

TH1 – Synthèse

• *Premier et second principe industriel*

Dans le cas d'un écoulement en régime stationnaire de débit massique D_m , la variation d'énergie totale massique entre l'entrée et la sortie d'un organe est donnée par le premier principe industriel :

$$[h + e_c + e_p]_e^s = w_u + q \text{ ou } D_m[h + e_c + e_p]_e^s = P_{th} + P_u$$

où w_u est le travail utile massique correspondant au travail autre que les forces de pression reçu par un kilogramme de fluide en écoulement et q est le transfert thermique massique reçu correspondant au transfert thermique reçu par un kilogramme de fluide en écoulement durant la traversée de l'organe.

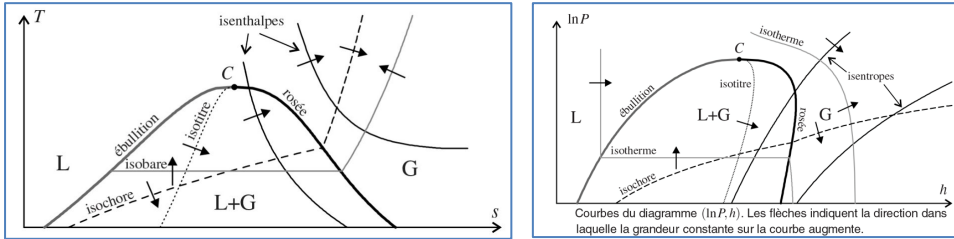
Dans le cas d'un écoulement en régime stationnaire, la variation d'entropie massique entre l'entrée et la sortie d'un organe est donnée par le deuxième principe industriel :

$$s_s - s_e = s_{éch} + s_{créée} \text{ où } s_e = \int \frac{\delta q}{T_s} \text{ et } s_c \geq 0$$

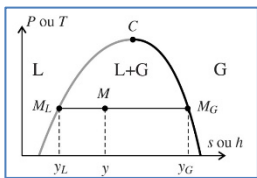
où s_c est l'entropie massique créée et s_e est l'entropie massique échangée lors d'un transfert thermique avec une source à la température T_s .

• *Diagrammes thermodynamiques*

Les diagrammes (p, h) ou (T, s) sont utilisés en pratique pour représenter l'évolution de l'état du fluide au cours du cycle d'une machine thermique :



• *Calculs de différentes grandeurs massiques sur le palier de changement d'état*



Un système diphasé L-G vérifie les relations suivantes :

$$\begin{cases} y = x_L y_L + x_G y_G \\ x_G = \frac{y - y_L}{y_G - y_L} = \frac{M_L M}{M_L M_G} \\ x_L = 1 - x_G = \frac{M M_G}{M_L M_G} \end{cases} \text{ qui peut aussi s'écrire : } \begin{cases} y = y_L + x_G \Delta y_{vap} \\ \Delta y = (x_{G2} - x_{G1}) \Delta y_{vap} \\ \Delta s = \frac{\Delta h}{T_{vap}} \text{ et } \Delta y_{vap} s = \frac{\Delta y_{vap} h}{T_{vap}} \\ \text{où } y = \{s, h, v, \dots\} \end{cases}$$

• *Calculs de différentes grandeurs massiques dans la zone liquide ou vapeur*

Zone liquide : $\begin{cases} dh = c_p dT = cdT \Rightarrow \Delta h = c \Delta T \\ ds = \frac{cdT}{T} \Rightarrow \Delta s = c \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) \end{cases}$ et zone vapeur assimilée à un gaz parfait : $\begin{cases} \Delta h = c_p \Delta T \text{ et } \Delta u = c_v \Delta T \\ \Delta s = c_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - \frac{R}{M} \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \end{cases}$

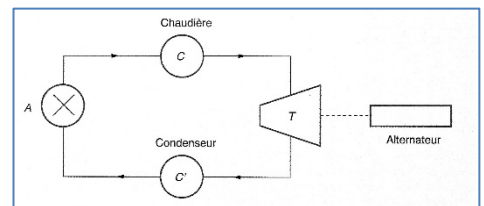
• *Formules de première année utiles sur les exercices des machines dithermes avec changement d'état*

Les relations de Mayer : $\begin{cases} c_p - c_v = \frac{R}{M} \text{ et } \frac{c_p}{c_v} = \gamma \\ c_p = \frac{R \gamma}{M \gamma - 1} \text{ et } c_v = \frac{R}{M \gamma - 1} \\ \text{En molaires : } C_{pm} = R \frac{\gamma}{\gamma - 1} \text{ et } C_{vm} = R \frac{1}{\gamma - 1} \end{cases}$, les lois de Laplace pour une transformation isentropique. $\begin{cases} pV^\gamma = cste \\ TV^{\gamma-1} = cste \\ T^\gamma p^{1-\gamma} = cste \end{cases}$

Rendement, efficacité et COP : $\begin{cases} \text{Moteur : } r = -\frac{w_{utile}}{q_{ch}} \text{ et } r_c = 1 - \frac{T_{fr}}{T_{ch}} = \frac{T_{ch} - T_{fr}}{T_{ch}} \\ \text{Machine frigorifique : } COP = \frac{q_{fr}}{w_{utile}} \text{ et } COP_c = \frac{T_{fr}}{T_{ch} - T_{fr}} \\ \text{Pompe à chaleur : } COP = -\frac{q_{ch}}{w_{utile}} \text{ et } COP_c = \frac{T_{ch}}{T_{ch} - T_{fr}} \end{cases}$

TH1 – SVF

- Rappeler les deux identités thermodynamiques de $U(S, V)$ et $H(S, P)$. En déduire deux expressions de dS pour un gaz parfait. En déduire une expression de dS en fonction de dV et dp . En déduire les lois de Laplace.
- Démontrez que $Q_v = \Delta U$ et $Q_p = \Delta H$
- Démontrez l'expression du rendement d'un moteur ditherme de Carnot puis les efficacités d'une pompe à chaleur ou d'un réfrigérateur fonctionnant suivant un cycle de Carnot.
- Démontrez les relations de Mayer.
- Expressions de dH et dS pour une phase condensée
- Démontrez le PPI en énergie puis en puissance.
- Démontrez le second principe de la thermodynamique pour un système ouvert.
- Tracer un cycle de Rankine en diagramme (T, s) et (P, h) . Dans un cycle de Rankine, le fluide est un liquide saturant après le condenseur, une vapeur saturante après la chaudière, un mélange diphasé à la sortie de la turbine. Dans la pompe et la turbine, les transformations sont isentropiques. Dans la chaudière et le condenseur elles sont isobares.
- Théorème des moments chimiques.



Exercices classiques à connaître :

- TH12 – Turbomachine avec changement d'état
- TH13 – Ecoulement supersonique

- a) Rappeler les deux identités thermodynamiques de $U(S, V)$ et $H(S, P)$. En déduire deux expressions de dS pour un gaz parfait. En déduire une expression de dS en fonction de dV et dp . En déduire les lois de Laplace.

Identités thermodynamiques : $dU = TdS - pdV$ et $dH = TdS + Vdp$

$$d'où \begin{cases} dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T}dV_{GP} \\ dS = \frac{dH}{T} - \frac{V}{T}dp \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dS = \frac{C_v dT}{T} + \frac{nR}{V}dV_{Mayer} \\ dS = \frac{C_p dT}{T} - \frac{nR}{p}dp \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dS = \frac{nR}{\gamma-1} \left(\frac{dT}{T} + (\gamma-1) \frac{dV}{V} \right) \\ dS = \frac{nR}{\gamma-1} \left(\gamma \frac{dT}{T} - (\gamma-1) \frac{dp}{p} \right) \end{cases}$$

En combinant les deux équations afin d'éliminer les $\frac{dT}{T}$:

$$dS_1 - \frac{dS_2}{\gamma} = \frac{nR}{\gamma-1} \left((\gamma-1) \frac{dV}{V} + \frac{(\gamma-1) dp}{p} \right) \Rightarrow \frac{(\gamma-1)}{\gamma} dS = nR \left(\frac{dV}{V} + \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{p} \right) \Rightarrow dS = \frac{nR}{\gamma-1} \left(\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} \right)$$

Les lois de Laplace sont valables pour les gaz parfaits qui effectuent des transformations isentropiques d'où $dS = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} dS = \frac{nR}{\gamma-1} \left(\frac{dT}{T} + (\gamma-1) \frac{dV}{V} \right) = 0 \\ dS = \frac{nR}{\gamma-1} \left(\gamma \frac{dT}{T} - (\gamma-1) \frac{dp}{p} \right) = 0 \\ dS = \frac{nR}{\gamma-1} \left(\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} \right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln(T) + (\gamma-1)\ln(V) = cste \\ \gamma \ln(T) - (\gamma-1)\ln(p) = cste \\ \gamma \ln(V) + \ln(p) = cste \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} TV^{\gamma-1} = cste \\ T^\gamma p^{1-\gamma} = cste \\ pV^\gamma = cste \end{cases}$$

On peut bien entendu retrouver facilement une formule à partir d'une autre à l'aide de $pV = nRT$

- b) Démontrez que $Q_v = \Delta U$ et $Q_p = \Delta H$

- Premier principe : $\Delta U = Q + W_{pression}$ or $W_{pression} = 0$ si transformation isochore.
 $\Rightarrow \Delta U = Q_v$
- Premier principe : $\Delta U = Q + W_{pression}$ or $W_{pression} = -p\Delta V$ si transformation isobare.
 $\Rightarrow \Delta U + p\Delta V = Q$ or $p = cste$ donc $\Rightarrow \Delta(U + pV) = Q \Rightarrow \Delta H = Q_p$

- c) Démontrez l'expression du rendement d'un moteur ditherme de Carnot puis les efficacités d'une pompe à chaleur ou d'un réfrigérateur fonctionnant suivant un cycle de Carnot.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Définitions : } r = -\frac{W}{Q_c}, \quad e_{fr} = \frac{Q_f}{W} \text{ et } e_{PAC} = -\frac{Q_c}{W} = \left(\frac{1}{r}\right) \\ \text{Premier principe sur un cycle : } \Delta U = W + Q_c + Q_f = 0 \\ \text{Second principe sur un cycle pour la réversibilité : } \Delta S = S_{ech} = 0 = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \end{array} \right.$$

(On a supposé les températures de contact avec les sources constantes)

$$\Rightarrow r = \frac{Q_c + Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} \stackrel{2PP}{\cong} 1 - \frac{T_f}{T_c} = \frac{T_c - T_f}{T_c} \text{ avec } 0 < r < 1$$

$$D'où e_{PAC} = \frac{T_c}{T_c - T_f}$$

Pour le réfrigérateur :

$$e_{fr} = \frac{Q_f}{W} = -\frac{Q_f}{Q_f + Q_c} = \frac{-1}{1 + \frac{Q_c}{Q_f}} = \frac{-1}{1 - \frac{T_c}{T_f}} = \frac{T_f}{T_c - T_f}$$

Dans les sujets de concours on appelle aussi ces rendements (efficacités) de Carnot, rendement maximal ou rendement réversible.

- d) Démontrez les relations de Mayer.

Par définition : $H = U + pV \stackrel{GP}{\cong} U + nRT \Rightarrow dH = dU + nRdT \Rightarrow C_p dT = C_v dT + nRdT \Rightarrow C_p - C_v = nR$

Que l'on peut aussi écrire en molaire et massique :

$$\begin{cases} C_{pm} - C_{vm} = R \\ c_p - c_v = \frac{R}{M} \end{cases}$$

$$\text{On pose : } \frac{C_p}{C_v} = \gamma \Rightarrow \gamma C_v - C_v = \frac{R}{M} \Rightarrow \begin{cases} c_v = \frac{R}{M} \frac{1}{\gamma-1} \\ c_p = \frac{R}{M} \frac{\gamma}{\gamma-1} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} C_v = nR \frac{1}{\gamma-1} \\ C_p = nR \frac{\gamma}{\gamma-1} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} C_{vm} = \frac{R}{\gamma-1} \\ C_{pm} = \gamma \frac{R}{\gamma-1} \end{cases} \text{ valables pour les GP}$$

- e) Expressions de du , dh , ds et Δs pour une phase condensée :

Identités thermodynamiques :

$$\begin{cases} du = Tds - pdv \\ dh = Tds + vdp \end{cases}$$

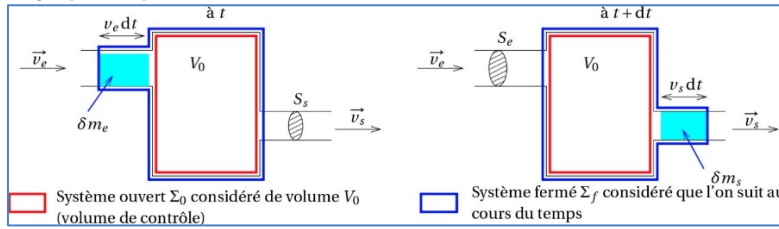
Dans le cas d'une phase condensée $dv \sim 0$ (fluide incompressible) et $v \ll 1 \Rightarrow du = dh = Tds$

D'après la première loi et la seconde loi de Joule : $du = c_v dT$ et $dh = c_p dT \Rightarrow \mathbf{du = dh = cdT}$

Et : $ds = \frac{cdT}{T}$

$$\Rightarrow \Delta S = c \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) \text{ (On suppose } c \text{ constant)}$$

f) Démontrez le PPI en énergie puis en puissance.



On applique le premier principe au système fermé Σ_f entre t et $t+dt$:

$$dU + dE_c + dE_{p,ext} = \delta W + \delta Q$$

Afin de simplifier le calcul, on note $\underline{U} = U + E_c + E_{p,ext}$

D'où :

$$\underbrace{dU_{\Sigma_f}}_{\text{variation d'énergie dans } \Sigma_f} = \underbrace{\delta W_u}_{\text{travail utile ou travail "autre"}} + \underbrace{\delta W_p}_{\text{travail des forces de pression}} + \underbrace{\delta Q}_{\text{Echange d'énergie sous forme de chaleur}}$$

On calcule les différents termes :

$$\left\{ \begin{aligned} dU_{\Sigma_f} &= dU_{\Sigma_0} + \delta m_s \underline{u}_s - \delta m_e \underline{u}_e \\ \delta W_u &= P_u dt \\ \delta Q &= P_{th} dt \\ \delta W_p &= -p_s \delta V_s + p_e \delta V_e = -\frac{p_s}{\mu_s} \delta m_s + \frac{p_e}{\mu_e} \delta m_e = -\frac{p_s}{\mu_s} \delta m_s + \frac{p_e}{\mu_e} \delta m_e = -p_s v_s \delta m_s + p_e v_e \delta m_e \end{aligned} \right.$$

D'où le bilan :

$$dU_{\Sigma_0} + \delta m_s \underline{u}_s - \delta m_e \underline{u}_e = \delta W_u + \delta Q - p_s v_s \delta m_s + p_e v_e \delta m_e$$

$$\Leftrightarrow dU_{\Sigma_0} + \delta m_s (\underline{u}_s + p_s v_s) - \delta m_e (\underline{u}_e + p_e v_e) = \delta W_u + \delta Q$$

Or l'enthalpie est définie par : $H = U + pV \Rightarrow h = u + pv$

$$\Rightarrow dU_{\Sigma_0} + \delta m_s \underline{h}_s - \delta m_e \underline{h}_e = \delta W_u + \delta Q$$

On se place en régime stationnaire : $\begin{cases} dU_{\Sigma_0} = 0 \\ \delta m_s = \delta m_e = \delta m \end{cases}$

D'où :

$$\begin{aligned} \delta m (\underline{h}_s - \underline{h}_e) &= \delta W_u + \delta Q \quad (1) \\ \Rightarrow \underline{h}_s - \underline{h}_e &= w_u + q \\ \Rightarrow \left[h + \frac{v^2}{2} + gz \right]_e^s &= w_u + q \quad \text{où } w_u = \frac{\delta W_u}{\delta m} \text{ et } q = \frac{\delta Q}{\delta m} \end{aligned}$$

- En termes de puissance on « divise » (1) par dt :

$$D_m (\underline{h}_s - \underline{h}_e) = P_u + P_{th}$$

g) Démontrez le second principe de la thermodynamique pour un système ouvert.

D'après le second principe sur un système fermé : $dS_{\Sigma_f} = S_{\Sigma_f}(t+dt) - S_{\Sigma_f}(t) = \delta S_{ech} + \delta S_c$

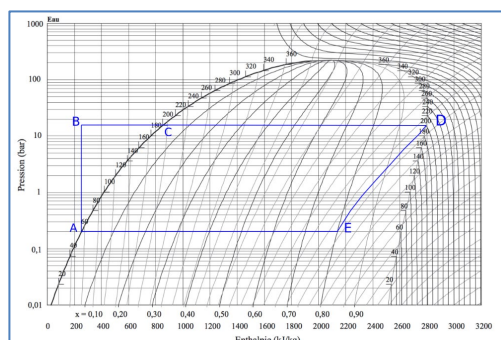
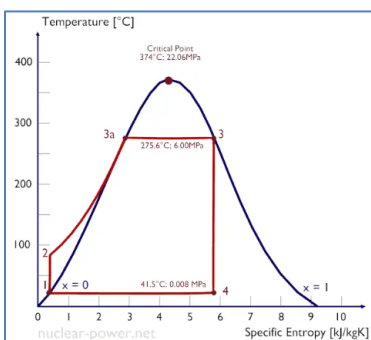
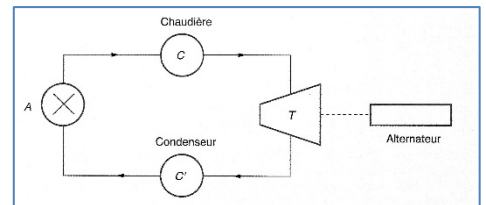
L'entropie étant extensive, on définit pour chacun des éléments de fluide Σ_s et Σ_e les entropies massiques s_e et s_c d'où :

$$dS_{\Sigma_0} + \delta m_s s_s - \delta m_e s_e = \delta S_{ech} + \delta S_c$$

On se place en régime stationnaire : $\begin{cases} dS_{\Sigma_0} = 0 \\ \delta m_s = \delta m_e = \delta m \end{cases}$

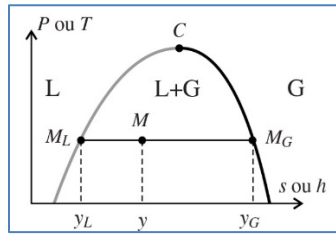
$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta m (s_s - s_e) &= \delta S_{ech} + \delta S_c \Leftrightarrow s_s - s_e = \frac{\delta S_{ech}}{\delta m} + \frac{\delta S_c}{\delta m} \\ \Leftrightarrow s_s - s_e &= s_{ech} + s_{crée} \end{aligned}$$

h) Tracer un cycle de Rankine en diagramme (T,s) et (P,h) . Dans un cycle de Rankine, le fluide est un liquide saturant après le condenseur, une vapeur saturante après la chaudière, un mélange diphasé à la sortie de la turbine. Dans la pompe et la turbine, les transformations sont isentropiques. Dans la chaudière et le condenseur elles sont isobares.



Souvent le cycle de Rankine est amélioré par un surchauffeur afin de maintenir E dans la zone vapeur saturante (le point D se retrouve dans la zone vapeur sèche) ainsi les pales de la turbine sont moins endommagées.

i) Théorème des moments chimiques



Quel que soit le diagramme utilisé les relations restent les mêmes en $(\ln p, h)$, (T, s) , (p, v) ou (h, s) .

Pour un milieu diphasé on a :

$$\begin{cases} y = x_L y_L + x_G y_G \\ \text{ou} \\ Y = m_L y_L + m_G y_G \end{cases}$$

Or : $x_L + x_G = 1 \Rightarrow y = (1 - x_G) y_L + x_G y_G$

Par conséquent : $x_G = \frac{y - y_L}{y_G - y_L}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{y - y_L}{y_G - y_L} = \frac{M_L M}{M_L M_G} \\ x_L = 1 - x_G = \frac{M M_G}{M_L M_G} \end{cases}$$

Si on introduit les grandeurs de changement d'état on peut aussi écrire : $y = y_L + x_G \Delta_{vap} y$

TH2 – Synthèse

• Flux de particules

Le nombre de particules δN traversant une surface élémentaire orientée \vec{dS} pendant dt est : $\delta N = \vec{j}_n \cdot \vec{dS} dt$

Où \vec{j}_n est le vecteur densité de flux de particules.

Le flux de particules au travers d'une section S est : $\frac{\phi_n(t)}{s^{-1}} = \frac{\delta N}{dt} = \iint_S \vec{j}_n(M, t) \cdot \vec{dS}$

Les particules qui se déplacent participent au flux positivement si elles traversent la surface dans le sens de \vec{dS} , négativement sinon.

• Bilan de particules

Le nombre de particules entrant (et sortant) dans le volume $d\tau$ entre t et $t + dt$ s'écrit :

$$\delta N_{\text{éch}} = (\phi_n(x, t) dt - \phi_n(x + dx, t) dt) = -\frac{\partial \phi_n}{\partial x} dx dt = -\frac{\partial j_n}{\partial x} d\tau dt \stackrel{3D}{\rightleftharpoons} \delta N_{\text{éch}} = -\text{div} \vec{j}_n(M, t) d\tau dt$$

Le nombre de particules créées dans le volume $d\tau$ entre t et $t + dt$ s'écrit : $\delta N_c = \alpha(M, t) d\tau dt$

La variation du nombre de particules dans le volume $d\tau$ entre t et $t + dt$ est $dN = \delta N_c + \delta N_{\text{éch}}$. On en déduit le bilan local de particules :

$$\frac{\partial n(M, t)}{\partial t} = -\text{div} \vec{j}_n(M, t) + \alpha(M, t)$$

• Loi de Fick et équation de diffusion

Loi de Fick $\vec{j}_n = -D \overrightarrow{\text{grad}} n \Rightarrow \frac{\partial n(M, t)}{\partial t} = D \frac{\Delta n(M, t)}{m^2 s^{-1}} + \alpha(M, t)$. Dans le cas d'absence de termes de création : $\frac{\partial n(M, t)}{\partial t} = D \Delta n(M, t)$

Les échelles caractéristiques spatiale δ et temporelle τ d'un phénomène de diffusion sont liées par la relation : $\delta \sim \sqrt{D\tau}$

Le phénomène de diffusion peut être modélisé microscopiquement comme une marche au hasard de la particule diffusante. Dans le cas d'un gaz, la particule diffusante se déplace à la vitesse quadratique moyenne v^* et subit des chocs espacés en moyenne d'une distance égale au libre parcours moyen ℓ^* du gaz. Le coefficient de diffusion dans un gaz s'écrit alors : $D \sim \ell^* v^*$.

• Régime stationnaire

En régime stationnaire, l'équation de la diffusion devient : $\Delta n(M) = 0$ ou $\frac{d^2 n}{dx^2} = 0$ ou $\text{div} \vec{j}_n = 0 \dots$; Il s'ensuit que le flux de particules se conserve en régime stationnaire le long d'un tube de champ de \vec{j}_n . On dit que \vec{j}_n est à flux conservatif.

TH2 – SVF

- Montrer que le vecteur densité de courant de particules en un point M de l'espace vérifie : $\vec{j}(M, t) = n(M, t) \vec{v}(M, t)$.
- Démontrer l'équation de la diffusion de particules à une dimension à l'aide d'un bilan local de particules. Généraliser le résultat à trois dimensions.
- Démontrer l'équation de la diffusion de particules en 3D à l'aide d'un bilan global de particules.
- Donner l'expression de $n(x)$ dans le cas d'un régime stationnaire tel que : $n(0) = n_1, n(L) = n_2$ en absence de sources.
- Relier le temps caractéristique de diffusion thermique et la longueur caractéristique de la diffusion thermique.
- Donner une expression du coefficient de diffusion à l'aide d'une approche microscopique de la marche au hasard.

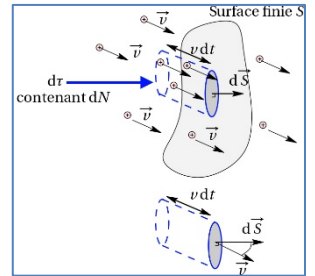
a) Montrer que le vecteur densité de courant de particules en un point M de l'espace vérifie : $\vec{j}_n(M, t) = n(M, t)\vec{v}(M, t)$.

Exprimons le nombre de particules δ^3N traversant la surface \vec{dS} entre l'instant t et l'instant $t + dt$: ces δ^3N particules sont contenues dans le cylindre dont les génératrices sont parallèles à \vec{v} et de longueur $\vec{v}dt$.

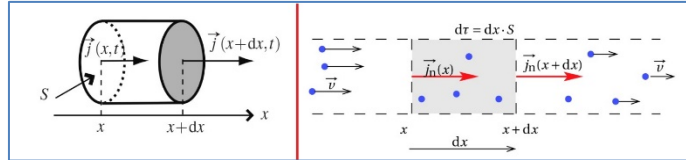
Ce cylindre a pour volume : $d\tau = \vec{v}dt dS \cos\theta = \vec{v} \cdot \vec{dS} dt \Rightarrow \delta^3N = n \vec{v} \cdot \vec{dS} dt$

$$\Rightarrow d\phi_n = \frac{\delta^3N}{dt} = n \vec{v} \cdot \vec{dS} = \vec{j}_n \cdot \vec{dS}$$

$$\Rightarrow \vec{j}_n(M, t) = n(M, t) \vec{v}(M, t)$$



b) Démontrer l'équation de la diffusion de particules à une dimension à l'aide d'un bilan local de particules. Généraliser le résultat à trois dimensions.



On effectue un bilan de particules sur le système Σ de volume $d\tau = Sdx$, entre les dates t et $t+dt$ tel que : $dN = \delta N_{ech} + \delta N_c$

• La variation de particules entre t et $t+dt$ peut s'écrire :

$$dN = \delta N(t + dt) - \delta N(t) = \delta N_{ech} + \delta N_c \text{ où } \begin{cases} \delta N_{ech} = (\phi_n(x, t)dt - \phi_n(x + dx, t))dt \\ \delta N_c = \frac{\alpha(x, t)}{m^{-3}s^{-1}} d\tau dt \end{cases}$$

Donc :

$$\frac{\partial n}{\partial t} dt d\tau = -\frac{\partial \phi_n}{\partial x} dx dt + \alpha(x, t) d\tau dt \text{ où } \phi_n = j_n S \text{ avec } S = cste$$

$$\Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} d\tau = -\frac{\partial j_n}{\partial x} d\tau + \alpha(x, t) d\tau$$

$$\Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial j_n}{\partial x} + \alpha(x, t) \text{ (équation de conservation)}$$

Loi de Fick : $\vec{j}_n = -D \frac{\partial n}{\partial x} \vec{u}_x$

$$\Rightarrow \frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2} + \alpha(x, t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial n(M, t)}{\partial t} = D \Delta n(M, t) + \alpha(x, t)$$

En absence de sources de création ou de destruction :

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2} \text{ et en 3D : } \frac{\partial n(M, t)}{\partial t} = D \Delta n(M, t)$$

c) Démontrer l'équation de la diffusion de particules en 3D à l'aide d'un bilan global de particules.

Soit $N(t)$ le nombre de particules dans le volume V délimité par S à la date t :

$$N(t) = \iiint_V n(M, t) d\tau$$

Et à $t+dt$:

$$N(t + dt) = \iiint_V n(M, t + dt) d\tau$$

D'où :

$$dN = \iiint_V (n(M, t + dt) - n(M, t)) d\tau \Rightarrow dN \sim \iiint_V \frac{\partial n(M, t)}{\partial t} dt d\tau$$

Par sa frontière le volume $d\tau$ reçoit de l'extérieur :

$$\delta N_{ech} = -\oint_S \vec{j}_n \cdot \vec{dS}_{ext} dt$$

Si on tient compte d'un terme de création :

$$\delta N_c = \iiint_V \alpha d\tau dt$$

Avec le théorème de Green-Ostrogradski :

$$dN = -\iiint_V \text{div}(\vec{j}_n) d\tau dt + \iiint_V \alpha d\tau dt$$

Le bilan de particules devient donc :

$$\iiint_V \frac{\partial n}{\partial t} dt d\tau = \iiint_V (\alpha - \text{div}(\vec{j}_n)) d\tau dt \Leftrightarrow \iiint_V \left(\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}_n) - \alpha \right) dt d\tau = 0$$

Cette égalité est vraie pour tout volume V , par conséquent :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}_n) = \alpha$$

Avec la loi de Fick $\vec{j}_n = -D \vec{\text{grad}} n(M, t)$ on peut écrire :

$$\frac{\partial n(M, t)}{\partial t} = D \Delta n(M, t) + \alpha(M, t) \Rightarrow \frac{\partial n(M, t)}{\partial t} = D \Delta n(M, t) \text{ en absence de termes de sources.}$$

d) Donner l'expression de $n(x)$ dans le cas d'un régime stationnaire tel que : $n(0) = n_1, n(L) = n_2$ en absence de sources.

$$\text{div} \vec{j}_n = 0 \Rightarrow \frac{\partial j_{n,x}}{\partial x} = 0 \Rightarrow j_n = cste \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial x} = cste \Rightarrow n(x) = Ax + B \text{ où } \begin{cases} n(0) = n_1 \\ n(L) = n_2 \end{cases}$$

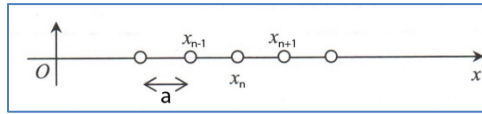
$$\Rightarrow n(x) = \frac{n_2 - n_1}{L} x + n_1$$

e) Relier le temps caractéristique de diffusion thermique et la longueur caractéristique de la diffusion thermique.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{L'ordre de grandeur de } \frac{\partial n}{\partial t} \text{ est } \frac{n^*}{\tau} \\ \text{L'ordre de grandeur de } \Delta n \text{ est } \frac{n^*}{l^2} \end{array} \right. \text{ où } \tau \text{ et } l \text{ sont les grandeurs caractéristiques de temps et d'espace de la diffusion.}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial n(M, t)}{\partial t} = D \Delta n(M, t) \text{ s'écrit en ODG : } \frac{n^*}{\tau} \sim D \frac{n^*}{l^2} \Rightarrow l^2 \sim D\tau$$

f) Donner une expression du coefficient de diffusion à l'aide d'une approche microscopique de la marche au hasard.



Soit $p(x_n, t)$ la probabilité pour A d'être en x_n à l'instant t en étant partie de O. Si à l'instant $t + \tau$, la particule est en x_n , c'est qu'à l'instant t , elle était soit en x_{n-1} , soit en x_{n+1} , avec une même probabilité.

$$\Rightarrow p(x_n, t + \tau) = \frac{p(x_{n-1}, t) + p(x_{n+1}, t)}{2}$$

On suppose que « a » est très faible devant les dimensions macroscopiques. On peut alors définir une fonction $p(x, t)$ coïncidant avec $p(x_n, t)$ pour tout n , définie pour tout x . On peut alors écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} p(x_{n+1}, t) = p(x_n, t) + \frac{\partial p}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} a^2 + o(a^2) \\ p(x_{n-1}, t) = p(x_n, t) - \frac{\partial p}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} a^2 + o(a^2) \\ p(x_n, t + \tau) = p(x_n, t) + \tau \frac{\partial p}{\partial t} + o(\tau) \end{array} \right.$$

Or :

$$p(x_n, t + \tau) = \frac{p(x_{n-1}, t) + p(x_{n+1}, t)}{2} \Rightarrow \tau \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} a^2 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{a^2}{2\tau} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

La probabilité de trouver la particule à l'instant t à l'abscisse x est donc solution d'une équation de la diffusion avec le coefficient de diffusion :

$$D = \frac{a^2}{2\tau}$$

Dans le cas d'un modèle gazeux : $a = l$ où l : libre parcours moyen et $\tau = \frac{l}{u}$ où u vitesse quadratique moyenne d'où :

$$D = \frac{a^2}{2\tau} = \frac{lu}{2}$$

Exercices classiques à connaître :

- TH21 ou TH26 : Axone
- TH28 (plus difficile) : Diffusion de neutrons dans un réacteur nucléaire

TH3 – Synthèse

• Flux thermique

Le transfert thermique δQ traversant une surface élémentaire orientée \vec{dS} pendant dt est : $\delta Q = \vec{j}_{th} \cdot \vec{dS} dt$

Où \vec{j}_{th} est le vecteur densité de flux thermique.

Le flux thermique au travers d'une section S est : $\phi_{th}(t) = \frac{\delta Q}{dt} = \iint_S \vec{j}_{th}(M, t) \cdot \vec{dS}$

Le transfert thermique est compté positivement si $\vec{j}_{th}(M, t)$ et \vec{dS} sont de même sens, négativement sinon.

• Bilan d'énergie

Le transfert thermique entrant (et sortant) dans le volume $d\tau$ entre t et $t + dt$ s'écrit :

$$\delta Q_{ech} = (\phi_{th}(x, t) dt - \phi_{th}(x + dx, t) dt) = - \frac{\partial \phi_{th}}{\partial x} dx dt = - \frac{\partial j_{th}}{\partial x} d\tau dt \stackrel{3D}{\Rightarrow} \delta Q_{ech} = -div \vec{j}_{th}(M, t) d\tau dt$$

L'énergie créée dans le volume $d\tau$ entre t et $t + dt$ s'écrit : $\delta Q_c = \alpha(M, t) d\tau dt$

La variation d'énergie dans le volume $d\tau$ entre t et $t + dt$ est $dU = \delta Q_c + \delta Q_{ech}$. On en déduit le bilan local thermique :

$$\rho c \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = -div \vec{j}_{th}(M, t) + \alpha(M, t)$$

• Loi de Fourier et équation de diffusion

Loi de Fick $\vec{j}_{th} = - \frac{\lambda}{W \cdot m^{-2}} \overrightarrow{grad} T \Rightarrow \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = \frac{D_{th}}{m^2 \cdot s^{-1}} \frac{\Delta T(M, t)}{K \cdot m^{-2}} + \alpha(M, t)$. Dans le cas d'absence de termes de création : $\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = D_{th} \Delta T(M, t)$

Où $D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c}$ est le coefficient de diffusion thermique.

Les échelles caractéristiques spatiale δ et temporelle τ d'un phénomène de diffusion sont liées par la relation : $\delta \sim \sqrt{D_{th} \tau}$

Le phénomène de diffusion est irréversible, en effet l'équation de diffusion est non invariante par renversement du temps ($t \rightarrow -t$).

• Régime stationnaire

En régime stationnaire, l'équation de la diffusion devient : $\Delta T(M) = 0$ ou $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$ ou $div \vec{j}_{th} = 0 \dots$; Il s'ensuit que le flux thermique se conserve en régime stationnaire le long d'un tube de champ de \vec{j}_{th} . On dit que \vec{j}_{th} est à flux conservatif.

On introduit la résistance thermique par : $T_1 - T_2 = R_{th} \phi_{1 \rightarrow 2}$ avec $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$ en coordonnées cartésiennes.

Les associations des résistances thermiques sont analogues aux résistances électriques.

TH3 – SVF

- a) Démontrez l'équation de la chaleur à une dimension à l'aide d'un bilan local puis généraliser à 3D.
- b) Démontrez l'équation de la chaleur à une dimension dans le cas d'une symétrie cylindrique.
- c) Démontrez l'équation de la chaleur à une dimension dans le cas d'une symétrie sphérique.
- d) Démontrez l'équation de la chaleur à 3D à l'aide d'un bilan global.
- e) Relier le temps caractéristique de diffusion thermique à la longueur caractéristique de diffusion thermique.
- f) Établir l'expression de $T(x)$ en régime stationnaire (et en absence de termes de création). Retrouver l'expression de la résistance thermique en coordonnées cartésiennes. Faire l'analogie avec l'électricité dans le cas d'associations parallèle ou série.
- g) Retrouver l'expression de la résistance thermique en coordonnées cylindriques et sphériques.

a) Démontrez l'équation de la chaleur à une dimension puis généraliser à 3D.

Bilan thermique appliqué au volume compris entre x et $x+dx$:

$$dU = \delta Q_{\text{éch}} + \delta Q_c \text{ où } \begin{cases} dU = \delta mc(T(x, t + dt) - T(x, t)) \sim \delta mc \frac{\partial T}{\partial t} dt \\ \delta Q_{\text{éch}} = \delta Q_x - \delta Q_{x+dx} = (\phi_{th}(x) - \phi_{th}(x + dx)) dt = -\frac{\partial \phi_{th}(x, t)}{\partial x} dx dt = -\frac{\partial (j_{th}(x, t)S)}{\partial x} dx dt \\ \delta Q_c = \frac{P_v}{\omega m^{-3}} S dx dt \end{cases}$$

- D'où le bilan vu que S est constante :

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} S dx dt &= -\frac{\partial j_{th}(x, t)}{\partial x} S dx dt + P_v S dx dt \\ \Leftrightarrow \rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial j_{th}(x, t)}{\partial x} + P_v \end{aligned}$$

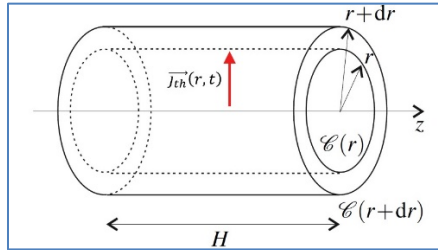
Avec la loi de Fourier $\vec{j}_{th}(x, t) = -\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \vec{u}_x$ on obtient :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = D_{th} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + \frac{P_v}{\rho c} \text{ où } D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c}$$

En absence de sources on obtient :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = D_{th} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = D_{th} \Delta T(M, t)$$

b) Démontrez l'équation de la chaleur à une dimension dans le cas d'une symétrie cylindrique.



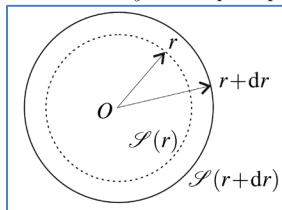
Bilan thermique appliqué au volume compris entre deux cylindres $C(r)$ et $C(r + dr)$.

$$\begin{aligned} dU &= \delta Q_{\text{éch}} + \delta Q_c \\ Or \begin{cases} dU = \delta mc(T(r, t + dt) - T(r, t)) = \rho d\tau c \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} dt \\ \delta Q_{\text{éch}} = (\phi_{th}(r, t) - \phi_{th}(r + dr, t)) dt = -\frac{\partial \phi_{th}(r, t)}{\partial r} dr dt \\ \delta Q_c = P_v d\tau dt \end{cases} \\ &\Rightarrow \rho d\tau c \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} dt = -\frac{\partial (j_{th}(r, t)S(r))}{\partial r} dr dt + P_v d\tau dt \\ \Leftrightarrow \rho c 2\pi r dr H \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial (j_{th}(r, t) 2\pi r H)}{\partial r} dr + P_v 2\pi r dr H \quad \Delta \text{ Ne pas sortir } S(r) \text{ de la dérivée} \\ \Leftrightarrow \rho c \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial (r j_{th}(r, t))}{\partial r} + P_v \end{aligned}$$

Avec la loi de Fourier $\vec{j}_{th}(r, t) = -\lambda \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \vec{u}_r$ et en absence de sources on obtient :

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Rightarrow \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = D_{th} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

c) Démontrez l'équation de la chaleur à une dimension dans le cas d'une symétrie sphérique.



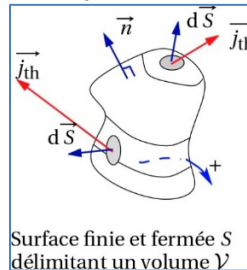
Bilan thermique appliqué au volume compris entre deux sphères $S(r)$ et $S(r + dr)$: $dU = \delta Q_{\text{éch}} + \delta Q_c$

$$\begin{aligned}
 \text{Or } \begin{cases} dU = \delta mc(T(r, t + dt) - T(r, t)) = \rho d\tau c \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} dt \\ \delta Q_{\text{éch}} = (\phi_{th}(r, t) - \phi_{th}(r + dr, t))dt = -\frac{\partial \phi_{th}(r, t)}{\partial r} dr dt \\ \delta Q_c = P_v dt dt \end{cases} \\
 \Rightarrow \rho c d\tau c \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} dt = -\frac{\partial(j_{th}(r, t)S(r))}{\partial r} dr dt + P_v dt dt \quad \Delta \text{ Ne pas sortir } S(r) \text{ de la dérivée} \\
 \Leftrightarrow \rho c 4\pi r^2 dr \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = -\frac{\partial(j_{th}(r, t)4\pi r^2)}{\partial r} dr + P_v 4\pi r^2 dr \\
 \Leftrightarrow \rho c \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 j_{th}(r, t))}{\partial r} + P_v
 \end{aligned}$$

Avec la loi de Fourier $\vec{j}_{th}(r, t) = -\lambda \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \vec{u}_r$ et en absence de sources on obtient :

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial(r^2 \frac{\partial T}{\partial r})}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = D_{th} \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \frac{\partial T}{\partial r})}{\partial r}$$

d) Démontrez l'équation de la chaleur à 3D à l'aide d'un bilan global.



Bilan thermique entre t et $t + dt$ pour un volume V délimité par la surface S :

$$dU = \delta Q_{\text{éch}} + \delta Q_c$$

Avec :

$$\begin{cases} dU = \iiint_{M \in V} (T(M, t + dt) - T(M, t)) \rho c d\tau = \iiint_{M \in V} \rho c \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} dt d\tau \\ \delta Q_{\text{éch}} = \phi_{th} dt = -\oint_{P \in S} \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} dt = -\iiint_{M \in V} \text{div} \vec{j}_{th} d\tau dt \\ \delta Q_c = \iiint_{M \in V} P_v(M, t) dt d\tau \end{cases} \\
 \Rightarrow \iiint_{M \in V} \left(\rho c \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_{th}(M, t) - P_v(M, t) \right) d\tau$$

Ceci étant vrai pour tout V, on retrouve le bilan local :

$$\rho c \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_{th}(M, t) = P_v(M, t)$$

Avec la loi de Fourier : $\vec{j}_{th}(M, t) = -\lambda \text{grad} T(M, t)$ on obtient :

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = D_{th} \Delta T(M, t) + \frac{P_v(M, t)}{\rho c}$$

e) Relier le temps caractéristique de diffusion thermique à la longueur caractéristique de diffusion thermique.

Par une analyse en ordre de grandeur l'équation de diffusion s'écrit :

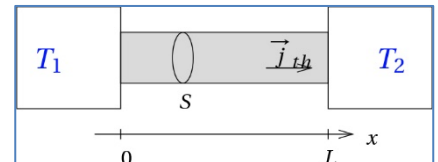
$$\frac{T^*}{\tau} \sim D_{th} \frac{T^*}{L^2} \Rightarrow L \sim \sqrt{D_{th} \tau} \text{ ou } \tau \sim \frac{L^2}{D_{th}}$$

f) Établir l'expression de $T(x)$ en régime stationnaire (et en absence de termes de création). Retrouver l'expression de la résistance thermique en coordonnées cartésiennes. Faire l'analogie avec l'électricité dans le cas d'associations parallèle ou série.

Considérons un cylindre d'axe Ox de section S et de longueur L, en contact avec deux thermostats de température T_1 et T_2 :

On se place en régime stationnaire ainsi :

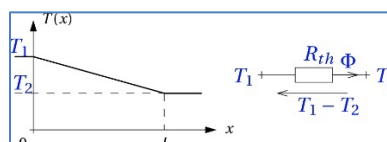
$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \Rightarrow T(x) = Ax + B \\
 \text{Or : } \begin{cases} T(0) = T_1 \\ T(L) = T_2 \end{cases} &\Rightarrow T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1 \\
 \Rightarrow \begin{cases} j_{th} = -\lambda \frac{dT}{dx} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} \\ \phi_{th} = \lambda S \frac{T_1 - T_2}{L} \end{cases}
 \end{aligned}$$



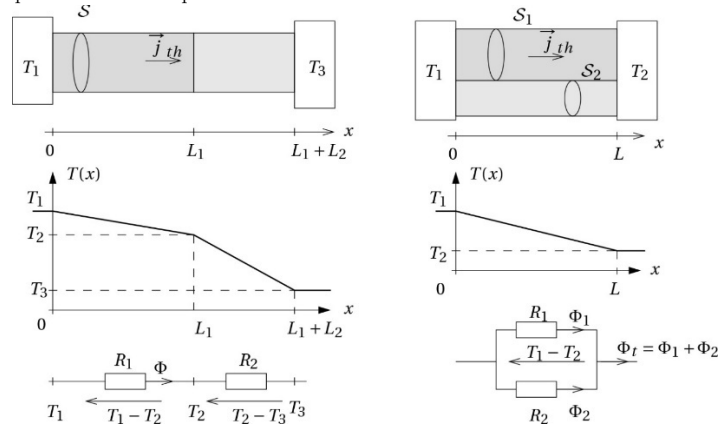
On peut réécrire ce résultat sous la forme :

$$T_1 - T_2 = R_{th} \phi_{th,1 \rightarrow 2} \text{ où } R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$$

Ce résultat est analogue à la loi d'Ohm rencontrée en électrocinétique : $V_1 - V_2 = R_{\text{elec}} i_{1 \rightarrow 2}$ où $R_{\text{elec}} = \frac{L}{\sigma S}$

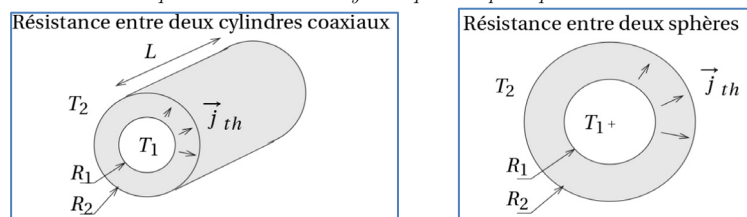


On va retrouver les mêmes lois d'association qu'en électrocinétique :



- Association en série (à gauche) : (Les températures « externes » sont différentes comme les potentiels en électrocinétique)
 $T_1 - T_3 = (T_1 - T_2) + (T_2 - T_3) \Leftrightarrow R_{th,s} \phi_{th} = R_{th,1} \phi_{th} + R_{th,2} \phi_{th} \Leftrightarrow R_{th,s} = R_{th,1} + R_{th,2}$
- Association en parallèle (à droite) : (Les températures « externes » sont identiques comme les potentiels en électrocinétique)
 $\phi_{th,t} = \phi_{th,1} + \phi_{th,2} \Leftrightarrow \frac{T_1 - T_2}{R_{th,p}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th,1}} + \frac{T_1 - T_2}{R_{th,2}} \Leftrightarrow \frac{1}{R_{th,p}} = \frac{1}{R_{th,1}} + \frac{1}{R_{th,2}}$

g) Retrouver l'expression de la résistance thermique en coordonnées cylindriques et sphériques.



Intéressons-nous pour commencer au cas de la résistance thermique cylindrique.

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{j}_{th} = 0 &\Rightarrow \iiint_S \vec{j}_{th} \cdot \vec{dS} = 0 \Rightarrow \phi_{th} = cste = \phi_0 \Rightarrow j_{th}(r) 2\pi r L = \phi_0 \\ &\Rightarrow -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} 2\pi r L = \phi_0 \\ &\Rightarrow \int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{\phi_0}{2\pi\lambda L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \\ &\Rightarrow T_2 - T_1 = -\frac{\phi_0}{2\pi\lambda L} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \\ &\Rightarrow T_1 - T_2 = R_{th} \phi_{th,1 \rightarrow 2} \text{ où } R_{th} = \frac{1}{2\pi\lambda L} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \end{aligned}$$

En sphériques, l'expression de $S(r)$ va très légèrement modifier la démonstration :

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{j}_{th} = 0 &\Rightarrow \iiint_S \vec{j}_{th} \cdot \vec{dS} = 0 \Rightarrow \phi_{th} = cste = \phi_0 \Rightarrow j_{th}(r) 4\pi r^2 = \phi_0 \\ &\Rightarrow \int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} \\ &\Rightarrow T_2 - T_1 = \frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \\ &T_1 - T_2 = R_{th} \phi_{th,1 \rightarrow 2} \text{ où } R_{th} = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \end{aligned}$$

Exercices classiques à connaître :

- TH31 : Taille des mammifères marins.
- TH32 : Ailette de refroidissement.
- TH34 : Effet « cave ».
- TH36 : Résistances thermiques en cylindriques et sphériques.

TH4 – Synthèse

• Rayonnement thermique

Tout corps chaud de température de surface T émet un rayonnement électromagnétique appelé rayonnement thermique dont le spectre ne dépend que de la température T . Le corps chaud peut être modélisé par un corps noir dont le spectre est caractérisé par deux lois :

- Loi de Wien : le spectre du rayonnement thermique d'un corps de température de surface T présente un maximum à la longueur d'onde λ_m telle que : $\lambda_m T = 2898 \mu\text{m} \cdot \text{K} \sim 3000 \mu\text{m} \cdot \text{K}$.
- Loi de Stefan : la puissance surfacique totale φ émise par un corps de température de surface T est : $\varphi = \sigma T^4$ avec $\sigma = 5,67 \cdot 10^8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$.
 Dans le bilan radiatif de la Terre, l'atmosphère, supposée complètement opaque dans le domaine infrarouge, joue un rôle de confinement du flux surfacique émis par la Terre : c'est l'effet de serre.

TH4 – SVF

- a) À l'aide d'un bilan radiatif sur la terre, montrer que la température de surface d'équilibre est proche de 20°C . On notera A l'albédo.
Données : $T_s = 5800\text{K}$, $R_s = 700000\text{km}$, $D = 150 \cdot 10^6\text{km}$, $R_T = 6400\text{km}$, $A = 0,31$, $\sigma = 5,67 \cdot 10^8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$.

- Flux surfacique solaire reçu par la terre :

Le Soleil de rayon $R_s = 700000\text{km}$ présente une température de surface de $T_s = 5800\text{K}$, la loi de Stefan permet de calculer la puissance totale émise par le soleil :

$$P_{s,tot} = \phi_s S_s = \sigma T_s^4 \times 4\pi R_s^2 = 3,8 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

Ce rayonnement est émis par le soleil de manière isotrope. La Terre de rayon $R_T = 6400\text{km}$ située à une distance $D = 150 \cdot 10^6\text{km}$ du soleil, en récupère une fraction :

$$P_s = P_{s,tot} \times \frac{S_{disque}}{S_{ST}}$$

$$\text{où } \begin{cases} S_{disque} = \pi R_T^2 \\ S_{ST} = 4\pi D^2 \text{ où } D = d_{TS} = 150 \cdot 10^6 \text{ km} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_s = \sigma T_s^4 4\pi R_s^2 \times \frac{\pi R_T^2}{4\pi D^2} = \pi \sigma T_s^4 \times \frac{R_s^2 R_T^2}{D^2} = 1,7 \cdot 10^{17} \text{ W}$$

On peut en déduire le flux solaire surfacique moyen en haut de l'atmosphère :

$$\varphi_s = \frac{P_s}{\pi R_T^2} = 1,3 \cdot 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \sim 1 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$$

On va tenir compte de l'albédo qui représente la réflexion par l'atmosphère d'une part du rayonnement solaire

- Bilan radiatif sur la Terre :

$$4\pi R_T^2 \varphi_T = (1 - A)\pi R_T^2 \varphi_s + 4\pi R_T^2 \varphi_a$$

$$\Rightarrow \varphi_T = \frac{1 - A}{4} \varphi_s + \varphi_a$$

- Bilan radiatif sur l'atmosphère :

$$\varphi_T \times 4\pi R_T^2 = 2\varphi_a \times 4\pi R_T^2 \text{ (les } \varphi_s \text{ se simplifient)}$$

$$\Rightarrow \varphi_T = 2\varphi_a$$

Par conséquent :

$$\varphi_T = \frac{1 - A}{4} \varphi_s + \frac{\varphi_T}{2} \Rightarrow \varphi_T = \frac{1 - A}{2} \varphi_s$$

$$\Rightarrow T_T = \left((1 - A) \frac{\varphi_s}{2\sigma} \right)^{1/4} = 3,0 \cdot 10^2 \text{ K}$$

Avec ce modèle, on trouve une température moyenne de surface de la Terre de l'ordre de quelques dizaines de degrés.

Exercices classiques à connaître :

- TH42 – L'effet de serre

