Physique : DM10

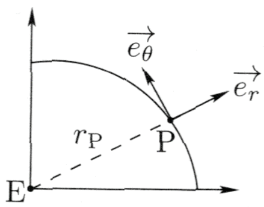
Détection des exoplanètes (Mines Ponts MP 2016)

I. Fascinantes exoplanètes

1 Le système est représenté ci-dessous. On distingue le **référentiel lié au point E** et **celui lié au point P**. Comme E est supposé fixe dans le référentiel de l'Univers, le référentiel lié à E est plus galiléen que celui lié au point P.

Le référentiel lié à P est un référentiel non galiléen. Il faut donc prendre en compte la force d'inertie d'entraînement dans le référentiel lié à P.

Dans le référentiel lié à E, le point P est en mouvement circulaire uniforme de rayon r_P autour du point E. L'accélération se met sous la forme suivante :



$$\overrightarrow{a} = -\frac{v^2}{r_\mathrm{P}}\,\overrightarrow{e_r}$$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique au point P dans le référentiel lié à E supposé galiléen,

$$\mathrm{M_P}\,\overrightarrow{a} = -\frac{\mathcal{G}\,\mathrm{M_P}\,\mathrm{M_E}}{{r_\mathrm{P}}^2}\,\overrightarrow{e_r}$$

Projetons cette relation sur $\overrightarrow{e_r}$,

$$-\mathrm{M_P}\,\frac{v^2}{r_\mathrm{P}} = -\frac{\mathcal{G}\,\mathrm{M_P}\,\mathrm{M_E}}{{r_\mathrm{P}}^2}$$

d'où

$$v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}\,\mathrm{M_E}}{r_\mathrm{P}}}$$

Comme le mouvement de P est circulaire uniforme, $v = 2\pi\,r_\mathrm{P}/\mathrm{T_P}$. Ainsi

$$\left(\frac{2\pi\,r_\mathrm{P}}{\mathrm{T_P}}\right)^2 = \frac{\mathcal{G}\,\mathrm{M_E}}{r_\mathrm{P}}$$

donc

$$\boxed{\frac{{\mathrm{T_P}}^2}{{r_\mathrm{P}}^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}\,\mathrm{M_E}}}$$

2 Le vaisseau se trouve à l'altitude h donc $r_\mathrm{P} = \mathrm{R_P} + h$. Appliquons la troisième loi de Kepler au vaisseau qui gravite autour du point P,

$$\frac{{t_\mathcal{E}}^2}{(\mathrm{R_P}+h)^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}\,\mathrm{M_P}}$$

avec $t_\mathcal{E}$ la période du vaisseau autour de ce point. Dans ce cas,

$$\boxed{\mathrm{M_P} = \frac{4\pi^2\,(\mathrm{R_P}+h)^3}{\mathcal{G}\,{t_\mathcal{E}}^2} = 1{,}51\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}$$

Imaginons une structure comparable à celle de la Terre : un manteau de masse volumique ρ_mant homogène et un noyau de masse volumique $\rho_\mathrm{n} = 10^4\ \mathrm{kg.m^{-3}}$ de rayon $\mathrm{R_P}/2$. La masse totale $\mathrm{M_P}$ s'écrit

$$\mathrm{M_P} = \rho_\mathrm{n}\times\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\mathrm{R_P}}{2}\right)^3 + \rho_\mathrm{mant}\left(\frac{4}{3}\pi\,{\mathrm{R_P}}^3 - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\mathrm{R_P}}{2}\right)^3\right)$$

Il vient $$\rho_{\text{mant}} = \frac{3\text{M}_\text{P} - \rho_\text{n} \times 4\pi\,(\text{R}_\text{P}/2)^3}{4\pi\big({\text{R}_\text{P}}^3 - (\text{R}_\text{P}/2)^3\big)} = 1{,}9 \cdot 10^3\ \text{kg.m}^{-3}$$

Cette valeur est tout à fait pertinente pour un manteau rocheux.

La structure de la planète est probablement comparable à celle de la Terre.

3 L'énoncé du théorème de Gauss appliqué au champ de gravitation est le suivant :

Soit S une surface fermée s'appuyant sur un volume V. Le flux sortant du champ gravitationnel à travers S s'écrit

$$\oiint_\text{S} \overrightarrow{\text{G}} \cdot \text{d}\overrightarrow{\text{S}} = -4\pi\mathcal{G}\,\text{M}_\text{int}$$

où M_int est la masse intérieure à la surface S.

Tous les plans contenant le centre de la sphère et le vecteur $\overrightarrow{e_r}$ sont des plans de symétrie de la distribution de masse. Par conséquent,

$$\overrightarrow{\text{G}} = \text{G(M)}\,\overrightarrow{e_r}$$

La distribution de masse est invariante par rotation selon θ et ϕ, d'où

$$\overrightarrow{\text{G}} = \text{G}(r)\,\overrightarrow{e_r}$$

Appliquons le théorème de Gauss sur une surface sphérique S de rayon R_P. Comme $\text{M}_\text{int} = \text{M}_\text{P}$, il vient

$$4\pi\,{\text{R}_\text{P}}^2\,\text{G}(\text{R}_\text{P}) = -4\pi\mathcal{G}\,\text{M}_\text{P}$$

c'est-à-dire $$\overrightarrow{\text{G}} = -\frac{\mathcal{G}\,\text{M}_\text{P}}{{\text{R}_\text{P}}^2}\,\overrightarrow{e_r}$$

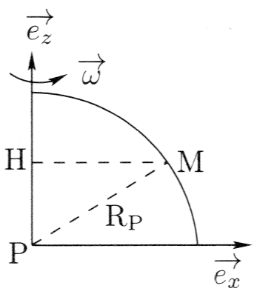
d'où $$\boxed{\|\overrightarrow{\text{G}}\| = \frac{\mathcal{G}\,\text{M}_\text{P}}{{\text{R}_\text{P}}^2} = 4{,}03\ \text{m.s}^{-2}}$$

4 La pesanteur est définie dans le référentiel non galiléen de la planète.

Dans la définition de l'accélération de la pesanteur, il faut prendre en compte l'accélération d'entraînement $\overrightarrow{a_\text{ie}}$.

Introduisons le projeté H d'un point M à la surface de la planète sur l'axe de rotation de la planète. La force d'inertie d'entraînement appliquée à ce point s'écrit

$$\overrightarrow{f_\text{ie}} = -m\,\overrightarrow{a_\text{ie}} = m\,\omega^2\,\overrightarrow{\text{HM}}$$



avec ω la vitesse angulaire de la planète autour de son axe de rotation. Le poids $m\,\overrightarrow{g}$ est la somme de la force de gravitation et de la force d'inertie d'entraînement. Divisons par m de part et d'autre,

$$\overrightarrow{g} = \overrightarrow{\text{G}} - \overrightarrow{a_\text{ie}}$$

Or $\overrightarrow{\text{HM}} = \overrightarrow{0}$ sur les pôles et $\overrightarrow{\text{HM}} = \text{R}_\text{T}\,\overrightarrow{e_x}$ à l'équateur. Donc

$$\boxed{g_\text{pôles} = \|\overrightarrow{\text{G}}\| = 4{,}03\ \text{m.s}^{-2}}$$

Sur l'équateur, $$\overrightarrow{g_{\text{éq}}} = \overrightarrow{\mathrm{G}} - \overrightarrow{a_{\text{ie}}}$$
$$= -\frac{\mathcal{G}\,\mathrm{M_P}}{\mathrm{R_P}^2}\,\overrightarrow{e_x} + \omega^2\,\mathrm{R_P}\,\overrightarrow{e_x}$$

Avec $\omega = 2\pi/t_{\mathrm{P}} = 8{,}95 \cdot 10^{-5}$ rad.s^{-1},

$$\boxed{g_{\text{éq}} = \frac{\mathcal{G}\,\mathrm{M_P}}{\mathrm{R_P}^2} - \omega^2\,\mathrm{R_P} = 3{,}99 \text{ m.s}^{-2}}$$

> D'après l'expression de $\overrightarrow{g}$, $g_{\text{éq}} < g_{\text{pôles}}$. En effet, au niveau de l'équateur, la force d'inertie d'entraînement, centrifuge, s'oppose à la force de gravitation.

Pour mesurer cet écart, il faut avoir un dispositif qui permet de détecter des variations du champ de pesanteur dg de l'ordre de 0,04 m.s^{-2} avec des incertitudes Δg au moins 10 fois plus petites que cet écart, c'est-à-dire des incertitudes relatives

$$\frac{\Delta g}{g} = 0{,}1\%$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Un dispositif de chute libre du lycée induit des incertitudes}\\ \text{plus grandes que celles attendues pour détecter cet écart.}\end{array}}$$

Pour déterminer la valeur de g, on peut par exemple mesurer :

- **la période d'un pendule simple** $\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\ell/g}$, où ℓ est la longueur du fil ;
- **la position d'équilibre d'une masse accrochée à un ressort vertical** $z_{\text{eq}} = \ell_0 + mg/k$, où ℓ_0 est la longueur à vide du ressort, m la masse accrochée et k la constante de raideur du ressort.

5 L'énergie mécanique d'un objet de masse m s'écrit

$$\mathrm{E_m} = \frac{1}{2}\,m\,v^2 - \frac{\mathcal{G}\,\mathrm{M_P}\,m}{r}$$

Par définition de la vitesse de libération, l'objet arrive en l'infini avec une vitesse nulle. Celui-ci est alors suffisamment éloigné de la planète pour négliger l'interaction gravitationnelle. L'énergie mécanique s'écrit finalement

$$\mathrm{E_m}(\infty) = \mathrm{E_c} + \mathrm{E_p} = 0$$

De même en $r = \mathrm{R_P}$, $$\mathrm{E_m} = \frac{1}{2}\,m\,v_{\text{lib}}{}^2 - \frac{\mathcal{G}\,\mathrm{M_P}\,m}{\mathrm{R_P}}$$

Par conservation de l'énergie mécanique entre $r = \mathrm{R_P}$ et l'infini,

$$\frac{1}{2}\,m\,v_{\text{lib}}{}^2 - \frac{\mathcal{G}\,\mathrm{M_P}\,m}{\mathrm{R_P}} = 0$$

d'où $$\boxed{v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}\,\mathrm{M_P}}{\mathrm{R_P}}} = 6{,}35 \text{ km.s}^{-1}}$$

6 La planète retient les gaz de son atmosphère si leur vitesse est plus petite que la vitesse de libération calculée à la question précédente. D'après la figure de l'énoncé, toutes les particules représentées ont des vitesses inférieures à 3 km.s^{-1}. Au vu des masses molaires données, les gaz étudiés sont le dioxyde de carbone (44 g.mol^{-1}), le dioxygène (32 g.mol^{-1}), l'eau (18 g.mol^{-1}) et l'hélium (4 g.mol^{-1}).

$$\boxed{\text{La planète étudiée pourrait avoir une atmosphère semblable à celle de la Terre.}}$$

7 Chaque degré de liberté amène une énergie $k_B T/2$. Il y a 3 degrés de liberté donc

$$\langle E_c \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

Or $E_c = mv^2/2$ et $m = M/N_A$ avec N_A le nombre d'Avogadro. On en déduit la vitesse quadratique moyenne

$$\boxed{\sigma_v = \sqrt{\frac{3k_B T\, N_A}{M}} = 0{,}48 \text{ km.s}^{-1}}$$

D'après la courbe, le dioxygène ($M = 32$ g.mol^{-1}) a une vitesse la plus probable d'environ 0,4 km.s^{-1}, ce qui correspond à une vitesse quadratique moyenne de 0,5 km.s^{-1}.

Le résultat est donc cohérent avec la valeur trouvée numériquement.

8 Il faut comparer l'angle de vision qui sépare Jupiter et le Soleil lorsqu'on les observe depuis 51-Pégase. Le Soleil et Jupiter se situent à $L = 42$ années-lumière de 51-Pégase, c'est-à-dire

$$L = c\,\Delta t = 3{,}98 \cdot 10^{17} \text{ m}$$

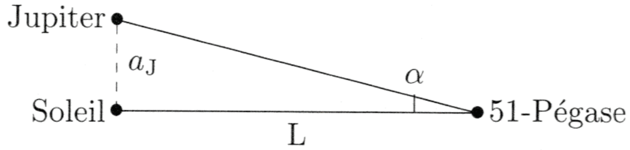
> La valeur de L est très grande devant la taille du système solaire, ce qui justifie le choix d'avoir pris les distances Soleil/51-Pégase et Jupiter/51-Pégase égales à la distance Terre/51-Pégase donnée dans l'énoncé.

Jupiter et le Soleil sont séparés de la distance a_J (demi-grand axe de l'orbite), d'où

$$\alpha \simeq \tan\alpha = \frac{a_J}{L} = 1{,}95 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$$

Comparons cet angle au pouvoir séparateur du télescope qui correspond à l'angle minimal entre deux points permettant de les distinguer à travers le télescope. Ici, en prenant une longueur d'onde dans le visible $\lambda = 600$ nm,

$$\theta = \frac{1{,}2\,\lambda}{d} = 3{,}7 \cdot 10^{-7} \text{ rad}$$



On a alors $\alpha > \theta$. Par conséquent,

Depuis 51-Pégase, le télescope pourrait séparer Jupiter du Soleil.

L'observation directe d'une planète est limitée par exemple à cause de la **réfraction de la lumière dans l'atmosphère** et le **manque de luminosité**.

9 D'après le schéma ci-dessous,

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GE}$$

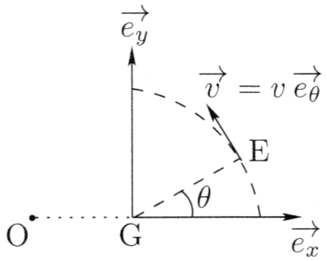
d'où

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_G} + \overrightarrow{v}$$

avec $\overrightarrow{v_G} = v_G\,\overrightarrow{e_x}$. La vitesse du point E par rapport à G est dirigée selon $\overrightarrow{e_\theta}$:

$$\overrightarrow{v} = v\,(-\sin\theta\,\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_y})$$

Prenons la norme de $\overrightarrow{v_r}$,



$$\begin{aligned} {v_r}^2 &= \|\overrightarrow{v_G} + \overrightarrow{v}\|^2 \\ &= {v_G}^2 + v^2 + 2\,\overrightarrow{v_G}\cdot\overrightarrow{v} \\ {v_r}^2 &= {v_G}^2 + v^2 - 2\,v_G\,v\,\sin\theta \end{aligned}$$

Il vient $$\boxed{v_r = \sqrt{{v_G}^2 + v^2 - 2\,v_G\,v\,\sin\theta}}$$

Comme $|\Delta f|/f = |v_r|/c$, le décalage Δf est maximal quand $\theta = -\pi/2$, et minimal quand $\theta = \pi/2$. Ainsi

$$|\Delta f|_{\max} = \frac{f}{c}\,(v_G + v) \qquad \text{et} \qquad |\Delta f|_{\min} = \frac{f}{c}\,(v_G - v)$$

Il vient $$\boxed{\delta f = \frac{f\,v}{c}}$$

10 Supposons la vitesse angulaire ω uniforme. L'angle θ au cours du temps s'écrit

$$\theta = \omega t = \frac{2\pi}{T}\,t$$

D'après l'expression de v_r obtenue à la question 9, la vitesse radiale oscille à la fréquence $1/T$. Le décalage de fréquence reçue sur Terre oscillera aussi à cette fréquence.

$$\boxed{\text{La période d'oscillation de } \Delta f \text{ correspond directement à la période T.}}$$

Il faut pouvoir détecter ces variations et donc avoir l'amplitude de variation δf la plus grande possible. D'après la question 1, plus le rayon de l'orbite est petit, plus la vitesse de l'objet autour de l'orbite est grande et donc δf est grand.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Plus la planète est proche de l'étoile, plus } \delta f \text{ est} \\ \text{grand et plus il est facile de détecter ces variations.}\end{array}}$$

L'étoile E est en orbite circulaire donc $v = 2\pi\,\mathrm{GE}/T$. D'après la question 9, $v = c\,\delta f/f$, d'où

$$\boxed{\mathrm{GE} = \frac{c T\,\delta f}{2\pi\,f}}$$

11 Les points E, G et P sont alignés. Par définition du centre de gravité G,

$$M_E\,\mathrm{GE} = M_P\,\mathrm{GP}$$

L'hypothèse $M_E \gg M_P$ permet de supposer que l'étoile reste quasiment confondue avec le point G à tout instant. Appliquons maintenant la troisième loi de Kepler à la planète dans le référentiel lié à G, supposé galiléen,

$$\frac{T^2}{\mathrm{PE}^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}\,M_E}$$

d'où $$\boxed{\mathrm{PE} = \left(\frac{\mathcal{G}\,M_E\,T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}}$$

Avec la relation du centre de gravité,

$$\mathrm{M_P} = \frac{\mathrm{M_E\,GE}}{\mathrm{GP}} = \mathrm{M_E\,GE}\left(\frac{4\pi^2}{\mathcal{G}\,\mathrm{M_E\,T^2}}\right)^{1/3}$$

donc

$$\boxed{\mathrm{M_P} = \mathrm{M_E}^{2/3}\,\mathrm{GE}\left(\frac{4\pi^2}{\mathcal{G}\,\mathrm{T^2}}\right)^{1/3}}$$

12 La vitesse de Jupiter sur son orbite autour du Soleil s'écrit

$$v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}\,\mathrm{M_S}}{a_\mathrm{J}}}$$

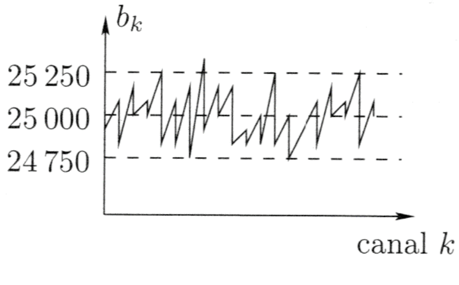
D'après la question 9, $\delta f / f = v/c$ donc

$$\boxed{\frac{\delta f}{f} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\mathcal{G}\,\mathrm{M_S}}{a_\mathrm{J}}} = 4{,}35 \cdot 10^{-5}}$$

II. Détection d'un signal faible

13 D'après l'énoncé, après n acquisitions, la moyenne du signal b_n est $n\,b$ et l'écart-type $\sigma_n = \sigma\sqrt{n}$. On a alors le rapport suivant

$$\frac{\sigma_n}{b_n} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}\,b}$$



Par conséquent, plus on augmente le nombre d'acquisitions, moins le signal sera dispersé, comparativement à sa valeur moyenne. Pour $n = 2\,500$, $b_n = 25\,000$ et $\sigma_n = 250$, on a le graphe ci-contre.

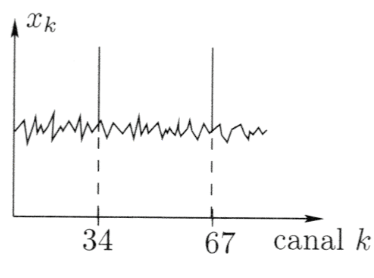
14 Le signal utile est détecté si son amplitude U est supérieure à l'écart-type σ du bruit. Ici, $\mathrm{U} = 1$ et $\sigma = 5$.

$\boxed{\text{Le signal utile n'est pas détectable avec une seule acquisition.}}$

Après n acquisitions, l'amplitude du signal utile U_n vaut $n\,\mathrm{U}$ et l'écart-type du bruit $\sqrt{n}\,\sigma$. Le rapport de ces grandeurs donne

$$\frac{\mathrm{U}_n}{\sigma_n} = \sqrt{n}\,\frac{\mathrm{U}}{\sigma}$$

Pour $2\,500$ acquisitions, $\mathrm{U}_n/\sigma_n = 10$. Le signal utile est alors visible et on a l'allure ci-contre.



> Faire la moyenne sur les différents canaux permet de diminuer le bruit mais augmente la durée de l'expérience.

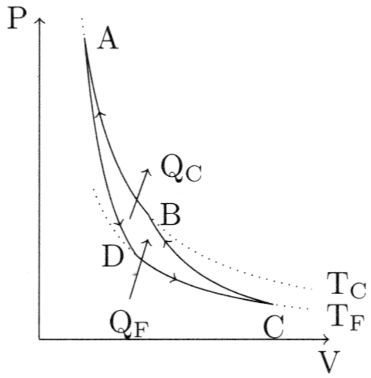
15 Le signal utile peut être perçu si le rapport signal sur bruit est plus grand que 2. Au seuil de détection,

$$\frac{s_{p,n}}{\sigma_n} = \sqrt{n}\,\frac{s_p}{\sigma} = 2$$

d'où

$$\boxed{n = \left(\frac{2\sigma}{s_p}\right)^2}$$

16 Pour modéliser le réfrigérateur ditherme, considérons le cycle de Carnot. Il est constitué de deux transformations adiabatiques réversibles et de deux transformations isothermes réversibles. On représente ce cycle ci-dessous : Sur les deux isothermes BA et DC, le système est en contact avec des thermostats aux températures chaude $\mathrm{T_C}$ et froide $\mathrm{T_F}$. Le fluide échange de l'énergie de nature thermique avec les thermostats chaud et froid. Le premier principe appliqué au fluide s'écrit



$$\Delta\mathrm{U} = \mathrm{W} + \mathrm{Q_F} + \mathrm{Q_C}$$

Le cycle de Carnot est un cycle réversible donc, d'après le deuxième principe,

$$\Delta\mathrm{S} = \frac{\mathrm{Q_F}}{\mathrm{T_F}} + \frac{\mathrm{Q_C}}{\mathrm{T_C}}$$

L'énergie interne et l'entropie étant des fonctions d'état, $\Delta\mathrm{U} = 0$ et $\Delta\mathrm{S} = 0$ sur un cycle, donc

$$\boxed{\mathrm{W} + \mathrm{Q_F} + \mathrm{Q_C} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{Q_F}}{\mathrm{T_F}} + \frac{\mathrm{Q_C}}{\mathrm{T_C}} = 0}$$

L'efficacité e d'un tel réfrigérateur s'écrit $e = |\mathrm{Q_F}|/|\mathrm{W}|$. Or $\mathrm{Q_F} > 0$ et $\mathrm{W} > 0$ pour une machine frigorifique. Il vient

$$\begin{aligned} e &= \frac{\mathrm{Q_F}}{\mathrm{W}} \\ &= \frac{\mathrm{Q_F}}{-\mathrm{Q_C} - \mathrm{Q_F}} && \text{(premier principe)} \\ &= \frac{\mathrm{Q_F}}{\mathrm{T_C}\,\mathrm{Q_F}/\mathrm{T_F} - \mathrm{Q_F}} && \text{(deuxième principe)} \end{aligned}$$

$$\boxed{e = \frac{\mathrm{T_F}}{\mathrm{T_C} - \mathrm{T_F}}}$$

Le cycle de Carnot est réversible. Dans ce cas, il s'agit bien de **l'efficacité maximale**.

17 La puissance électrique minimale correspond à l'efficacité maximale. Calculons l'efficacité des réfrigérateurs avec la relation de la question 16. Pour le premier réfrigérateur, $\mathrm{T_F} = 20$ K et $\mathrm{T_C} = 50$ K. Pour le second, $\mathrm{T_F} = 4$ K et $\mathrm{T_C} = 20$ K, d'où

$$e_1 = 0{,}67 \qquad \text{et} \qquad e_2 = 0{,}25$$

L'efficacité est le rapport d'énergie $\mathrm{Q_F}/\mathrm{W}$, mais aussi un rapport de puissance $\mathrm{P_F}/\mathrm{P_W}$ avec $\mathrm{P_F}$ la puissance frigorifique et $\mathrm{P_W}$ la puissance électrique. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{P_{W_1}} = \frac{\mathrm{P_{F_1}}}{e_1} = 1{,}5\ \mathrm{W} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P_{W_2}} = \frac{\mathrm{P_{F_2}}}{e_2} = 0{,}06\ \mathrm{W}}$$

18 Avant la mise en route du réfrigérateur, la source froide est en équilibre thermique avec la source chaude, soit à la température T_C. Pour l'amener à la température T_F, il faut donc lui prélever une énergie thermique $C(T_C - T_F)$, avec C sa capacité thermique. Ramenée à son énergie initiale, le pourcentage R s'exprime alors

$$R = \frac{C(T_C - T_F)}{C\,T_C} = \frac{T_C - T_F}{T_C}$$

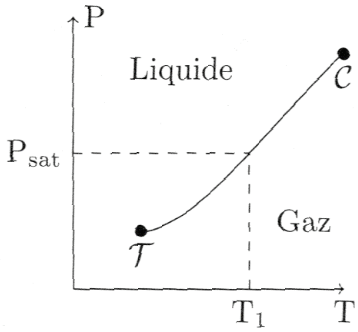
d'où $$\boxed{R_1 = 0{,}6 \qquad \text{et} \qquad R_2 = 0{,}8}$$

Ces valeurs sont bien cohérentes avec celles données dans l'énoncé.

19 La courbe d'équilibre entre le liquide et le gaz est représentée ci-dessous. $\mathcal{T}$ est le point triple et $\mathcal{C}$ le point critique.

L'hélium peut se vaporiser dans le serpentin car la pression P est inférieure à la pression de vapeur saturante P_{sat} à la température T_1. En effet, pour $P < P_{sat}$, on est dans le domaine d'équilibre du gaz et donc l'hélium se vaporise.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{L'hélium se vaporise car la pression est inférieure}\\ \text{à la pression de vapeur saturante de l'hélium.}\end{array}}$$



Lorsqu'il y a un équilibre entre deux phases, la pression du système est à la pression de vapeur saturante et **la température est fixée** (voir schéma).

En circuit fermé, l'hélium doit être liquéfié pour permettre au cycle de s'effectuer à nouveau. On a donc besoin d'un **condenseur**.

III. Transmission d'un signal bruité

20 Considérons une ligne de transmission avec un coefficient d'atténuation par unité de longueur α. Prenons une tranche de la ligne entre x et $x + dx$. Dans cette tranche, la puissance absorbée par la ligne vaut $-\alpha\,P(x)\,dx$. La variation de puissance entre x et $x + dx$ s'écrit

$$P(x + dx) - P(x) = -\alpha\,P(x)\,dx$$

Il vient $$\frac{dP}{dx} = -\alpha\,P(x)$$

d'où $$P(x) = P_0\,e^{-\alpha x}$$

En $x = \ell$, $$P_S = P_E\,e^{-\alpha \ell}$$

Appliquons le logarithme décimal de part et d'autre de l'équation,

$$\log_{10} P_S = \log_{10} P_E - \frac{\alpha \ell}{\ln 10}$$

Par conséquent, $$\boxed{P_S^{dB} = P_E^{dB} - \lambda \qquad \text{avec} \qquad \lambda = \frac{10\,\alpha\,\ell}{\ln 10}}$$

> Ce modèle classique d'absorption est également à l'origine de la loi de Beer-Lambert en chimie.

21 Le bruit d'origine thermique $\mathrm{P_B}$ est le même sur toute la ligne donc $\mathrm{P_{B_S}} = \mathrm{P_{B_E}}$. Introduisons $\mathrm{P_B}$ dans l'expression trouvée à la question 20,

$$10\,\log_{10}\mathrm{P_S} - 10\,\log_{10}\mathrm{P_B} = 10\,\log_{10}\mathrm{P_E} - 10\,\log_{10}\mathrm{P_B} - \lambda$$

Il vient
$$10\,\log_{10}\left(\frac{\mathrm{P_S}}{\mathrm{P_B}}\right) = 10\,\log_{10}\left(\frac{\mathrm{P_E}}{\mathrm{P_B}}\right) - \lambda$$

Avec $\mathrm{P_B} = \mathrm{P_{B_S}} = \mathrm{P_{B_E}}$,
$$\boxed{\mathcal{R}_\mathrm{S}^\mathrm{dB} = \mathcal{R}_\mathrm{E}^\mathrm{dB} - \lambda}$$

Ainsi, le rapport signal sur bruit est plus petit en sortie qu'en entrée, c'est-à-dire que le bruit prend de l'importance en cours de propagation. **Pour exploiter le signal de sortie, le bruit ne doit pas être trop important par rapport au signal.**

Sur des grandes distances, il faut **diminuer le bruit** ou **éviter au maximum l'absorption** dans la ligne de transmission.

22 Avec la définition du facteur de bruit,

$$\begin{aligned}\mathrm{F} &= \mathcal{R}_\mathrm{E}^\mathrm{dB} - \mathcal{R}_\mathrm{S}^\mathrm{dB} \\ &= 10\,\log_{10}\left(\frac{\mathrm{P_E}}{\mathrm{P_{B_E}}}\right) - 10\,\log_{10}\left(\frac{\mathrm{P_S}}{\mathrm{P_{B_S}}}\right) \\ \mathrm{F} &= 10\,\log_{10}\left(\frac{\mathrm{P_{B_S}}}{\gamma\,\mathrm{P_{B_E}}}\right) \qquad \left(\text{avec } \gamma = \frac{\mathrm{P_S}}{\mathrm{P_E}}\right)\end{aligned}$$

Finalement
$$\boxed{\mathrm{P_{B_S}} = f\,\gamma\,\mathrm{P_{B_E}} \qquad \text{avec} \qquad f = 10^{\mathrm{F}/10}}$$

$\mathrm{F} > 0$, donc
$$\boxed{f > 1}$$

23 Avec la relation de l'énoncé,

$$\mathrm{P_{S_2}} = \gamma_2\,(\mathrm{P_{S_1}} - \mathrm{P_{B_E}}) + \mathrm{P_{B_{S_2}}}$$

Or $\mathrm{P_{S_1}} = \mathrm{P_{B_{S_1}}} = f_1\,\gamma_1\,\mathrm{P_{B_E}}$ et $\mathrm{P_{B_{S_2}}} = f_2\,\gamma_2\,\mathrm{P_{B_E}}$, d'où

$$\begin{aligned}\mathrm{P_{S_2}} &= \gamma_2\,(f_1\gamma_1 - 1)\,\mathrm{P_{B_E}} + f_2\,\gamma_2\,\mathrm{P_{B_E}} \\ &= (\gamma_{12}\,f_1 + \gamma_2\,(f_2 - 1))\;\mathrm{P_{B_E}} \qquad (\text{avec } \gamma_{12} = \gamma_1\gamma_2)\end{aligned}$$

Pour un système de caractéristiques (γ_{12}, f_{12}), la puissance de sortie est

$$\mathrm{P_{B_{12}}} = \gamma_{12}\,f_{12}\,\mathrm{P_{B_E}}$$

Le système étant auto-alimenté, $\mathrm{P_{B_{12}}} = \mathrm{P_{S_{12}}}$. Comparons maintenant les deux expressions obtenues :

$$\gamma_{12}\,f_{12} = \gamma_{12}\,f_1 + \gamma_2\,(f_2 - 1)$$

d'où
$$\boxed{f_{12} = f_1 + \frac{f_2 - 1}{\gamma_1}}$$

24 Faisons de même en raccordant le système 1-2 au système 3. La formule obtenue à la question précédente s'adapte et devient

$$f_{13} = f_{12} + \frac{f_3 - 1}{\gamma_{12}}$$

d'où
$$\boxed{f_{13} = f_1 + \frac{f_2 - 1}{\gamma_1} + \frac{f_3 - 1}{\gamma_1\,\gamma_2}}$$

Avec n éléments en cascade,

$$\boxed{f_{1n} = f_1 + \frac{f_2 - 1}{\gamma_1} + \ldots + \frac{f_n - 1}{\gamma_1\,\cdots\gamma_{n-1}}}$$

Les gains γ_n des amplificateurs font diminuer les différents rapports sauf pour le premier terme. Dans ce cas, f_1 est le terme prédominant.

$$\boxed{\text{L'instrument 1 fixe le bruit et donc la qualité de la chaîne.}}$$

IV. Exemple de bruit thermique élémentaire

25 Comme $u(t) = \mathrm{U} + b(t)$, la relation du condensateur s'écrit

$$q(t) = \mathrm{C}\,(\mathrm{U} + b(t))$$

Avec $i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$, la puissance mise en jeu est

$$\mathrm{P} = u(t)\,i(t) = \mathrm{C}\,\big(\mathrm{U} + b(t)\big)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\mathrm{U} + b(t)\big)$$

Comme $\mathrm{dE_C} = \mathrm{P}\,\mathrm{d}t$, $\qquad \mathrm{dE_C} = \mathrm{C}\,\big(\mathrm{U} + b(t)\big)\,\mathrm{d}\big(\mathrm{U} + b(t)\big)$

Par intégration $\qquad \mathrm{E_C} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{C}\,\big(\mathrm{U} + b(t)\big)^2$

Développons le carré et prenons la valeur moyenne,

$$\langle \mathrm{E_C} \rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{C}\,\big\langle \mathrm{U}^2 + 2\,\mathrm{U}\,b(t) + b^2(t) \big\rangle$$

Avec $\langle b \rangle = 0$,
$$\boxed{\langle \mathrm{E_C} \rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{C}\,\mathrm{U}^2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{C}\,{\sigma_b}^2}$$

26 À chaque degré de liberté est associé une énergie $k_\mathrm{B}\mathrm{T}/2$, c'est-à-dire,

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{C}\,{\sigma_b}^2 = \frac{1}{2}\,k_\mathrm{B}\mathrm{T}$$

d'où
$$\boxed{\sigma_b = \sqrt{\frac{k_\mathrm{B}\mathrm{T}}{\mathrm{C}}} = 3\cdot 10^{-7}\ \mathrm{V}}$$

Au vu de cette expression **plus C est petit, plus le bruit est important**. La valeur numérique trouvée montre qu'à température ambiante et avec des tensions usuelles de l'ordre de 1 V, **le bruit est négligeable**.