

Physique : DM11

Partie I - Cuvette parabolique (CCP - MP - 1999)

1- Moment cinétique

a) Dans les conditions cylindriques : $\vec{OH} = \rho \vec{e}_1 + z \vec{e}_3$

$$\Rightarrow \vec{h} = \rho^2 \vec{e}_1 + \rho^2 \vec{e}_3 + z \vec{e}_3 \quad (1)$$

b) Soit $\vec{L}_0 = \vec{OH} \wedge m \vec{v} = \begin{vmatrix} \rho \wedge \rho \\ 0 \wedge \rho^2 \\ 0 \wedge 0 \end{vmatrix} \times m = m \begin{vmatrix} -\rho^2 \dot{\varphi} \\ \rho^2 \dot{\varphi} \\ 0 \end{vmatrix}$

$$\Leftrightarrow \frac{\vec{L}_0}{m} = -\rho \dot{\varphi} \vec{e}_1 + (\rho g - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{e}_2 + \rho^2 \dot{\varphi} \vec{e}_3 \quad (2)$$

$$\text{D'où } \vec{L}_0 \cdot \vec{e}_2 = \boxed{L_2 = m \rho^2 \dot{\varphi}} \quad (3)$$

c) \vec{v} est normal au plan tangent à la trajectoire, comme il y a un axe de rotation autour de l'axe Oz le vecteur normal est dans le plan OHP.

$$\Rightarrow \vec{R} \cdot \vec{e}_2 = 0 \quad (4)$$

D'après le théorème du moment cinétique en O on a :

$$\frac{dL_2}{dt} = dL_0 \quad (\text{dans la suite } g \text{ et } a \text{ sont } \vec{R} = R_\rho \vec{e}_1 + R_g \vec{e}_2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dL_2}{dt} = \vec{OH} \wedge (\vec{R} + \vec{P}) = \begin{vmatrix} \rho \wedge R_\rho \\ 0 \wedge R_g \\ 0 \wedge -mg + R_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \rho(mg - R_z) + R_g \rho \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{Par conséquent } \frac{dL_2}{dt} \cdot \vec{e}_2 = 0 \Rightarrow L_2 = \text{cte} = m \rho^2 \dot{\varphi} = L \quad (5)$$

2- Energie

a) Soit $E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m [\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2] = E_k \quad (6)$

b) Les forces exercées sont :

- la réaction \vec{e} qui ne travaille pas puisque il n'y a pas de frottements (glissement sans frottement)

- le poids qui dérive de l'énergie potentielle $mgz + aze$

Soit $\delta W = d(E_k)$

$$\Leftrightarrow (\vec{e} + \vec{P}) \cdot d\vec{r} = -dE_p$$

$$\Leftrightarrow \vec{P} \cdot d\vec{r} = -dE_p$$

$$\Leftrightarrow -mg dz = -dE_p \quad \text{d'où } E_p = mgz + aze$$

$$\text{Si } E_p(0) = 0 \text{ alors } E_p = mgz = mg \frac{\rho^2}{a} \quad (7)$$

c) Les forces étant conservatives, l'énergie mécanique de H est une constante.

$$\Rightarrow E_m = E_k + E_p = \text{cte} \quad (8)$$

3- Discussion générale de mouvement

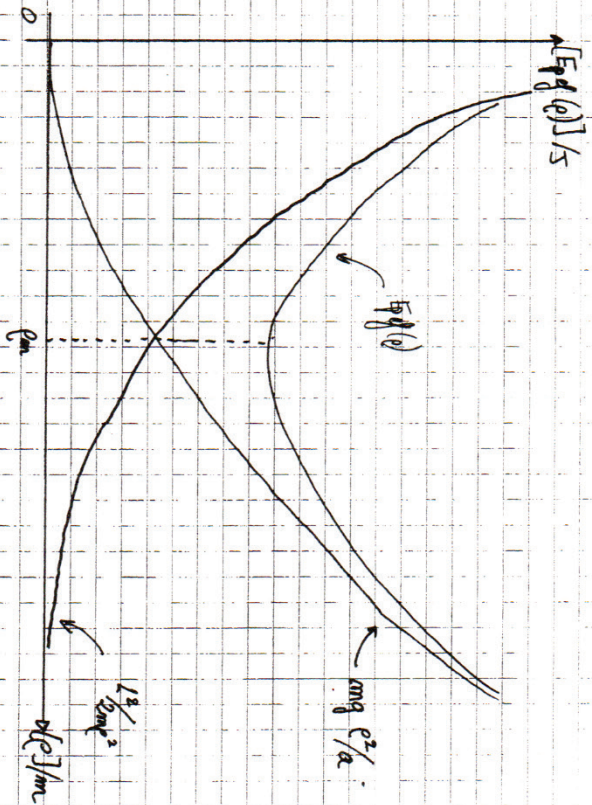
a) Soit $E_m = \frac{1}{2} m [\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2] + mg \frac{\rho^2}{a}$

$$\left. \begin{aligned} a) g = \frac{\rho^2}{a} \quad \text{d'où } \dot{z} = 2\rho \dot{\rho} / a \\ \int \frac{L}{\rho^2} \end{aligned} \right\} dt$$

Par conséquent $E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \left[1 + 4\rho^2 / a^2 \right] + mg \frac{\rho^2}{a} + \frac{L^2}{2m\rho^2}$

$$\text{D'où } E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 G(\rho) + E_p g(\rho) \quad \text{où } G(\rho) = 1 + 4\rho^2 / a^2 \quad \text{et } E_p g(\rho) = mg \rho^2 / a + \frac{L^2}{2m\rho^2} \quad (9)$$

b) Le graphique de $E_{\text{tot}}(\rho)$ est la somme d'une courbe en ρ^2 et d'une en $\rho^{1/2}$.



Calculons la valeur de ρ qui rend minimum $E_{\text{tot}}(\rho)$.

Soit $\frac{dE_{\text{tot}}(\rho)}{d\rho} = \frac{2mg\rho}{a} - \frac{L^2}{4m\rho^3} = 0 \quad (*)$

$$\Leftrightarrow \rho^4 = \frac{aL^2}{8m^2g}$$

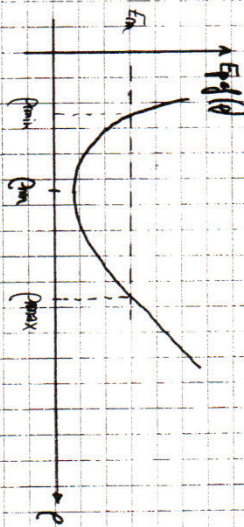
$$\Leftrightarrow \rho_m = \left(\frac{aL^2}{8m^2g} \right)^{1/4} \quad (**)$$

On peut remarquer d'après (*) que à ρ_m on a : $\frac{mg\rho^2}{a} = \frac{L^2}{8m\rho^2}$ ce qui correspond à l'égalité des 2 termes de l'énergie.

c) Soit $E_m = \frac{1}{2}m\rho^2 G(\rho) + E_{\text{pot}}(\rho)$

$$\Leftrightarrow E_m - E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}m\rho^2 G(\rho) > 0$$

Pour connaître les valeurs de ρ possibles sont celles que $E_m > E_{\text{pot}}$.



On doit avoir $E_m > E_{\text{pot}}(\rho_m)$ et si cette condition est remplie ρ est compris entre deux valeurs ρ_{min} et ρ_{max} qui correspondent à deux cercles d'altitudes : $\rho_{\text{min}} = \frac{2E_m}{a}$ et $\rho_{\text{max}} = \frac{E_m}{a}$.

4 - Etude de quelques mouvements particuliers

a) On veut obtenir à une période métrienne si $\rho = \text{cte}$ donc $\dot{\rho} = 0$
 $\Rightarrow L = 0 \quad (**)$

b) une trajectoire de ρ est un cercle horizontal, $g = \text{cte}$ $\Leftrightarrow \rho = \text{cte}$.

ce qui la forme de E_{pot} , pour avoir une seule valeur possible de ρ il faut que $E_m = E_{\text{pot}}(\rho_m)$.

$$\Rightarrow \text{cercle de rayon } \rho_m = \left(\frac{L^2 a}{8m^2 g} \right)^{1/4}$$

Or $L = m\rho^2 \dot{\varphi}$
 $\Rightarrow \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_m = \frac{L}{m\rho_m^2} = \frac{L}{m \left(\frac{L^2 a}{8m^2 g} \right)^{1/2}} = \sqrt{\frac{2g}{a}} = \dot{\varphi}(\rho) \quad (**)$

Pour connaître on doit donner la particule avec une vitesse $\vec{v}_0 = \rho_m \dot{\varphi}(\rho) \vec{e}_\varphi$ pour que la trajectoire soit circulaire.

c) soons $c = p - p_m$, et effectuons un développement limité de $E_{\text{pot}}(p)$ autour de p_m au deuxième ordre d'où :

$$E_{\text{pot}}(p) = E_{\text{pot}}(p_m) + \underbrace{\xi \frac{dE_{\text{pot}}}{dp}}_{=0 \text{ par définition de } p_m} \Big|_{p_m} + \frac{\xi^2}{2} \frac{d^2 E_{\text{pot}}(p)}{dp^2} \Big|_{p_m}$$

$$\text{On } \frac{d^2 E_{\text{pot}}}{dp^2} \Big|_{p_m} = \frac{8mg}{a} + \frac{3L^2}{mp_m^2} = \frac{8mg}{a} + \frac{3L^2}{m} \times \frac{1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}}{L^2 a} = 8mg/a$$

$$\rightarrow E_m = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 G(p) + E_{\text{pot}}(p_m) + 4mg \xi^2/a$$

Partons-nous d'un D.L de $G(p)$ à l'ordre 0 sinon on obtient des termes en ξ d'ordre supérieur à 2 ($\xi^2 \times \xi$), d'où $E_m = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 G(p_m) + E_{\text{pot}}(p_m) + 4mg \xi^2/a = \text{cte}$

$$\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0 = m \dot{\xi} \ddot{\xi} G(p_m) + 8/mg \xi \dot{\xi}^2/a \Leftrightarrow \ddot{\xi} + \frac{8g}{aG(p_m)} \xi = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0 \text{ où } \omega_0^2 = \frac{8g}{a(1+4p_m^2/a^2)}} \quad (13) \text{ qui est l'équation différentielle d'un oscillateur sinusoïdal}$$

$$\text{D'où } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{8g} (1+4p_m^2/a^2)} = \underline{1,42 \text{ s}}$$

5- Réalisation d'un contact

$$\text{Soit } m d\vec{v}/dt = m\vec{g} + R\vec{e}_m$$

En projetant sur \vec{e}_m on a donc $mv^2/R_c = m\vec{g} \cdot \vec{e}_m + R$ où R_c est le rayon de courbure.

$$\Rightarrow R = \frac{mv^2}{R_c} - m\vec{g} \cdot \vec{e}_m > 0 \text{ car } \vec{g} \cdot \vec{e}_m < 0$$

d'où $R > 0 \Rightarrow$ le contact ne peut être rompu (14)

6- Réalité du mouvement

• Dans la pratique, les frottements vont diminuer l'énergie mécanique jusqu'à obtenir la valeur minimale qui correspond à $p_m \Rightarrow p_{\text{final}} = p_m$.

• Or les frottements vont diminuer la valeur de \mathcal{E} jusqu'à devenir nulle : $\Rightarrow \mathcal{E}_{\text{final}} = 0$.

$$\text{Or } p_m = \left(\frac{L^2 a}{2m^2 g} \right)^{1/4} \text{ où } L \text{ est proportionnel à } \mathcal{E} \Rightarrow \underline{p_{\text{final}} = 0} \quad (15)$$

Partie II : Automated Transfer Véhicule (Centrale PC-2014)

① Orbite de l'ISS①.A Preliminaires gravitationnels

$$\textcircled{1} \text{ Gravitation: } \vec{F}_G = -\frac{Gmm'}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\text{Coulomb: } \vec{F}_e = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

$$\textcircled{2} \text{ Avec les analogies: } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\epsilon_0} \leftrightarrow -4\pi \\ m \leftrightarrow q \end{array} \right.$$

$$\text{On a: } \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \text{ qui devient } \oint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{int}$$

$$\textcircled{3} \text{ Le problème est à symétrie sphérique: } \vec{A} = A(r) \vec{u}_r$$

$$\text{d'où } A(r) \cdot 4\pi r^2 = -4\pi G M_{int}$$

$$\text{À l'extérieur } M_{int} = M_T \Rightarrow \vec{A} = -\frac{4\pi G M_T}{4\pi r^2} \vec{u}_r$$

$$\Rightarrow \vec{A} = -\frac{G M_T}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\text{Donc } \vec{A} = -\frac{k}{r^2} \vec{r} \text{ où } k = G M_T$$

$$\text{Or } g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2} \Rightarrow \underline{k = g_0 R_T^2}$$

①.B L'orbite circulaire de l'ISS

① Pour un pb à force centrale $\vec{L}_0 = \text{cste}$

$$\Leftrightarrow mrv = \text{cste}$$

$$\text{Or } r_{\text{circulaire}} = \text{cste} \Rightarrow \underline{v = \text{cste}}$$

② Soit $m\vec{a} = \vec{F} \Leftrightarrow -\frac{mv^2}{r} = -\frac{km}{r^2} \Leftrightarrow \underline{v = \sqrt{\frac{k}{r}}}$

$$\text{or } \omega = \frac{v}{r} \Rightarrow \underline{\omega = \sqrt{\frac{k}{r^3}}} \quad \text{①}$$

③ ① donne : $r^3\omega^2 = k \Leftrightarrow r^3 \times \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = k \Leftrightarrow \frac{r^3}{T^2} = \frac{k}{4\pi^2}$

$$\Leftrightarrow \underline{\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2} = \text{cste}}$$

④ Par définition : $\begin{cases} E_p = -\frac{km}{r} \\ E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{km}{2r} \end{cases} \Rightarrow \underline{E_c = -\frac{E_p}{2}}$

⑤ Par conséquent : $E_m = E_c + E_p \Leftrightarrow \underline{E_m = \frac{E_p}{2} = \frac{km}{2r}}$

⑥ On a $r_s = R_T + d_s = 6770 \text{ km} \Rightarrow \begin{cases} v_s = \omega_s = 7,67 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1} \\ \omega_s = \frac{v_s}{r_s} = 1,13 \cdot 10^{-3} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \\ T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} = 5540 \text{ s} = 1 \text{ h } 32 \text{ min} \end{cases}$

1.B) la dynamique d'approche

① Riss par rapport à $R_{géo}$ et en translation circulaire uniforme autour de la tige et en rotation uniforme autour de T_y d'où Riss non galiléen

② Bilan de forces : - gravitation $\vec{F}_G = -\frac{km}{M^3} \vec{TM}$
 - inertie $\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c \\ \vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c \end{array} \right.$

③ Par définition : $\vec{a}_c = \frac{d^2 \vec{TO}}{dt^2} \Big|_{R_{géo}} + \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}_{=\vec{0}, \text{uniforme}} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM})$

Poseons $\vec{\omega} = \omega_s \vec{u}_y = \vec{\omega}_s$.

or le mouvement de O dans $R_{géo}$ vérifie : $m\vec{a}(O) \Big|_{R_{géo}} = -\frac{km}{T_0^3} \vec{TO}$

$$\text{Donc } \vec{a}_c = -\frac{k}{T_0^3} \vec{TO} + \vec{\omega}_s \wedge (\vec{\omega}_s \wedge \vec{OM})$$

$$\text{④ Soit } \frac{\vec{TM}}{M^3} = \frac{\vec{TO} + \vec{OM}}{[(\vec{TO} + \vec{OM})^2]^{3/2}} \simeq \frac{\vec{TO}}{T_0^3 \left[1 + \frac{OM^2 + 2\vec{TO} \cdot \vec{OM}}{T_0^2} \right]^{3/2}} + \frac{\vec{OM}}{T_0^3}$$

$$\stackrel{\text{D.L.}}{=} \frac{\vec{TO}}{T_0^3} \left(1 - \frac{3\vec{TO} \cdot \vec{OM}}{T_0^2} \right) + \frac{\vec{OM}}{T_0^3}$$

$$\text{Donc } \frac{\vec{TM}}{M^3} - \frac{\vec{TO}}{T_0^3} = \frac{3\vec{TO} \cdot \vec{OM}}{T_0^2} \cdot \frac{\vec{TO}}{T_0^3} + \frac{\vec{OM}}{T_0^3} = \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{or } \vec{TO} = T_0 \vec{u}_z \text{ donc } \vec{TO} \cdot \vec{OM} = zT_0 \Rightarrow \alpha &= \frac{3z T_0^2 \vec{u}_z}{T_0^5} + \frac{\vec{OM}}{T_0^3} \\ &= \frac{3z \vec{u}_z + x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z}{T_0^3} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \frac{\vec{TM}}{M^3} - \frac{\vec{TO}}{T_0^3} = \frac{1}{T_0^3} (x\vec{u}_x + y\vec{u}_y - 2z\vec{u}_z)$$

⑤. Calculons \vec{F}_{ic} avant d'appliquer le PFD:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{ic} &= -2m\vec{\omega}_s \wedge \vec{v} = -2m\omega_s \vec{u}_y \wedge (x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z) \\ &= -2m\omega_s (z\vec{u}_x - x\vec{u}_z)\end{aligned}$$

De m^e \vec{F}_{ie} : $\vec{F}_{ie} = m k \frac{\vec{TO}}{TO^3} - m\vec{\omega}_s \wedge (\vec{\omega}_s \wedge \vec{OM})$

$$= m k \frac{\vec{TO}}{TO^3} + m\omega_s^2 \vec{HM} \quad \text{où } \vec{HM} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

Donc $m\vec{a}(M) = -km \left[\frac{\vec{TM}}{TM^3} - \frac{\vec{TO}}{TO^3} \right] + m\omega_s^2 \vec{HM} - 2m\omega_s (z\vec{u}_x - x\vec{u}_z)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{cases} = \frac{-k}{TO^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z \end{pmatrix} + \omega_s^2 \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} - 2\omega_s \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \quad \text{avec } \frac{k}{TO^3} = \frac{k}{l_s^3} = \omega_s^2$$

d'où $\begin{cases} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{cases} = \omega_s^2 \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ +2z \end{pmatrix} + \omega_s^2 \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} - 2\omega_s \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} + 2\omega_s z = 0 & \textcircled{1} \\ \ddot{y} + \omega_s^2 y = 0 & \textcircled{2} \quad \text{CQFD} \\ \ddot{z} + 2\omega_s x - 3\omega_s^2 z = 0 & \textcircled{3} \end{cases}$$

⑥. Initialement $y_0 = 0, \dot{y}_0 = 0$ comme le mouvement est plan $\Rightarrow \underline{y(t) = 0}$

• ① s'intègre en $x(t) - x(0) = -2\omega_s (z(t) - z_0)$

Donc ③ s'écrit: $\ddot{z} + 2\omega_s [x_0 - 2\omega_s z + 2\omega_s z_0] - 3\omega_s^2 z = 0$

$$\Leftrightarrow \ddot{z} + \omega_s^2 z = 2\omega_s [x_0 + 2\omega_s z_0]$$

$$\Rightarrow z(t) = A + B \cos(\omega_s t) + C \sin(\omega_s t) \quad \text{où } A = \frac{2x_0}{\omega_s} + 4z_0$$

$$\text{or } \begin{cases} z(0) = z_0 = 4z_0 + \frac{2\dot{x}_0}{\omega_s} + B & \Rightarrow B = -3z_0 - \frac{2\dot{x}_0}{\omega_s} \\ \dot{z}(0) = \dot{z}_0 = C\omega_s & \Rightarrow C = \frac{\dot{z}_0}{\omega_s} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{7} \text{ Or } \ddot{x} + 2\omega_s \dot{z} &= 0 \Leftrightarrow \dot{x} - \dot{x}_0 = -2\omega_s(z - z_0) \\ \Rightarrow x - x_0 &= -2\omega_s \int z(t) dt + (2\omega_s z_0 + \dot{x}_0)t \\ \Rightarrow x &= x_0 + (2\omega_s z_0 + \dot{x}_0)t - 2\omega_s \left[At + \frac{B}{\omega_s} \sin(\omega_s t) - \frac{C}{\omega_s} (\cos(\omega_s t) - 1) \right] \end{aligned}$$

$$\text{Donc } x = x_0 + \left[2\omega_s z_0 + \dot{x}_0 - 2\omega_s \left(\frac{2\dot{x}_0}{\omega_s} + 4z_0 \right) \right] t - 2B \sin(\omega_s t) + 2C (\cos(\omega_s t) - 1)$$

$$\Rightarrow x = x_0 - 3(\dot{x}_0 + 2\omega_s z_0)t + 2 \underbrace{\left(+3z_0 + \frac{2\dot{x}_0}{\omega_s} \right)}_{-B} \sin(\omega_s t) + 2 \underbrace{\frac{\dot{z}_0}{\omega_s}}_C \left[\cos(\omega_s t) - 1 \right]$$

⑧ (a) Dans la partie II.A, on a vu que la dérive était uniforme d'où :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0 \text{ et } \textcircled{1} \Rightarrow \dot{z} = 0 \text{ et } z = z_0 \\ \downarrow \\ \dot{x} &= \dot{x}_0 \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \textcircled{3} \text{ s'écrit : } -2\omega_s \dot{x}_0 = 3\omega_s^2 z_0$$

$$\Leftrightarrow z_0 = -\frac{2}{3} \frac{\dot{x}_0}{\omega_s}$$

⑨ En remplaçant dans $x(t)$ et $z(t)$ on remarque que B et C sont nuls d'où

$$\begin{cases} x = x_0 - 3(\dot{x}_0 - \frac{4}{3}\dot{x}_0)t = x_0 + \dot{x}_0 t \\ z = \frac{2\dot{x}_0}{\omega_s} + 4z_0 = -3z_0 + 4z_0 = z_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \dot{x}_0 t \\ z = z_0 \end{cases}$$

II.C) Phase d'approche radioguidée

① A $t=0$ l'équation proposée donne : $z(0) = \frac{2}{\omega_s} \left(x_0 - v_s - \frac{4}{3} v_s + v_s \right)$

$$\Leftrightarrow z(0) = -\frac{2}{3} \frac{v_s}{\omega_s}$$

or $z(0) = -h \Rightarrow \underline{v_s = \frac{3}{2} h \omega_s = r_s \Delta \omega}$ d'après II.A.2

v_s représente la vitesse relative entre l'ISS et l'ATV à l'issue de la phase d'approche circulaire

② Par définition, $\begin{cases} \Delta v = x_0 - v_s \\ x_0 = -L_2 \end{cases}$ d'après le schéma proposé.

$$\Rightarrow \begin{cases} z = \frac{2}{\omega_s} \left(x_0 - v_s - \frac{4}{3} v_s - (x_0 - v_s) \cos(\omega_s t) \right) \\ x = (-3x_0 + 4v_s)t + \frac{4}{\omega_s} (x_0 - v_s) \sin(\omega_s t) + x_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = \frac{2}{\omega_s} \left(\Delta v (1 - \cos(\omega_s t)) - v_s/3 \right) \\ x = (v_s - 3\Delta v)t + \frac{4}{\omega_s} \Delta v \sin(\omega_s t) - L_2 \end{cases}$$

③ En A_3 , $z(t_f) = 0 \rightarrow \Delta v (1 - \cos(\omega_s t_f)) = v_s/3 \Leftrightarrow \cos(\omega_s t_f) = 1 - \frac{v_s}{3\Delta v}$

$$\text{D'où } \frac{v_s}{3\Delta v} \leq 2 \Leftrightarrow \underline{\Delta v \geq \frac{v_s}{6}}$$

d'énergie dépensée par les moteurs à $t=0$ se résume à l'énergie cinétique :

$$\Rightarrow \Delta E_c = \frac{1}{2} m (v_s + \Delta v)^2 - \frac{1}{2} m v_s^2 \simeq m v_s \Delta v$$

or $\Delta v \geq \frac{v_s}{6} \Rightarrow \Delta E_c$ minimal pour Δv minimal

$$\Rightarrow \underline{\Delta v = \frac{v_s}{6}}$$

$$(4) \text{ On veut arriver en } A_3 \text{ t.g. } \begin{cases} z=0 \\ x = -L_3 = -3500 \text{ m} \end{cases}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} z=1 \\ x = 1,15 \end{cases} \quad (\text{Dans tous les cas } x < 1,5)$$

la trajectoire qui se rapproche le plus de ces possibilités est la trajectoire 5

$$\text{d'où } \Delta\sigma = \frac{v_s}{5} = \frac{17}{5} \approx \underline{3,4 \text{ m/s}}$$

$$(5) \text{ de cas } \Delta\sigma = \frac{v_s}{6} \text{ (trajectoire 6)} \Rightarrow \cos(\omega_s t_g) = -1$$

$$\Leftrightarrow \omega_s t_g = \pi$$

$$\Leftrightarrow \underline{t_g = \pi / \omega_s} = \frac{T_s}{2} = \underline{46 \text{ min}}$$

(6) Si on choisit la trajectoire 6 on ne sera pas en A_3 , il faudra donc un nouveau changement de vitesse pour se retrouver en $z=1$.

(II. D) Closing

(1) On reconnaît l'équation paramétrique d'une ellipse t.g. :

$$\sin(\omega_s t) = -\frac{z \omega_s}{v_g} = -\frac{z}{(b/2)} \Rightarrow b = \frac{2v_g}{\omega_s}$$

$$\cos(\omega_s t) = \frac{-\omega_s(x+L_3)}{2v_g} = \frac{-(x+L_3)}{(a/2)} \Rightarrow a = \frac{4v_g}{\omega_s}$$

$$\text{Or d'après la figure : } 2b = L_3 - L_4 \Rightarrow \underline{b = \frac{L_3 - L_4}{2} = \frac{a}{2}}$$

(2) le temps de vol de A_3 à A_4 correspond à une demi-période d'où $\Delta t_g = 46 \text{ min}$.

(3) la navigation à vue n'est pas évidente vu les ajustements de vitesse nécessaires.