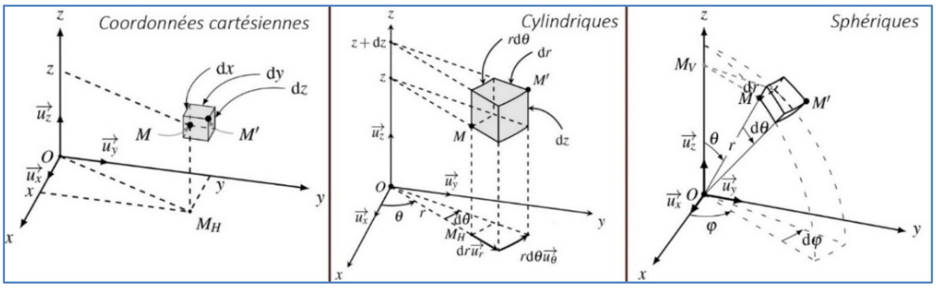
Cinématique du point matériel

Synthèse

- **Référentiels**

- Référentiel de Copernic : origine = centre de masse du système solaire ; axes dirigés vers trois étoiles supposées fixes.
- Référentiel héliocentrique ou de Kepler : origine = centre de masse du Soleil ; axes parallèles à ceux du référentiel de Copernic.
- Référentiel géocentrique : origine = centre de masse de la Terre ; axes en translation elliptique par rapport à ceux du référentiel héliocentrique.
- Référentiel terrestre : référentiel d'étude des mouvements proches du sol.

- **Les différentes coordonnées**



Cartésiennes	Cylindriques	Sphériques
$\begin{cases}\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\}\in\mathbb{R}^3\\ \boldsymbol{OM}=\sqrt{\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2+\boldsymbol{z}^2}\\ \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}=\boldsymbol{x}\overrightarrow{\boldsymbol{u}_x}+\boldsymbol{y}\overrightarrow{\boldsymbol{u}_y}+\boldsymbol{z}\overrightarrow{\boldsymbol{u}_z}\end{cases}$	$\begin{cases}r\geq 0,\quad 0\leq\theta< 2\pi,\quad z\in\mathbb{R}\\ x=r\cos\theta,\ \ y=r\sin\theta,\ \ z=z\\ \overrightarrow{OM}=r\overrightarrow{u_r}+z\overrightarrow{u_z}\end{cases}$	$\begin{cases}r\geq 0,\quad 0\leq\theta\leq\pi,\quad 0\leq\varphi<2\pi\\ x=r\sin\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta\\ \overrightarrow{OM}=r\,\overrightarrow{u_r}\end{cases}$

- **Les grandeurs élémentaires**

Cartésiennes	Cylindriques	Sphériques
$\begin{cases}d\overrightarrow{OM}=dx\overrightarrow{u_x}+dy\overrightarrow{u_y}+dz\overrightarrow{u_z}\\ d^2S=dxdy\ ou\ dxdz\ ou\ dydz\\ d^3\tau=dxdydz\end{cases}$	$\begin{cases}d\overrightarrow{OM}=dr\overrightarrow{u_r}+rd\theta\overrightarrow{u_\theta}+dz\overrightarrow{u_z}\\ d^2S=drdz\ ou\ rd\theta dr\ \ ou\ rd\theta dz\\ d^3\tau=rdrd\theta dz\end{cases}$	$\begin{cases}d\overrightarrow{OM}=dr\overrightarrow{u_r}+rd\theta\overrightarrow{u_\theta}+r\sin\theta d\varphi\overrightarrow{u_\varphi}\\ d^2S=rdrd\theta ou\ r^2\sin\theta d\theta d\varphi\ ou\ r\sin\theta d\varphi dr\\ d^3\tau=r^2\sin\theta drd\theta d\varphi\end{cases}$

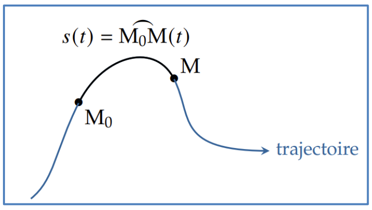
- **Vitesse et accélération**

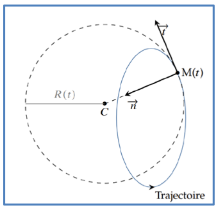
Cartésiennes	Cylindriques	Sphériques
$\begin{cases}\vec{v}=\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\dot{x}\overrightarrow{u_x}+\dot{y}\overrightarrow{u_y}+\dot{z}\overrightarrow{u_z}\\ \vec{a}=\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}=\ddot{x}\overrightarrow{u_x}+\ddot{y}\overrightarrow{u_y}+\ddot{z}\overrightarrow{u_z}\end{cases}$	$\begin{cases}\boldsymbol{\vec{v}}=\dfrac{\boldsymbol{d\overrightarrow{OM}}}{\boldsymbol{dt}}=\dot{r}\overrightarrow{u_r}+r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}+\dot{z}\overrightarrow{u_z}\\ \boldsymbol{\vec{a}}=\dfrac{\boldsymbol{d^2\overrightarrow{OM}}}{\boldsymbol{dt^2}}=\left(\boldsymbol{\ddot{r}}-\boldsymbol{r\dot{\theta}^2}\right)\overrightarrow{\boldsymbol{u_r}}+\left(\boldsymbol{r\ddot{\theta}}+\boldsymbol{2\dot{r}\,\dot{\theta}}\right)\overrightarrow{\boldsymbol{u_\theta}}+\boldsymbol{\ddot{z}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u_z}}\end{cases}$	$\begin{cases}\vec{v}=\dot{r}\overrightarrow{u_r}+r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}+r\sin\theta\,\dot{\varphi}\overrightarrow{u_\varphi}\\ \vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\cdots\end{cases}$

- **Mouvement circulaire**

- Non uniforme : $\begin{cases}r=R=cste\Rightarrow\dot{r}=0\\ \dot{\theta}=\omega\Rightarrow\ddot{\theta}=\dot{\omega}\\ z=cste\Rightarrow\dot{z}=0\ et\ \ddot{z}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{OM}=r\overrightarrow{u_r}\\ \vec{v}=R\omega\overrightarrow{u_\theta}\\ \vec{a}=R\dot{\omega}\overrightarrow{u_\theta}-R\omega^2\overrightarrow{u_r}=\dot{v}\,\overrightarrow{u_\theta}-\frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_r}\end{cases}$
- Uniforme : $\begin{cases}r=R=cste\Rightarrow\dot{r}=0\\ \dot{\theta}=\omega=cste\Rightarrow\ddot{\theta}=0\\ z=cste\Rightarrow\dot{z}=0\ et\ \ddot{z}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{OM}=r\overrightarrow{u_r}\\ \vec{v}=R\omega\overrightarrow{u_\theta}\\ \vec{a}=-R\omega^2\overrightarrow{u_r}=-\frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_r}\end{cases}$

- **Base de Frenet**





La base de Frenet est constituée de deux vecteur unitaires orthogonaux entre eux, notés $\vec{t}$ et $\vec{n}$. Les deux vecteurs sont liés au point M dont on décrit le mouvement. Pour repérer le point M on se sert de l'abscisse curviligne s(t) représentée sur le schéma ci-dessus.

- $\vec{t}$ est tangent à la trajectoire au point M, et dirigé dans le sens du mouvement.
- $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{t}$ et dirigé vers l'intérieur de la concavité de la courbe.
- Le vecteur vitesse est tangentiel à la courbe, donc par définition de $\vec{t}$: $\vec{v}(t) = v(t)\,\vec{t}$ où $v(t) = \dot{s}(t)$
- Le vecteur accélération s'écrit : $\vec{a}(t) = \dot{v}\vec{t} + \frac{v^2}{R}\,\vec{n}$ où R(t) est le rayon de courbure de la courbe au point M, c'est-à-dire le rayon du cercle qui épouse le mieux la forme de la trajectoire au point M (d'où sa ressemblance avec l'expression en polaire d'un mouvement circulaire non uniforme)

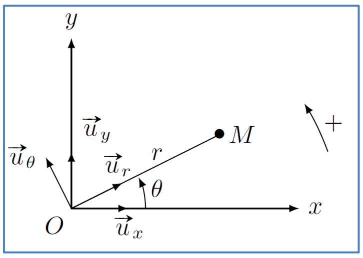
SVF

a) Calculer la vitesse et l'accélération en coordonnées cylindriques.

- Vitesse

En coordonnées cylindriques, on a : $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z} \Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} + \dot{z}\overrightarrow{u_z} + z\underbrace{\frac{d\overrightarrow{u_z}}{dt}}_{=\vec{0}}$

Contrairement au cas des coordonnées cartésiennes, les vecteurs de la base locale varient au cours du temps. Il est alors nécessaire d'évaluer leur dérivée temporelle.



On a :

$$\overrightarrow{u_r} = \cos\theta\,\overrightarrow{u_x} + \sin\theta\,\overrightarrow{u_y}$$
$$et\ \overrightarrow{u_\theta} = -\sin\theta\,\overrightarrow{u_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{u_y}$$

Donc :

$$\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = -\dot{\theta}\sin\theta\,\overrightarrow{u_x} + \dot{\theta}\cos\theta\,\overrightarrow{u_y} = \dot{\theta}\left(-\sin\theta\,\overrightarrow{u_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{u_y}\right) = \dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$
$$et\ \frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\cos\theta\,\overrightarrow{u_x} - \dot{\theta}\sin\theta\,\overrightarrow{u_y} = -\dot{\theta}\left(\cos\theta\,\overrightarrow{u_x} + \sin\theta\,\overrightarrow{u_y}\right) = -\dot{\theta}\overrightarrow{u_r}$$

On retiendra :

$$\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}\ et\ \frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\overrightarrow{u_r}$$

En effet la dérivée d'un vecteur unitaire par rapport à θ est directement orthogonale à celui-ci.
D'où :

$$\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}$$

- Accélération

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{dz}{dt}\,\overrightarrow{u_z}$$
$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\,\overrightarrow{u_r} + \frac{dr}{dt}\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\,\overrightarrow{u_z}$$

Par conséquent :

$$\Rightarrow \vec{a} = \ddot{r}\,\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\,\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} - r\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} + \ddot{z}\,\overrightarrow{u_z}$$
$$\boldsymbol{\Rightarrow \vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\,\overrightarrow{u_z}}$$