.B.5) En déduire l'expression de l'énergie totale du mobile en fonction du rayon de son orbite.

I.B.6) Calculer la vitesse u_s , la vitesse angulaire ω_s , la période T_s et le rayon r_s de l'orbite de la station.

II La phase finale d'approche

II.A – La dérive d'approche

En pratique, pour des raisons de sécurité, l'ATV suit une orbite de transfert qui l'amène au point A_0 à une distance $L_0 = 300 \text{ km}$ derrière l'ISS sur une orbite circulaire d'altitude inférieure de $h = 10,0 \text{ km}$. On laisse ensuite dériver l'ATV jusqu'au point A_1 situé à une distance $L_1 = 30 \text{ km}$ de l'ISS. On appelle phase Φ , la différence de position angulaire entre l'ATV et l'ISS (voir **figure 2**). Les distances évoquées sont les abscisses curvilignes mesurant la position de l'ATV sur son orbite par rapport au point correspondant de coïncidence de phase avec l'ISS. Vu le rayon de l'orbite, la courbure peut être négligée.

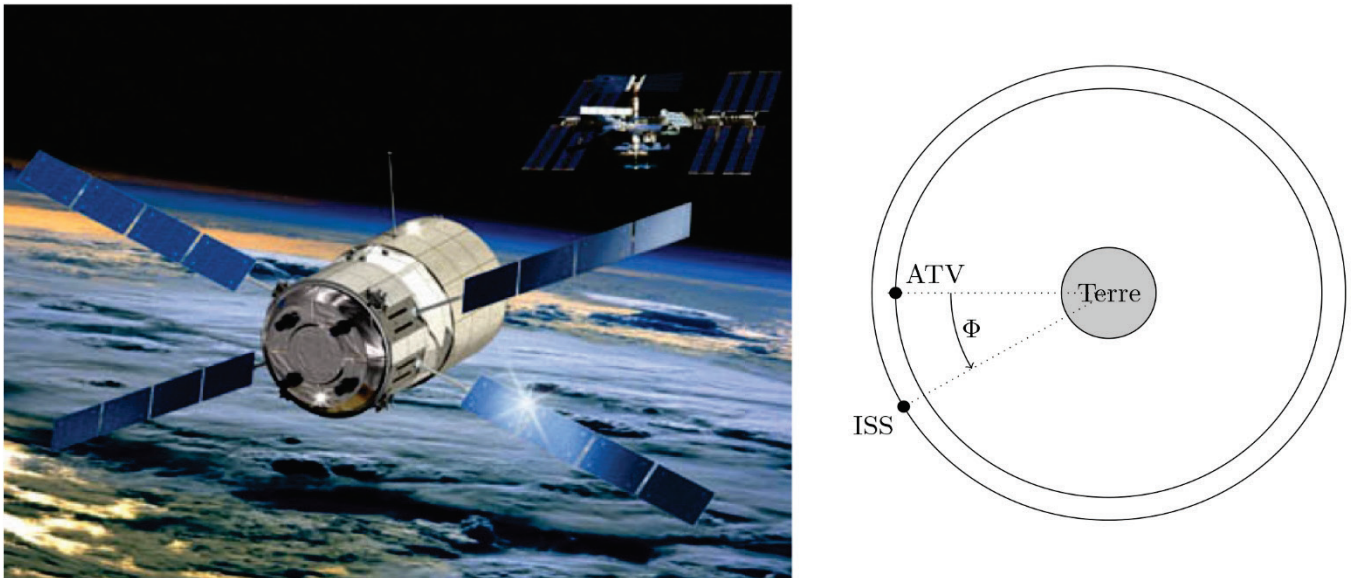


Figure 2 ATV-3 en phase d'approche

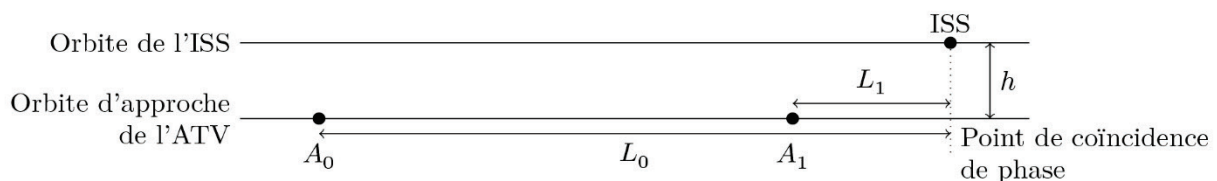


Figure 3

II.A.1) Quelle est la différence de phase entre ces deux positions A_0 et A_1 ?

II.A.2) En effectuant une analyse de premier ordre par rapport à h/r_s , exprimer la vitesse angulaire de l'ATV et en déduire la vitesse angulaire relative entre les deux mobiles en fonction de ω_s , r_s et h où ω_s et r_s sont les paramètres de l'ISS définis et déterminés dans la partie I.

II.A.3) En déduire le temps nécessaire pour passer de A_0 à A_1 .

Une fois en A_1 , l'ATV va accrocher en visuel l'ISS et se préparer pour son approche finale qui sera gérée en automatique.

II.B – La dynamique d'approche

Au-delà de la position A_1 les mouvements de l'ATV sont déterminés, estimés et mesurés par rapport à la station spatiale internationale. Nous effectuerons donc nos analyses dans le référentiel de repère orthonormé direct (x, y, z) lié à l'ISS dont l'axe z coïncide avec la radiale centre de la Terre-ISS et dont l'axe x est tangent à la trajectoire circulaire de l'ISS. On introduit le vecteur rotation $\vec{\omega}_s = \omega_s \vec{e}_y$.

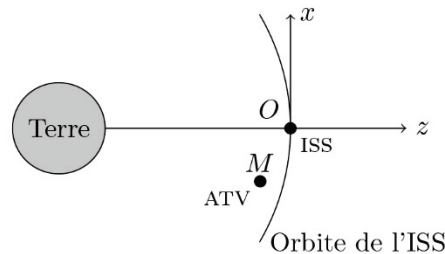


Figure 4

II.B.1) Quelle est la nature de ce référentiel si le référentiel géocentrique est considéré comme galiléen ?

II.B.2) L'ATV est considéré comme ponctuel, on néglige les forces d'attraction gravitationnelles entre l'ATV et l'ISS. Dans le référentiel d'étude, quelles sont les forces s'exerçant sur l'ATV ?

II.B.3) Démontrer que l'accélération d'entraînement de l'ATV peut se mettre sous la forme :

$$\vec{a}_e = -k \frac{\vec{TO}}{TO^3} + \vec{\omega}_s \wedge (\vec{\omega}_s \wedge \vec{OM})$$

II.B.4) En considérant le point M de coordonnées (x, y, z) dans le référentiel lié à l'ISS, déterminer une expression au premier ordre vis-à-vis des coordonnées de M de la quantité

$$\frac{\vec{TM}}{TM^3} - \frac{\vec{TO}}{TO^3}$$

On pourra chercher à établir une approximation sous forme vectorielle avant d'utiliser les coordonnées cartésiennes.

II.B.5) Écrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'ATV dans le référentiel de l'ISS, démontrer qu'il s'exprime alors sous la forme du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega_s \dot{z} = 0 \\ \ddot{y} + \omega_s^2 y = 0 \\ \ddot{z} - 2\omega_s \dot{x} - 3\omega_s^2 z = 0 \end{cases}$$

Ce sont les équations de Clohessy-Wiltshire¹.

II.B.6) On s'intéresse à la résolution du système précédent pour les conditions initiales à $t = 0$ de position $M = (x_0, 0, z_0)$ et de vitesse $\vec{v}_M = (\dot{x}_0, 0, \dot{z}_0)$. Montrer que $z(t)$ peut se mettre sous la forme

$$z(t) = A + B \cos(\omega_s t) + C \sin(\omega_s t)$$

et déterminer les expressions de A , B et C .

II.B.7) En déduire l'expression de $x(t)$ en fonction des conditions initiales $(x_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{z}_0)$ et de ω_s .

II.B.8) Le processus de dérive analysé en II.A vérifie théoriquement les équations de Clohessy-Wiltshire.

a) Si on envisage la dérive (mouvement parallèle à l'axe x), quelle relation vérifient les grandeurs ω_s , \dot{x}_0 et z_0 ? Que peut-on dire de \dot{z}_0 ?

b) En remplaçant dans la solution obtenue des équations de Clohessy-Wiltshire, vérifiez que le mouvement prévu est bien rectiligne.

¹ Clohessy W. H., Wiltshire R. S., Terminal Guidance for Satellite Rendezvous, *Journal of the Aerospace Sciences*, Vol 27, 1960, p. 653.

II.C – La phase d'approche radioguidée : du pre-homing au homing

Une fois arrivé en A_1 , l'Edoardo Amaldi active son processus de guidage automatique, il devient alors autonome et assure lui-même son contrôle de trajectoire en se repérant par laser (optique) et radio-guidage par rapport à la station spatiale. Le contrôle humain se limite à une commande d'échappement d'urgence si l'un des astronautes, spationautes ou cosmonautes juge une telle mesure nécessaire. L'ATV va maintenir sa trajectoire en confirmant ses paramètres de position jusqu'au point A_2 qui n'est plus distant que de $L_2 = 15,0\text{ km}$ du point de coïncidence de phase de la station.

Au point A_2 , l'ATV allume brièvement ses moteurs pour acquérir une impulsion supplémentaire, dans la direction x . Il s'en suit une modification, supposée instantanée, de sa vitesse, appelée « DeltaV ». Cette méthode de navigation, qui utilise des modifications rapides de la vitesse du mobile dans des phases de propulsion de courte durée par rapport à l'ensemble du vol, a été introduite en 1925 par Walter Hohmann (ingénieur allemand, 1880-1945). Ce « DeltaV » permet à l'ATV d'atteindre le point A_3 se trouvant à la même altitude que l'ISS et distant de $L_3 = 3500\text{ m}$ de cette dernière.

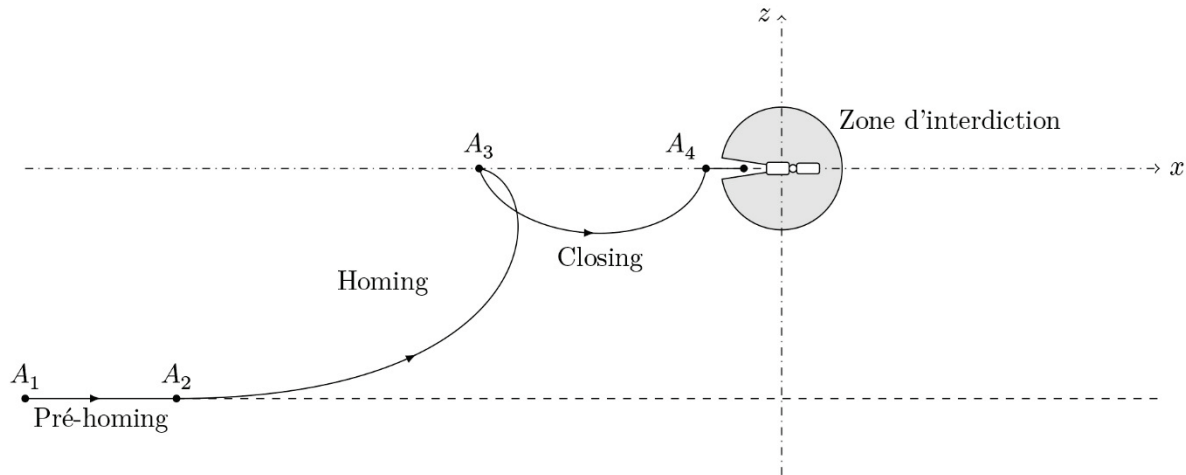


Figure 5

Nous nous plaçons en A_2 et étudions la trajectoire à partir de cet instant considéré comme initial, nous noterons $(\dot{x}_0, \dot{z}_0, x_0, z_0)$ les vitesses et positions initiales de l'ATV. La vitesse initiale est parallèle à l'axe x . Dans ces conditions particulières, le système de Clohessy-Wiltshire admet une solution de la forme :

$$\begin{cases} z = \frac{2}{\omega_s} \left(\dot{x}_0 - \frac{4}{3}v_s - (\dot{x}_0 - v_s) \cos(\omega_s t) \right) \\ x = -3 \left(\dot{x}_0 - \frac{4}{3}v_s \right) t + \frac{4}{\omega_s} (\dot{x}_0 - v_s) \sin(\omega_s t) + x_0 \end{cases}$$

où v_s est une constante.

II.C.1) Que représente v_s ?

Déterminer son expression en fonction des conditions initiales et de ω_s , la vitesse angulaire de l'ISS dans le référentiel géocentrique.

II.C.2) Nous noterons Δv le « DeltaV » qui a lancé l'ATV sur sa trajectoire de homing, exprimer $x(t)$ et $z(t)$ en fonction de Δv , v_s , ω_s et L_2 .

II.C.3) Déterminer l'expression que doit vérifier le temps de homing permettant à l'ATV de passer de A_2 à A_3 .

Quelles sont les conditions sur le « DeltaV » pour que ce temps existe ?

Quelle valeur de « DeltaV » sera la plus pertinente en fonction du coût énergétique de l'impulsion initiale ?

II.C.4) L'analyse de la trajectoire se fait en introduisant des variables réduites. On effectue à cette fin le changement de variable

$$X = \frac{x - x_0}{-z_0} \quad Z = \frac{z - z_0}{-z_0}$$

La figure 6 présente $Z(X)$ pour des valeurs croissantes du rapport $v_s/\Delta v$ variant par pas entier de 3 à 7. Laquelle vous paraît la plus pertinente ? Pourquoi ?

En déduire une estimation numérique du Δv nécessaire.

II.C.5) Que vaut le temps de vol si le choix du coût énergétique minimum s'impose ?

II.C.6) Vu la nature de la trajectoire que doit-il se passer en A_3 ?

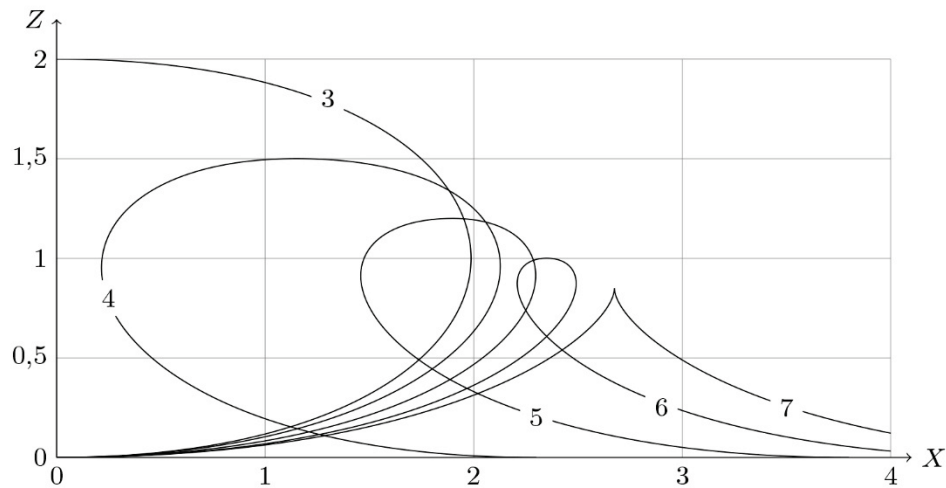


Figure 6 Trajectoire réduite

II.D – Phase finale : le closing

L'ATV va maintenant s'approcher au plus près de l'ISS en passant du point A_3 au point A_4 qui n'est plus qu'à $L_4 = 250$ m de la station. À nouveau, on procède par « DeltaV », cette fois ci une impulsion est communiquée à l'ATV vers le centre de la Terre, les seuls paramètres initiaux non nuls sont donc $x_0 = -L_3$, $\dot{z}_0 = -v_f$. Les équations de Clohessy-Wiltshire se résolvent alors sous la forme :

$$\begin{cases} z = -\frac{v_f}{\omega_s} \sin(\omega_s t) \\ x = -2\frac{v_f}{\omega_s} (\cos(\omega_s t) - 1) - L_3 \end{cases}$$

II.D.1) En déduire la nature géométrique de la trajectoire et préciser ces paramètres caractéristiques en fonction de L_3 et L_4 .

II.D.2) Calculer le temps de vol du point A_3 au point A_4 .

II.D.3) En considérant les différentes techniques de navigation déployées pour l'ATV, que pensez-vous de façon générale de la navigation « à vue » dans l'espace ?