

# Les lois générales de l'électrocinétique

## Synthèse

### • Vocabulaire des circuits

- Dipôle : composant électrique comportant deux bornes ;
- Noeud : Un noeud est un point du circuit auquel sont connectés au moins trois composants ;
- Branche : portion d'un circuit entre deux noeuds consécutifs
- Maille : ensemble de branches successives définissant un circuit fermé
- Des dipôles sont en série lorsqu'ils appartiennent à une même branche, ils sont donc parcourus par le même courant.
- Des dipôles sont en parallèle (ou en dérivation) s'ils sont reliés aux deux mêmes noeuds, ils sont alors soumis à la même différence de potentiel (tension).

### • Charge électrique

- La charge électrique, notée  $q$  est un scalaire qui caractérise la propriété d'un corps chargé à en attirer un autre par l'intermédiaire des forces électriques ( $\vec{F} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ ). Elle s'exprime en Coulomb (C). Elle est additive, quantifiée (multiples entiers de la charge élémentaire) et conservative (constante pour un système fermé).

### • Courant électrique

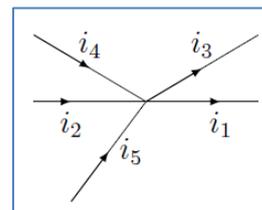
- Le courant électrique est un déplacement ordonné de particules chargées dans un conducteur.
- L'intensité du courant est le débit de charges à travers une section du conducteur (c'est la quantité de charges qui traversent une section d'un conducteur dans un sens donné par unité de temps) ; elle est représentée par une flèche sur un fil :  $\xrightarrow{i}$  (sens opposé à la circulation des électrons)
- L'intensité du courant électrique est par définition :  $i = \frac{dq}{dt}$  où  $dq$  est la quantité de charges traversant la section du conducteur, dans le sens de la flèche, pendant le temps  $dt$ .
- L'intensité se mesure avec un ampèremètre : le courant entre par la borne A et sort par la borne COM.

### • Loi des noeuds (Kirchhoff 1)

- La somme algébrique des intensités des courants électriques arrivant en un noeud est nulle :

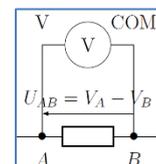
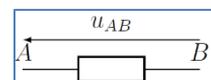
$$\sum_{k=1}^n \epsilon_k i_k = 0 \quad \text{où} \quad \begin{cases} \epsilon_k = +1 \text{ si courant vers le noeud} \\ \epsilon_k = -1 \text{ si courant sortant du noeud} \end{cases}$$

$$\Rightarrow i_2 + i_4 + i_5 = i_1 + i_3$$



### • Tension

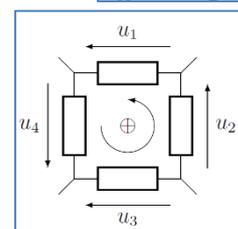
- La tension  $u_{AB}$  est la différence de potentiel entre les points A et B :  $u_{AB} = V_A - V_B$ . Elle s'exprime en Volt. (la flèche de tension est orientée de B vers A)
- On définit la masse comme le point du circuit dont le potentiel est fixé (arbitrairement) à zéro.
- La tension  $u_{AB}$  se mesure à l'aide d'un voltmètre branché en parallèle avec la borne V au point A et la borne COM au point B



### • Loi des mailles (Kirchhoff 2)

- Dans une maille orientée, la somme algébrique des tensions est nulle :
 
$$\sum_{k=1}^n \epsilon_k u_k = 0 \quad \text{où} \quad \begin{cases} \epsilon_k = +1 \text{ si tension orientée dans le même sens que la maille} \\ \epsilon_k = -1 \text{ si tension orientée dans le sens contraire de la maille} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_1 + u_2 + u_4 - u_3 = 0$$



### • Approximation des Régimes Quasi-Stationnaire (A.R.Q.S)

- Tous les effets liés à la propagation des signaux sont négligés. Cette approximation est valable si « le circuit n'est pas trop grand » et « la fréquence  $f$  pas trop élevée » : la taille «  $a$  » du circuit doit être telle que :

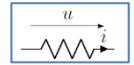
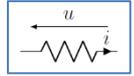
$$l \ll \frac{v}{f} \quad \text{avec } v \text{ la vitesse de propagation des signaux.}$$

# Dipôles électrocinétiques

## Synthèse

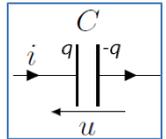
### • Généralités

- Convention **récepteur** : la flèche de  $i$  et la flèche de  $u$  sont en sens opposé et la puissance algébriquement **reçue** est donnée par :  $P = ui$ . ( $P > 0$  si reçue)
- Convention **générateur** : La flèche de  $i$  et la flèche de  $u$  sont de même sens et la puissance algébriquement fournie par le dipôle est :  $P = ui$ . ( $P > 0$  si fournie)



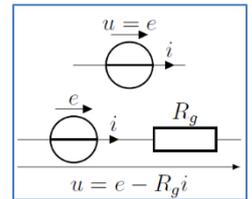
### • Exemples de dipôles

- Un dipôle passif a sa caractéristique  $i = f(u)$  qui passe par l'origine. Sinon il est dit actif.
- Résistance :  $u = Ri$  en convention récepteur sinon  $u = -Ri$ . Puissance reçue  $P = Ri^2 \Rightarrow E = \int Ri^2 dt$ .
- Bobine :  $u = L \frac{di}{dt}$  en convention récepteur sinon  $u = -L \frac{di}{dt}$ . Puissance reçue  $P = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right) \Rightarrow E = \frac{1}{2} Li^2$ .
- Condensateur :  $i = C \frac{du}{dt}$  en convention récepteur sinon  $i = -C \frac{du}{dt}$ .
  - o Puissance reçue  $P = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Cu^2 \right) \Rightarrow E = \frac{1}{2} Cu^2$ .
  - o Si on mentionne la charge du condensateur celle-ci vérifie :  $q = Cu$  ou  $u = \frac{q}{C}$ . Ainsi on retrouve :  $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$ .



### - Dipôles actifs :

- o Source idéale de tension : elle impose la tension  $u = e, \forall i$ .  $e$  est appelée force électromotrice (fem)
- o Source réelle de tension : elle est constituée d'une fem  $e$  et d'une résistance interne  $R_g$  tel que :  $u = e - R_g i$



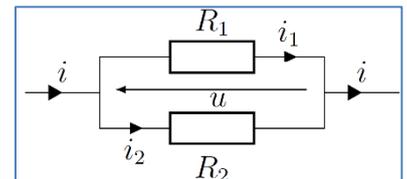
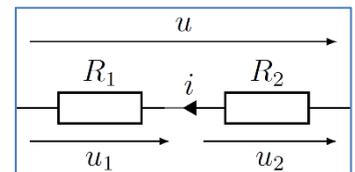
### • Association de dipôles

- En série les résistances et les bobines s'ajoutent :  $\begin{cases} R_{série} = R_1 + R_2 \\ L_{série} = L_1 + L_2 \end{cases}$
- En parallèle ce sont les inverses qui s'ajoutent :  $\begin{cases} \frac{1}{R_{parallèle}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \\ \frac{1}{L_{parallèle}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \end{cases}$
- Pour le condensateur c'est l'inverse :  $\begin{cases} \frac{1}{C_{série}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \\ C_{parallèle} = C_1 + C_2 \end{cases}$

## SVF

### a) Retrouvez les formules d'association de résistances

- En série : loi des mailles :  $u = u_1 + u_2 = R_1 i + R_2 i = (R_1 + R_2) i = R_{série} i$   
 $\Rightarrow R_{série} = R_1 + R_2$
- En parallèle : loi des nœuds :  $i = i_1 + i_2 = \frac{u}{R_1} + \frac{u}{R_2} = u \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{u}{R_{parallèle}}$   
 $\Rightarrow \frac{1}{R_{parallèle}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$  ou  $R_{parallèle} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$



### b) Retrouvez les formules d'association de bobines.

- En série : loi des mailles :  $u = u_1 + u_2 = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} = (L_1 + L_2) \frac{di}{dt} = L_{série} \frac{di}{dt} \Rightarrow L_{série} = L_1 + L_2$
- En parallèle : loi des nœuds :  $i = i_1 + i_2 \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \Rightarrow \frac{u}{L_{parallèle}} = \frac{u}{L_1} + \frac{u}{L_2} \Rightarrow \frac{1}{L_{parallèle}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$

### c) Retrouvez les formules d'association de capacités.

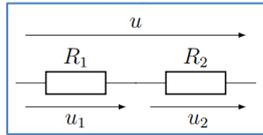
- En série : loi des mailles :  $u = u_1 + u_2 \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt} \Rightarrow \frac{i}{C_{série}} = \frac{i}{C_1} + \frac{i}{C_2} \Rightarrow \frac{1}{C_{série}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$
- En parallèle : loi des nœuds :  $i = i_1 + i_2 \Rightarrow C_{parallèle} \frac{du}{dt} = C_1 \frac{du}{dt} + C_2 \frac{du}{dt} \Rightarrow C_{parallèle} = C_1 + C_2$

# Circuits linéaires en régime permanent continu

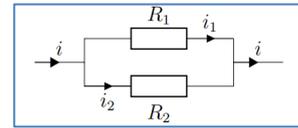
## Synthèse

### • Loi de Pouillet et ponts diviseurs

- Loi de Pouillet : dans un circuit série comportant des sources de tension et des résistances :  $i = \frac{\sum \varepsilon_j \varepsilon_j}{\sum R_k}$  où  $\varepsilon_j = \pm 1$ .
- Diviseur de tension :  $u_1 = \frac{R_1}{R_1+R_2} u$  et  $u_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2} u$ . S'il y a plus de deux résistances en série :  $u_k = \frac{R_k}{\sum R_k}$



Diviseur de tension



Diviseur de courant

- Diviseur de courant :  $i_1 = \frac{R_2}{R_1+R_2} i = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} i$  et  $i_2 = \frac{R_1}{R_1+R_2} i = \frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} i$ . S'il y a plusieurs  $R_k$  en dérivation :  $i_k = \frac{\frac{1}{R_k}}{\sum \frac{1}{R_k}}$ .

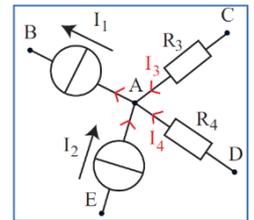
### • Loi des nœuds en termes de potentiel (ou Millman)

- LNTP : dans le cas d'un schéma comportant des sources de courant idéales

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i I_i + \sum_{k=1}^m \frac{V_k - V_A}{R_k} = 0$$

- LNTP : sans source de courant

$$\sum_{k=1}^m \frac{V_k - V_A}{R_k} = 0$$



- Théorème de Millman (utile pour exprimer les tensions inverseuses et non inverseuse d'un ALI)

$$V_A = \frac{\sum \frac{V_k}{R_k}}{\sum \frac{1}{R_k}} = \frac{\sum G_k V_k}{\sum G_k}$$

## SVF

a) Retrouvez les formules ci-dessus

- Diviseur de tension :  $u = R_1 i + R_2 i$  et  $u_1 = R_1 i \Rightarrow u_1 = \frac{R_1}{R_1+R_2} u$
- Diviseur de courant :  $i = \frac{u}{R_1} + \frac{u}{R_2}$  et  $i_1 = \frac{u}{R_1} \Rightarrow i_1 = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} i = \frac{R_2}{R_1+R_2} i$

- LNTP :

$$\sum_{j=1}^n \varepsilon_j I_j = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \varepsilon_i I_i + \sum_{k=1}^m \frac{V_k - V_A}{R_k} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \varepsilon_i I_i + \sum_{k=1}^m \frac{V_k}{R_k} - V_A \sum_{k=1}^m \frac{1}{R_k} = 0 \Rightarrow V_A = \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i I_i + \sum_{k=1}^m \frac{V_k}{R_k}}{\sum_{k=1}^m \frac{1}{R_k}}$$

Et sans sources de courants :

$$V_A = \frac{\sum \frac{V_k}{R_k}}{\sum \frac{1}{R_k}} = \frac{\sum G_k V_k}{\sum G_k}$$

# Circuits linéaires du premier ordre

## Synthèse

### • Régime libre et échelon de tension

- Un circuit est en régime libre s'il ne comporte aucun générateur ; ses grandeurs électriques évoluent néanmoins au cours du temps si, à un instant initial, un condensateur est chargé.
- Un circuit est soumis à échelon de tension s'il comporte une source de tension de f.é.m. nulle jusqu'à l'instant initial choisi, puis constante à partir de cet instant. Cela correspond en pratique à l'allumage d'un générateur de tension constante, ou à la fermeture d'un interrupteur.
- Conditions initiales :
  - o La tension aux bornes du condensateur et la charge du condensateur ne peuvent pas subir de discontinuité, donc  $u_c(0^+) = u_c(0^-)$  et  $q(0^+) = q(0^-)$  (ce sont des fonctions continues du temps).
  - o L'intensité du courant à travers une bobine ne peut pas subir de discontinuité (c'est une fonction continue du temps).

### • Circuit RC

- Equation différentielle :  $\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{e(t)}{\tau}$  où  $\tau = RC$

- Solutions :  $u_c = u_h + u_p$  où  $\begin{cases} u_h = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \text{ où } A \text{ est déterminé avec les CI} \\ u_p = e(t) \text{ (0 ou } E_0) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_c = E_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \text{ pour la charge tel que } 0 < t < t_0 \\ u_c = E_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \text{ pour la décharge } t > t_0 \end{cases}$$

- Représentation graphique : On distingue la charge lorsque  $e = E_0$  et la décharge lorsque  $e = 0$ . La constante de temps  $\tau$  d'une évolution du 1er ordre est la durée au bout de laquelle le régime transitoire a eu lieu à 63%. Pour  $t = 5\tau$ ,  $u_c = 0,99 u_c(\infty)$

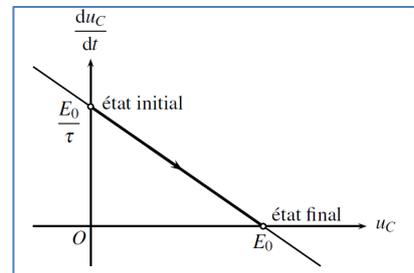
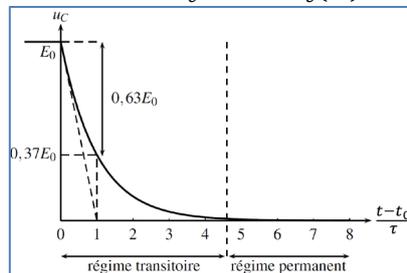
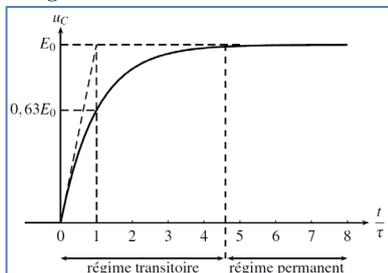
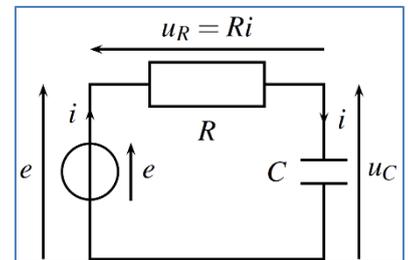


Fig.1 : charge du condensateur

Fig.2 : décharge du condensateur

Fig.3 : Portrait de phase lors de la charge.

- Or  $i = C \frac{du_c}{dt} \Rightarrow i(t) = \begin{cases} \frac{CE_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ pour } 0 < t < t_0 \\ -\frac{CE_0}{\tau} e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} = -\frac{E_0}{R} e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \text{ pour } t > t_0 \end{cases}$

- Bilan de puissance

On peut multiplier la loi des mailles par l'intensité :  $E_0 i = u_c i + u_R i = u_c C \frac{du_c}{dt} + Ri^2 = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} C u_c^2 \right) + Ri^2$ , ce que l'on peut écrire :  $P_{\text{généré}} = P_{\text{joule}} + P_{\text{condo}}$

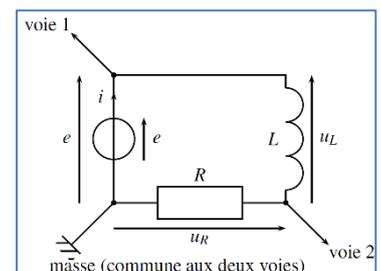
### • Circuit RL

- Equation différentielle :  $\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{e(t)}{R\tau} = \frac{e(t)}{L}$  où  $\tau = L/R$

- Solutions :  $\Rightarrow \begin{cases} i = \frac{E_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \text{ pour l'établissement courant } 0 < t < t_0 \\ i = -\frac{E_0}{R} e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \text{ pour l'arrêt du courant } t > t_0 \end{cases}$

- Bilan de puissance

On peut multiplier la loi des mailles par l'intensité :  $E_0 i = u_L i + u_R i = iL \frac{di}{dt} + Ri^2 = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right) + Ri^2$ , ce que l'on peut écrire :  $P_{\text{généré}} = P_{\text{joule}} + P_{\text{bobine}}$



## SVF

a) Mise en équation du circuit RC et solutions

- On applique la loi des mailles :  $e(t) = u_c + u_R = u_c + Ri = u_c + RC \frac{du_c}{dt}$ . On pose  $\tau = RC \Rightarrow e(t) = u_c + \tau \frac{du_c}{dt}$ .

$$\Rightarrow \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{e(t)}{\tau} \text{ où } \tau = RC$$

- Pour la charge  $0 < t < t_0$  :  $u_c(0^-) = 0 = u_c(0^+)$  et  $e(0^+) = E_0$

Donc  $u_c = u_h + u_p = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E_0$  avec  $u_c(0^+) = 0$

$$\Rightarrow u_c(0 < t < t_0) = E_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$\text{Et } i = C \frac{du_c}{dt} = CE_0 \left(-\frac{1}{\tau}\right) \left(-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{E_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ pour } 0 < t < t_0$$

- Pour la décharge  $t > t_0$  :  $u_c(t_0) = E_0$  et  $e(t_0^+) = 0$

Donc  $u_c = u_h + u_p = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$  avec  $u_c(t_0) = E_0 \Rightarrow u_c(t_0) = E_0 = Ae^{-\frac{t_0}{\tau}} \Rightarrow A = E_0 e^{\frac{t_0}{\tau}}$

$$d'où u_c(t > t_0) = E_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

$$\text{Et } i = C \frac{du_c}{dt} = CE_0 \left(-\frac{1}{\tau}\right) \left(e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}\right) = -\frac{E_0}{R} e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \text{ pour } t > t_0$$

b) Mise en équation du circuit RL et solutions

- On applique la loi des mailles :  $e(t) = u_R + u_L = L \frac{di}{dt} + Ri \Rightarrow \frac{e(t)}{L} = \frac{R}{L} i + \frac{di}{dt}$ . On pose  $\tau = \frac{L}{R} \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{e(t)}{L}$ .

- Pour l'établissement du courant  $0 < t < t_0$  :  $i(0^-) = 0 = i(0^+)$  et  $e(0^+) = E_0$

Donc  $i = i_h + i_p = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E_0}{R}$  avec  $i(0^+) = 0 \Rightarrow i(0) = A + \frac{E_0}{R} = 0$

$$\Rightarrow i(0 < t < t_0) = \frac{E_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$\text{Et } u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{E_0}{R} \left(-\frac{1}{\tau}\right) \left(-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = E_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ pour } 0 < t < t_0$$

- Pour l'arrêt du courant  $t > t_0$  :  $i(t_0) = \frac{E_0}{R}$  et  $e(t_0^+) = 0$

Donc  $i = i_h + i_p = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$  avec  $i(t_0) = \frac{E_0}{R} \Rightarrow i(t_0) = \frac{E_0}{R} = Ae^{-\frac{t_0}{\tau}} \Rightarrow A = \frac{E_0}{R} e^{\frac{t_0}{\tau}}$

$$d'où i(t > t_0) = \frac{E_0}{R} e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

$$\text{Et } u_L = L \frac{di}{dt} = \frac{E_0}{R} \left(-\frac{1}{\tau}\right) \left(e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}\right) = -E_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \text{ pour } t > t_0$$

# Circuits linéaires du second ordre

## Synthèse

### • Oscillateur harmonique non amorti (exemple circuit LC)

- Un circuit constitué d'une bobine idéale et d'un condensateur idéal en série est un oscillateur harmonique régit par l'équation différentielle :  $\frac{d^2u_c}{dt^2} + \omega_0^2 u_c = \omega_0^2 e(t)$  où  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$  (*pulsation propre*) et  $e(t)$  la fem du générateur qui l'alimente.

- Absence de générateur avec présence d'une charge initiale  $q(0^-) = q_0$  et  $i(0^-) = 0$

$$\text{Alors : } \frac{d^2u_c}{dt^2} + \omega_0^2 u_c = 0 \Rightarrow \begin{cases} u_c(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \\ \text{ou } u_c(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) \text{ ou } A\sin(\omega_0 t + \phi) \end{cases}$$

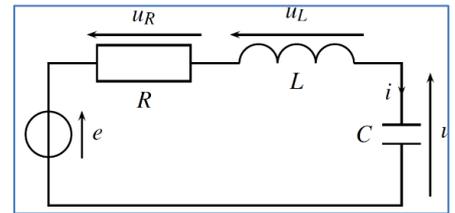
$$\text{Vu les conditions initiales : } u_c(t) = \frac{q_0}{C} \cos(\omega_0 t)$$

### • Oscillateur harmonique amorti (exemple circuit RLC série)

- L'équation différentielle de ce circuit peut s'écrire :

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = \omega_0^2 e(t)$$

$$\text{où } \begin{cases} \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \\ Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \end{cases}$$



- L'équation différentielle du régime permanent s'écrit :  $\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0$

- Les solutions homogènes s'obtiennent à partir du polynôme caractéristique ainsi :

- o Si  $Q < \frac{1}{2}$  : régime aperiodique on montre que :

$$u_c(t) = \begin{cases} e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}) \\ e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (A\cosh(\omega t) + B\sinh(\omega t)) \text{ où } \omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \\ e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} A\cosh(\omega t + \phi) \end{cases}$$

- o Si  $Q > \frac{1}{2}$  : régime pseudopériodique on montre que :

$$u_c(t) = \begin{cases} e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}) \\ e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)) \text{ où } \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \\ e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} A\cos(\omega t + \phi) \end{cases}$$

- o Si  $Q = \frac{1}{2}$  : régime critique on montre que :  $u_c(t) = (At + B)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$

- On rajoute solution particulière dans le cas général :  $u_c(t) = u_h(t) + u_p(t)$  où ici  $u_p(t) = E_0$

- Représentation graphique :

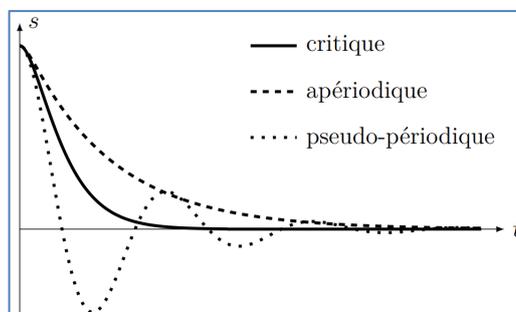


Fig.1 : Les différents régimes

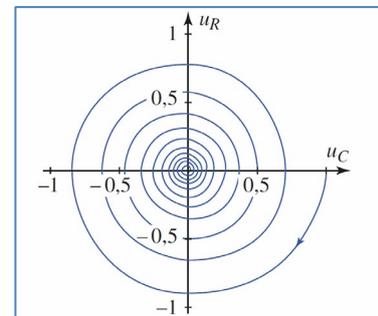


Fig.2 : Portrait de phase si  $Q > \frac{1}{2}$

- Aspect énergétique :  $P_{\text{généré}} = P_{\text{bobine}} + P_{\text{condo}} + P_{\text{joule}} \Leftrightarrow ei = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} Cu_c^2 \right)$

## SVF

- a) Retrouvez l'E.D dans le cas d'un circuit RLC série alimenté par un générateur de tension  $e(t)$ . En déduire  $Q$  et  $\omega_0$  en fonction de  $R, L$  et  $C$ .

Loi des mailles :  $u_R + u_L + u_C = e(t)$

$$\Leftrightarrow Ri + L \frac{di}{dt} + u_C = e \Leftrightarrow RC \frac{du_C}{dt} + LC \frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = e \Leftrightarrow \frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{LC} = \frac{e}{LC}$$

La forme canonique recherchée s'écrit :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 e(t)$$

Par analogie on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \\ \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \Rightarrow Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{L}{R} \sqrt{\frac{1}{LC}} \Rightarrow Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \end{array} \right.$$

- b) Retrouvez les équations horaires des trois régimes propres dans le cas d'un oscillateur harmonique amorti (OHA)

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0$$

Pour résoudre cette E.D, le plus simple est de poser le polynôme caractéristique :  $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$  (cela revient à

rechercher les solutions sous la forme de  $Ae^{rt}$ )  $\Rightarrow \Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$

Suivant le signe du discriminant on retrouve trois régimes d'évolution possibles :

- Régime apériodique :  $\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$

Les solutions du polynôme sont :  $r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \sqrt{\frac{\omega_0^2}{4} \left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega$

Ainsi la solution peut s'écrire :  $u_C(t) = Ae^{(-\frac{\omega_0}{2Q} + \omega)t} + Be^{(-\frac{\omega_0}{2Q} - \omega)t} = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t})$

Cette solution peut aussi s'écrire à l'aide des fonctions hyperboliques d'où l'écriture des solutions :

$$\text{Régime apériodique : } u_C(t) = \begin{cases} e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}) \\ e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (A \operatorname{ch}(\omega t) + B \operatorname{sh}(\omega t)) \text{ où } \omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \\ e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} A \operatorname{ch}(\omega t + \phi) \end{cases}$$

- Régime pseudopériodique :  $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2}$

Les solutions du polynôme sont :  $r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \sqrt{\frac{\omega_0^2}{4} \left(4 - \frac{1}{Q^2}\right)} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \omega$

Ainsi la solution peut s'écrire :  $u_C(t) = Ae^{(-\frac{\omega_0}{2Q} + j\omega)t} + Be^{(-\frac{\omega_0}{2Q} - j\omega)t} = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (Ae^{j\omega t} + Be^{-j\omega t})$

- Cette solution peut aussi s'écrire à l'aide des fonctions trigonométriques d'où l'écriture des solutions :

$$\text{Régime pseudopériodique : } u_C(t) = \begin{cases} e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (Ae^{j\omega t} + Be^{-j\omega t}) \\ e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) \text{ où } \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \\ e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} A \cos(\omega t + \phi) \end{cases}$$

- Régime critique :  $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2}$

Dans ce cas particulier de racine double :  $r = -\frac{\omega_0}{2Q}$  on admet que la solution peut s'écrire :

$$\text{Régime critique : } u_C(t) = (At + B)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$$

- c) Démontrer l'expression du décrétement logarithmique :  $\delta = \operatorname{Ln} \left( \frac{u(t+T)}{u(t)} \right) = \frac{\pi}{Q}$  si  $Q \gg 1$

$$\text{Soit : } \begin{cases} u(t) = u_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \cos(\Omega t + \phi) \\ u(t+T) = u_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}(t+T)} \cos\left(\Omega t + \frac{\Omega T}{2\pi} + \phi\right) \end{cases} \Rightarrow \frac{u(t+T)}{u(t)} = e^{-\frac{\omega_0 T}{2Q}} \Rightarrow \operatorname{Ln} \left( \frac{u(t+T)}{u(t)} \right) = -\frac{\omega_0 T}{2Q} = -\frac{\pi}{Q} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \\ \Rightarrow \delta = -\frac{\pi}{Q} \text{ si } Q \gg 1$$

# Régime sinusoïdal forcé

## Synthèse

### • Propriétés d'une grandeur sinusoïdale

- Une grandeur sinusoïdale s'écrit :  $s(t) = S_m \cos(\omega t + \phi)$  où  $S_m$  est appelé l'amplitude,  $\omega$  la pulsation et  $\phi$  la phase à l'origine.

- La valeur moyenne est définie par :  $\langle s \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt = 0$

- La valeur efficace est définie par :  $S_{eff} = \sqrt{\langle s^2 \rangle}$ , or  $\langle s^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt = \frac{1}{T} S_m^2 \int_0^T \cos^2(\omega t + \phi) dt$

$$\Leftrightarrow \frac{S_m^2}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2(\omega t + \phi))}{2} dt = \frac{S_m^2}{2T} \left[ t + \frac{\sin(2(\omega t + \phi))}{2\omega} \right]_0^T = \frac{S_m^2}{2} \Rightarrow S_{eff} = \frac{S_m}{\sqrt{2}}$$

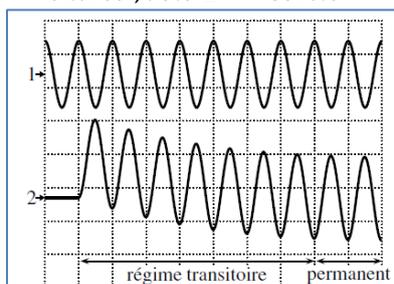
### • Régimes transitoire et permanent sinusoïdal

- Lorsque  $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$  alors la solution générale s'écrit :

$$u_c(t) = u_h(t) + u_p(t) \text{ où } u_p(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

- Or pour un oscillateur harmonique amorti les solutions homogènes tendent vers zéro donc après quelques  $\tau$  on peut écrire que  $u_c(t) \sim u_p(t)$ .

- Observation expérimentale : voie 1  $\leftrightarrow$  entrée ; voie 2  $\leftrightarrow$  sortie



### • Notation complexe

- À tout signal sinusoïdal  $s(t) = S_m \cos(\omega t + \phi)$  on associe le signal complexe

$$s(t) = S_m \cos(\omega t + \phi) \leftrightarrow \underline{s} = \underline{S}_m e^{j\omega t} \text{ où } \underline{S}_m = S_m e^{j\phi}$$

- $\underline{S}_m$  est appelé amplitude complexe et  $S_m = |\underline{S}_m|$  est l'amplitude.
- $\phi$  est la phase à l'origine telle que :  $\phi = \text{Arg}(\underline{S}_m)$
- $s(t) = \text{Re}\{\underline{s}\}$

- Propriétés de la notation complexe :

- $\frac{d\underline{s}}{dt} = j\omega \underline{s}$
- $\int \underline{s} dt = \frac{1}{j\omega} \underline{s}$

### • Impédance complexe

- L'impédance complexe est définie par :  $\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{U_m}{I_m} = Z e^{j\varphi}$  où  $\varphi = \phi_z = \phi_u - \phi_i$

- L'admittance complexe est définie par :  $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$

- Impédances usuelles :

- Résistance :  $\underline{Z}_R = R$
- Bobine :  $\underline{Z}_L = jL\omega$
- Condensateur :  $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$

### • Association d'impédances complexes

- Les formules d'association, de pont diviseur, de LNTP restent valables à condition de remplacer les résistances par les impédances.

- Exemples :

- Diviseur de tension :  $\underline{u}_1 = \frac{Z_1}{Z_1+Z_2} \underline{u}$
- LNTP sans source de courant :

$$\sum_{k=1}^m \frac{V_k - V_A}{Z_k} = 0$$

## • Circuit RC

- Dans le cas d'un circuit RC série on démontre que :  $e = u_c + Ri \Rightarrow \underline{e} = (1 + jRC\omega)\underline{u}_c$ . Ainsi :

$$\begin{cases} \frac{u_c}{e} = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \\ \varphi = \arg\left(\frac{u_c}{e}\right) = -\text{Arctan}(RC\omega) \end{cases}$$

## • Circuit RL

- Dans le cas d'un circuit RL série on démontre que :

$$e = u_L + Ri \Rightarrow \frac{de}{dt} = \frac{du_L}{dt} + \frac{Rdi}{dt} = \frac{du_L}{dt} + \frac{R}{L}u_L \Rightarrow j\omega \underline{e} = \left(j\omega + \frac{R}{L}\right)\underline{u}_L \Rightarrow \underline{e} = \left(1 - j\frac{R}{L\omega}\right)\underline{u}_L$$

$$\begin{cases} \frac{u_L}{e} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{L^2\omega^2}}} \\ \varphi = \arg\left(\frac{u_L}{e}\right) = +\text{Arctan}\left(\frac{R}{L\omega}\right) \end{cases}$$

## • Circuit RLC

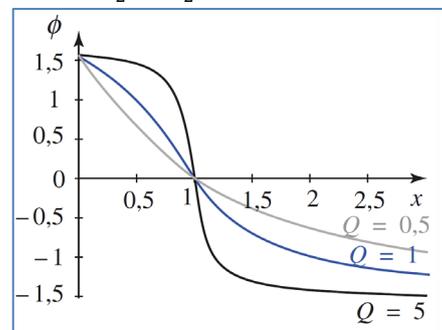
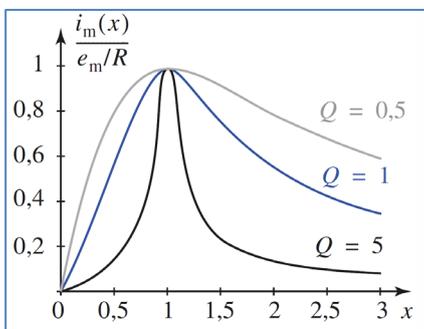
- Utilisons directement les impédances complexes :

$$\underline{e} = \left(R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega\right)\underline{i} = \left(R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega\right)jC\omega\underline{u}_c = (1 + jRC\omega - LC\omega^2)\underline{u}_c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{i}{e} = \frac{1}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} \\ \frac{u_c}{e} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} \end{cases}$$

- Résonance en intensité

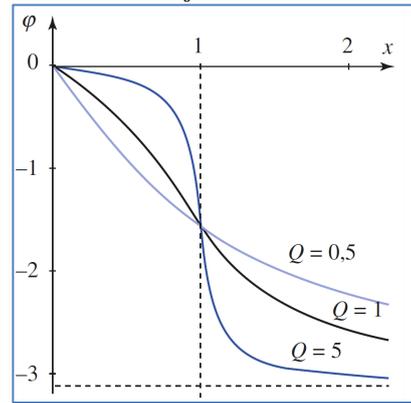
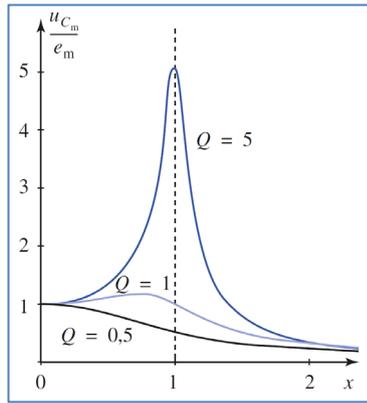
- L'amplitude est maximale pour  $\omega_r = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- La bande passante est définie par la bande de fréquence telle que  $\frac{i_m}{i_{max}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$
- Les pulsations de coupure sont telles que :  $\omega_c = \frac{\omega_0}{2Q} \left(\pm 1 + \sqrt{1 + 4Q^2}\right)$
- Et la bande passante est telle que  $\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{\omega_0}{Q}$
- La phase  $\varphi_i = \phi = \arg\left(\frac{i}{e}\right) = -\arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right) = -\arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$
- Représentations graphiques avec  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ . La phase varie de  $\frac{\pi}{2}$  à  $-\frac{\pi}{2}$ .



- Résonance en tension aux bornes du condensateur

- L'amplitude est maximale pour  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$  (La résonance existe ssi  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ )
- La bande passante est plus difficile à calculer mais si  $Q \gg 1$  alors  $\Delta\omega \sim \frac{1}{Q}$ .
- La phase  $\varphi_c = \varphi = \arg\left(\frac{u_c}{e}\right) = -\arctan\left(\frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}\right) = -\arctan\left(\frac{Q\omega}{\frac{\omega_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}\right) = -\arctan\left(Q \frac{x}{1 - x^2}\right)$

- Représentations graphiques en fonction de la pulsation réduite  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  : (La phase varie de  $0$  à  $-\pi$ ):



## SVF

- a) Retrouvez la bande passante de la résonance en intensité

- Loi d'Ohm avec la notation complexe :  $\underline{e} = \left(R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega\right) \underline{i} = \left(R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right) \underline{i} \Rightarrow \frac{\underline{i}}{\underline{e}} = \frac{1}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$

D'où le module :  $\left|\frac{\underline{i}}{\underline{e}}\right| = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{L\omega\omega_0}{R} - \frac{1}{RC\omega\omega_0}\right)^2}}$ , on pose  $x = \frac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow \left|\frac{\underline{i}}{\underline{e}}\right| = \frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$

On voit assez facilement que la fonction est maximale pour  $\left|\frac{\underline{i}}{\underline{e}}\right|_m = \frac{1}{R}$  où  $x = 1 \Leftrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

Pour la bande passante les pulsations de coupure doivent vérifier :  $\frac{\left|\frac{\underline{i}}{\underline{e}}\right|}{\left|\frac{\underline{i}}{\underline{e}}\right|_m} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

On élève au carré d'où :  $1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 2$  :

$$\Leftrightarrow Q\left(x - \frac{1}{x}\right) = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 \pm \frac{x}{Q} = 0$$

Dont les racines sont :  $x = \pm \frac{1}{2Q} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} > 0$

On choisit les deux racines positives :  $x = \pm \frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = \frac{1}{Q} \Leftrightarrow \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$

- b) Retrouvez la pulsation de résonance pour la résonance en tension aux bornes du condensateur.

- Utilisons directement les impédances complexes :

$$\underline{e} = \left(R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega\right) \underline{i} = \left(R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega\right) jC\omega \underline{u}_c = (1 + jRC\omega - LC\omega^2) \underline{u}_c$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{u}_c}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} = \frac{1}{1 + \frac{jx}{Q} - x^2}$$

Dont le module s'écrit :  $\left|\frac{\underline{u}_c}{\underline{e}}\right| = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$

La fonction sera extrémale si le dénominateur est extrémal tel que :  $\frac{d}{dx} \left( (1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} \right) = 0$

$$\Leftrightarrow -(2x) \times 2 \times (1-x^2) + \frac{2x}{Q^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 2(1-x^2) = \frac{1}{Q^2} \Leftrightarrow x^2 - 1 = -\frac{1}{2Q^2} \Leftrightarrow x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \text{ existe ssi } Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

# Filtrage linéaire

## Synthèse

### • Décomposition harmonique

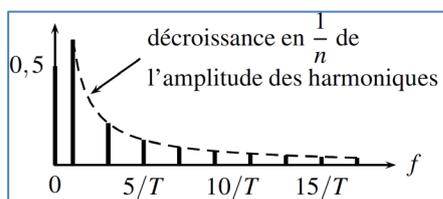
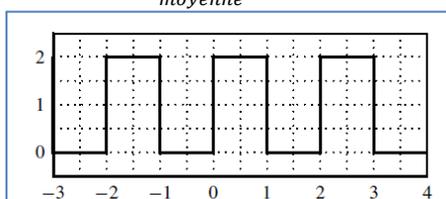
- Un signal T-périodique peut être décomposé en une somme de signaux sinusoïdaux de pulsation multiples de  $\omega_0$ ,

$$e(t) = e_0 + \sum_{k=1} e_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) \text{ où } \omega_k = k\omega_0$$

- Représenter le spectre de Fourier d'un signal c'est représenter l'amplitude relative de chaque fréquence par un trait vertical dans un graphique  $s_k = f(\omega_k)$ .

- Spectre d'un signal carré (impair) :

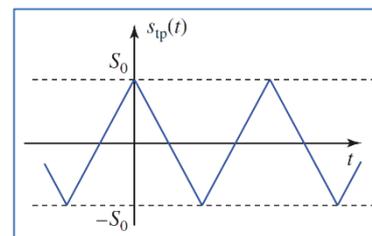
$$e(t) = \underbrace{e_0}_{\text{valeur moyenne}} + \frac{4A_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)f_0 t)}{2k+1} = e_0 + \frac{4A_0}{\pi} \sum_{n \text{ impair}} \frac{\sin(nf_0 t)}{n}$$



- Spectre d'un signal triangulaire (pair) :

$$s_{tp}(t) = \underbrace{s_0}_{\text{valeur moyenne}} + \frac{8S_0}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos[(2k+1)\omega t]}{(2k+1)^2}$$

$$s_{tp}(t) = s_0 + \frac{8S_0}{\pi^2} \sum_{n \text{ impair}} \frac{\cos[n\omega t]}{n^2}$$



Cette fois les harmoniques décroissent en  $\frac{1}{n^2}$ .

### • Fonction de transfert

- Pour un signal d'entrée sinusoïdal  $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$ , le signal de sortie s'écrit  $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi_s)$ . Les signaux complexes associés s'écrivent  $\begin{cases} \underline{e} = \underline{E}_m e^{j\omega t} \text{ où } \underline{E}_m = E_m e^{j\varphi_e} \\ \underline{s} = \underline{S}_m e^{j\omega t} \text{ où } \underline{S}_m = S_m e^{j\varphi_s} \end{cases}$ . On définit la fonction de transfert harmonique :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{S}_m}{\underline{E}_m} = \frac{S_m}{E_m} e^{j\varphi} \text{ où } \varphi = \varphi_s - \varphi_e$$

- On définit alors :

- o Le gain :  $G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{S_m}{E_m}$
- o La gain en décibel :  $G_{dB}(\omega) = 20 \log(|\underline{H}(j\omega)|) = 20 \log(G(\omega))$
- o La phase :  $\varphi(\omega) = \varphi_s - \varphi_e = \arg(\underline{H}(j\omega)) = \arg(\underline{S}_m) - \arg(\underline{E}_m)$
- o Diagramme de Bode : c'est la représentation de  $G_{dB}(\omega) = f(\log(\omega))$  **ET**  $\varphi(\omega) = f(\log(\omega))$

### • Action d'un filtre sur un signal quelconque

- Principe du filtrage : Modifier le spectre de Fourier d'un signal d'entrée de manière à amplifier ou atténuer certaines fréquences ou gammes de fréquences.

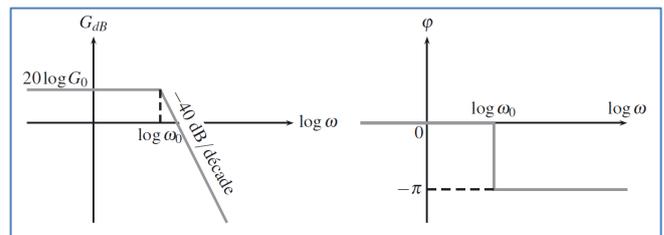
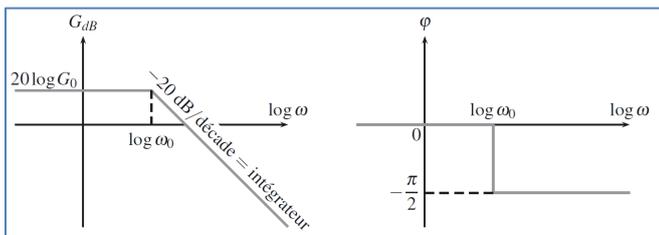
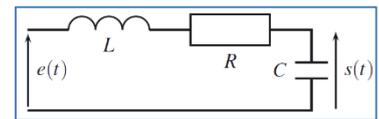
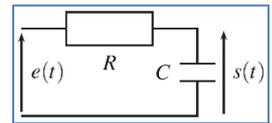
Soit un signal quelconque somme de différents signaux sinusoïdaux :  $e(t)$  en entrée d'un filtre de fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega)$ . Le signal en sortie s'écrit :  $s(t)$  tel que :

$$e(t) = e_0 + \sum_{k=1} e_k \cos(\omega_k t + \varphi_{e,k}) \Rightarrow s(t) = s_0 + \sum_{k=1} s_k \cos(\omega_k t + \varphi_{s,k}) \text{ où } \begin{cases} s_k = G(\omega_k) e_k \\ \varphi_{s,k} = \varphi_{e,k} + \arg(\underline{H}(j\omega_k)) \end{cases}$$

### • Filtres classiques

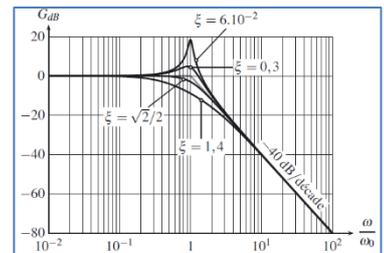
- Filtre passe-bas :

- 1<sup>er</sup> ordre :  $\underline{H} = H_0 \frac{1}{1+jx}$ , dans le cas du circuit RC :  $\underline{H} = \frac{1}{1+jx}$
- 2<sup>ème</sup> ordre :  $\underline{H} = H_0 \frac{1}{1+\frac{jx}{Q}+(jx)^2}$ , on peut l'obtenir avec un circuit RLC série aux bornes de C.
- La différence entre premier ordre et second ordre vient de la pente :
  - $\sum |Pentes| = \begin{cases} \text{ordre 1 : } 20 \text{ dB par décade} \\ \text{ordre 2 : } 40 \text{ dB par décade} \end{cases}$
  - $\text{Rotation de phase} \begin{cases} \text{ordre 1 : } \pm \frac{\pi}{2} \\ \text{ordre 2 : } \pm \pi \end{cases}$



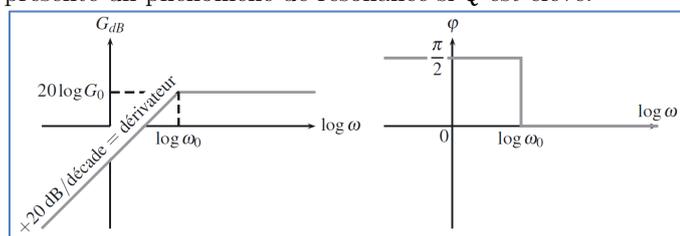
○ Particularités :

- L'ordre 1 joue le rôle d'intégrateur à haute-fréquence :  $\underline{H} = \frac{H_0}{1+jx} \sim \frac{H_0}{jx} \sim \frac{H_0 \omega_0}{j\omega}$ .
- L'ordre 2 présente un phénomène de résonance si  $Q = \frac{1}{2\xi}$  est élevé.
- Les passe-bas à très basse fréquence jouent le rôle de moyenneur ou lisseur en effet  $\underline{H} = H_0$  et donc on récupère la valeur moyenne amplifiée ou non par  $H_0$ .



- Filtre passe-haut :

- 1<sup>er</sup> ordre :  $\underline{H} = H_0 \frac{jx}{1+jx}$ , dans le cas du circuit CR :  $\underline{H} = \frac{jx}{1+jx}$
- 2<sup>ème</sup> ordre :  $\underline{H} = H_0 \frac{(jx)^2}{1+\frac{jx}{Q}+(jx)^2}$ , on peut l'obtenir avec un circuit RLC série **aux bornes de L**.
- La différence entre premier ordre et second ordre vient de la pente :
  - $\sum |Pentes| = \begin{cases} \text{ordre 1 : } 20 \text{ dB par décade} \\ \text{ordre 2 : } 40 \text{ dB par décade} \end{cases}$
  - $\text{Rotation de phase} \begin{cases} \text{ordre 1 : } \pm \frac{\pi}{2} \\ \text{ordre 2 : } \pm \pi \end{cases}$
- Particularités :
  - L'ordre 1 joue le rôle de dérivateur à basse fréquence :  $\underline{H} = H_0 \frac{jx}{1+jx} \sim H_0 jx \sim \frac{H_0}{\omega_0} j\omega$ .
  - L'ordre 2 présente un phénomène de résonance si  $Q$  est élevé.

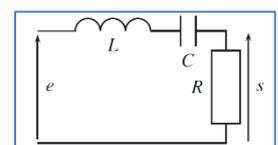
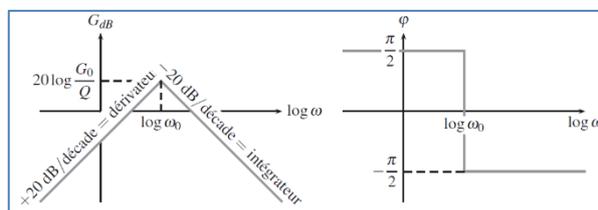


- Filtre passe-bande :

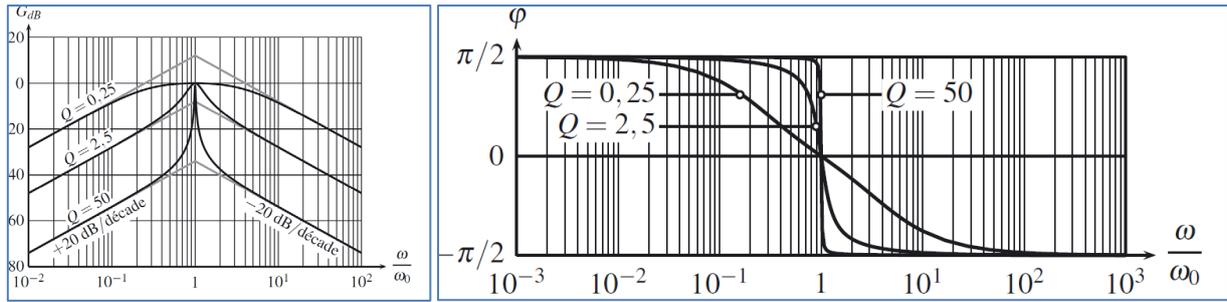
○ On l'obtient aux bornes de la résistance d'un circuit RLC série par exemple :

$$\underline{H} = H_0 \frac{\frac{jx}{Q}}{1+\frac{jx}{Q}+(jx)^2} = H_0 \frac{1}{1+jQ(x-\frac{1}{x})}$$

○ Diagramme de Bode :



Suivant la valeur de Q la bande passante est plus ou moins large et la rotation de phase plus ou moins rapide :



- Filtre coupe-bande :

Il faut observer la sortie sur L et C à la fois tel que  $\underline{H} = H_0 \frac{1-(jx)^2}{1+\frac{jx}{Q}+(jx)^2}$ . On rejette (coupe) cette fois une bande de fréquence réduite si Q est élevé.

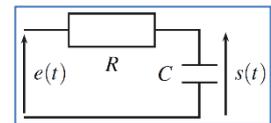
• Filtres en cascade

Lors de la mise en cascade de filtres, le fonctionnement des filtres est assuré si les filtres sont de faible impédance de sortie et de forte impédance d'entrée. Lorsque cette condition est vérifiée, les fonctions de transfert restent inchangées et la fonction de transfert du circuit global est égale au produit des fonctions de transferts de chaque filtre. On peut faire cette adaptation d'impédance à l'aide d'un montage suiveur (cf partie sur l'ALI).

SVF

a) Retrouver la fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre 1 puis en déduire son diagramme de Bode.

On utilise un diviseur de tension d'où :  $\underline{H} = \frac{1}{1+jRC\omega} = \frac{1}{1+jx}$



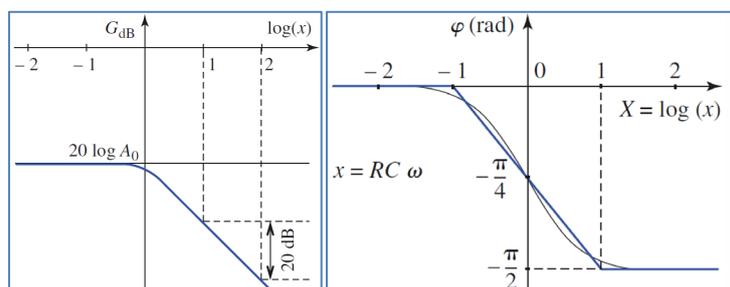
On pose :  $x = \frac{\omega}{\omega_0} = RC\omega \Rightarrow \underline{H} = \frac{1}{1+jx}$

On dresse le tableau d'étude à l'aide des fonctions équivalentes :

	Basse fréquence $x \rightarrow 0$	Fréquence propre $x = 1$	Haute fréquence $x \rightarrow \infty$
$\underline{H}$	1	$\frac{1}{1+j} = \frac{1-j}{2}$	$\frac{1}{jx} = -\frac{j}{x}$
$H$	1	$1/\sqrt{2}$	$\frac{1}{x}$
$G_{dB}$	0	$20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -10 \log 2 = -3dB$	$20 \log\left(\frac{1}{x}\right) = -20 \log(x)$
$\varphi(rad)$	0	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$

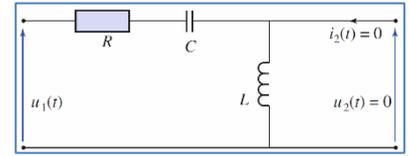
Remarque : pour trouver la phase on se sert des fonctions équivalentes de  $\underline{H}$ . Par exemple  $-\frac{j}{x}$ , imaginaire pur donne un déphasage de  $-\frac{\pi}{2}$ .

D'où les diagrammes de Bode :



b) Retrouver la fonction de transfert d'un filtre passe-haut d'ordre 2 puis en déduire son diagramme de Bode.

On utilise un diviseur de tension d'où :  $\underline{H} = \frac{jL\omega}{\frac{1}{jC\omega} + R + jL\omega} = \frac{-LC\omega^2}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$

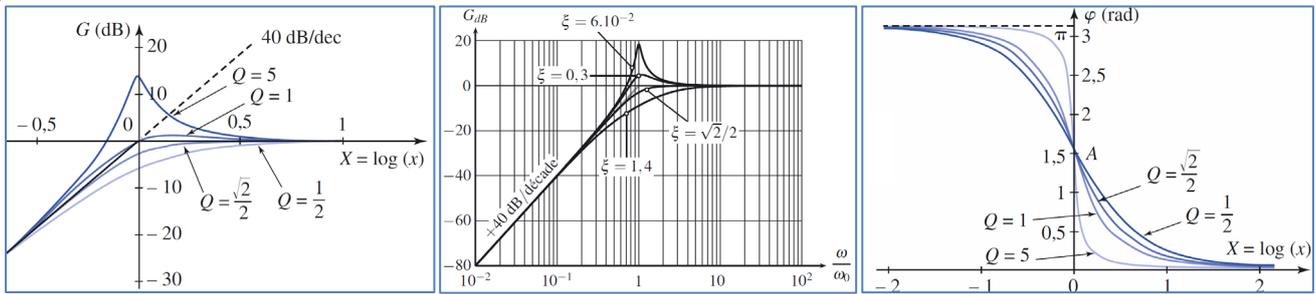


On pose :  $\begin{cases} x^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = LC\omega^2 \\ \frac{x}{Q} = \frac{\omega}{\omega_0 Q} = \omega \frac{\sqrt{LC}}{Q} = RC\omega \Rightarrow Q = \frac{\sqrt{LC}}{RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \end{cases} \Rightarrow \underline{H} = \frac{(jx)^2}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2} = \frac{-x^2}{1 + \frac{jx}{Q} - x^2}$

On dresse le tableau d'étude à l'aide des fonctions équivalentes :

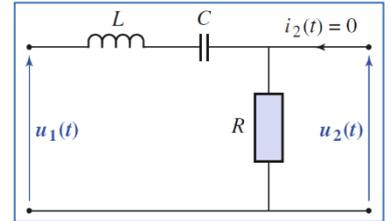
	Basse fréquence $x \rightarrow 0$	Fréquence propre $x = 1$	Haute fréquence $x \rightarrow \infty$
$\underline{H}$	$-x^2$	$\frac{-1}{\frac{j}{Q}} = jQ$	1
$H$	$x^2$	$Q$	1
$G_{dB}$	$20 \log(x^2) = 40 \log(x)$	$20 \log(Q)$	0
$\varphi(\text{rad})$	$\pm \pi \text{ donc } \pi$	$\frac{\pi}{2}$	0

Remarque : pour trouver la phase en basse fréquence, on fait en sorte que la courbe soit continue ( $\pi \rightarrow \frac{\pi}{2} \rightarrow 0$ ). D'où les diagrammes de Bode :



c) Retrouver la fonction de transfert d'un filtre passe-bande d'ordre 2 puis en déduire son diagramme de Bode. On montrera que les asymptotes se coupent à la valeur :  $G_{dB} = 20 \log\left(\frac{1 \text{ ou } H_0}{Q}\right)$

On utilise un diviseur de tension d'où :  $\underline{H} = \frac{R}{\frac{1}{jC\omega} + R + jL\omega} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$



On pose :  $\begin{cases} x^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = LC\omega^2 \\ \frac{x}{Q} = \frac{\omega}{\omega_0 Q} = \omega \frac{\sqrt{LC}}{Q} = RC\omega \Rightarrow Q = \frac{\sqrt{LC}}{RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \end{cases} \Rightarrow \underline{H} = \frac{\frac{jx}{Q}}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2} = \frac{\frac{jx}{Q}}{1 + \frac{jx}{Q} - x^2}$

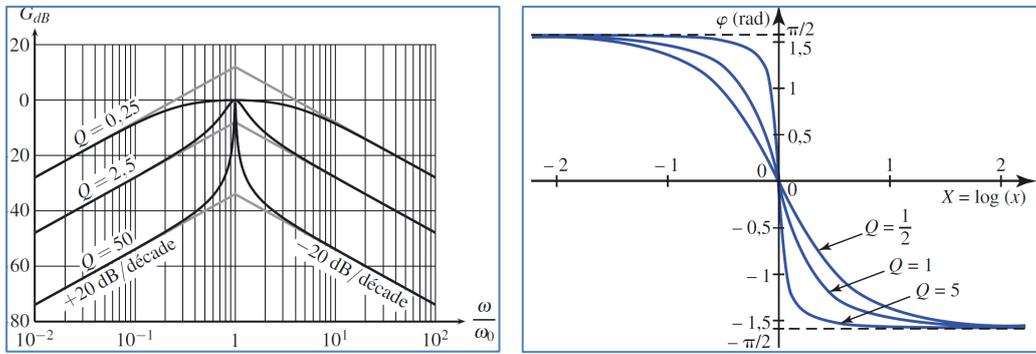
On aime bien aussi la forme suivante :  $\underline{H} = \frac{1}{\frac{1}{jx} + 1 + \frac{jx}{Q}} = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$

On dresse le tableau d'étude à l'aide des fonctions équivalentes :

	Basse fréquence $x \rightarrow 0$	Fréquence propre $x = 1$	Haute fréquence $x \rightarrow \infty$
$\underline{H}$	$\frac{jx}{Q}$	1	$-\frac{j}{Qx}$
$H$	$\frac{x}{Q}$	1	$\frac{1}{Qx}$
$G_{dB}$	$20 \log(x) - 20 \log(Q)$	0	$-20 \log(x) - 20 \log(Q)$
$\varphi(\text{rad})$	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$

Dans le cas général :  $\underline{H} = \frac{H_0\left(\frac{jx}{Q}\right)}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2} \Rightarrow \begin{cases} H_{BF} \sim H_0\left(\frac{jx}{Q}\right) \\ H_{HF} \sim -j \frac{H_0}{xQ} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G_{dB,BF} = 20 \log\left(\frac{H_0}{Q}\right) + 20 \log(x) \\ G_{dB,HF} = 20 \log\left(\frac{H_0}{Q}\right) - 20 \log(x) \end{cases}$

Ainsi les asymptotes à HF et BF ont une ordonnée à l'origine commune  $20 \log\left(\frac{H_0}{Q}\right)$  avec en abscisse  $\log(x)$ .



d) Retrouver la bande passante du passe-bande.

Sous la forme suivante le calcul est rapide (et déjà vu) :  $\underline{H} = \frac{1}{1+jQ\left(x-\frac{1}{x}\right)}$

Pour la bande passante les pulsations de coupure doivent vérifier :  $\frac{H}{H_{max}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

On élève au carré d'où :  $1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 2$  :

$$\Leftrightarrow Q \left(x - \frac{1}{x}\right) = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 \pm \frac{x}{Q} = 0$$

Dont les racines sont :  $x = \pm \frac{1}{2Q} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} > 0$

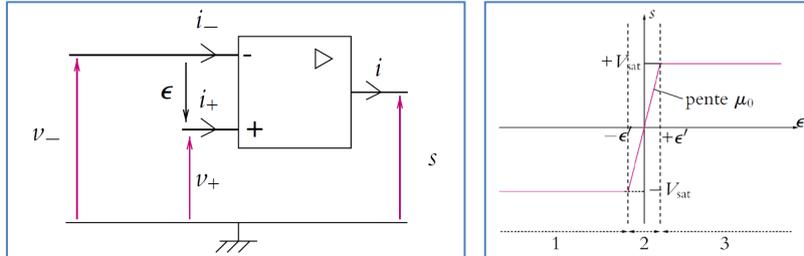
On choisit les deux racines positives :  $x = \pm \frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = \frac{1}{Q} \Leftrightarrow \Delta \omega = \frac{\omega_0}{Q}$

# ALI : amplificateur linéaire intégré

## Synthèse

### • ALI non idéal

- Un amplificateur linéaire intégré est un amplificateur de différence qu'il faut alimenter par une alimentation :  $V_{cc} = +15V$  et  $V_{cc} = -15V$  qu'il ne faudra pas oublier lors de la réalisation du montage.



On parle d'amplificateur de différence si la tension de sortie (s) est proportionnelle à la différence  $\epsilon = v_+ - v_-$  entre :

- La tension  $v_+$ , différence entre le potentiel de l'entrée non inverseuse « + » et celui de la masse d'une part ;
- La tension  $v_-$ , différence entre le potentiel de l'entrée inverseuse « - » et celui de la masse, d'autre part.

On définit le gain différentiel d'un tel circuit par :

$$\mu_0 = \frac{s}{v_+ - v_-} = \frac{s}{\epsilon}$$

C'est un paramètre caractéristique d'un amplificateur de différence, qui prend couramment une valeur très élevée, de l'ordre de  $\mu_0 = 10^5$ .

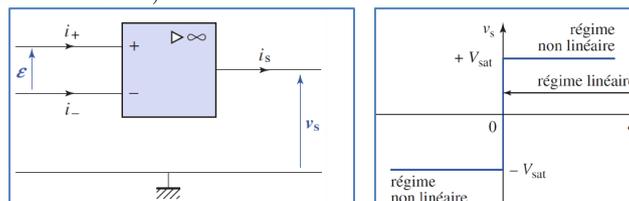
On distingue trois domaines :

- La plage linéaire (1) :  $|\epsilon| < \frac{V_{sat}}{\mu_0}$  avec  $s = \mu_0 \epsilon$
- La saturation positive (2) :  $\epsilon \geq \frac{V_{sat}}{\mu_0}$  avec  $s = V_{sat} \sim V_{cc}$
- La saturation négative (3) :  $\epsilon \leq -\frac{V_{sat}}{\mu_0}$  avec  $s = -V_{sat} \sim -V_{cc}$

L'impédance d'entrée étant quasi-infinie, on considérera dans la suite que les courants absorbés par les entrées inverseuse et non inverseuse sont nuls :  $i_+ = 0, i_- = 0$ .

### • ALI idéal

- L'ALI idéal correspond au modèle « parfait » de l'ALI : on suppose que  $\mu_0 \rightarrow \infty$  d'où la nouvelle caractéristique et symbole (on rajoute le symbole  $\infty$  en haut à droite) :

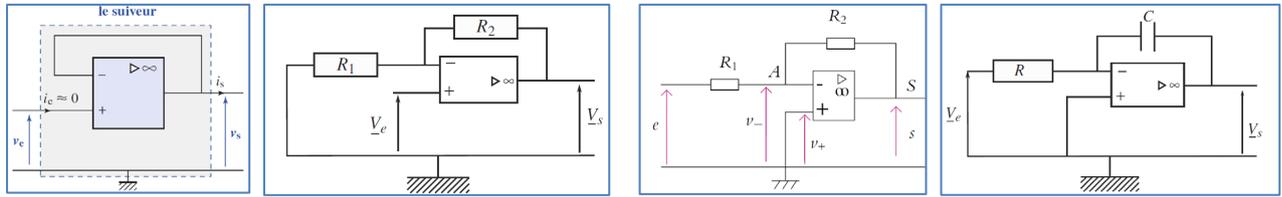


- Un ALI idéal est un amplificateur de différence avec :

- o Une impédance d'entrée infinie  $Z_e \rightarrow \infty \Rightarrow$  les courants d'entrée sont nuls :  $\begin{cases} i_+ = 0 \\ i_- = 0 \end{cases}$  (Ceci est valable en régime saturé et linéaire)
- o Un fonctionnement linéaire obtenu lorsque  $|s| \leq V_{sat}$  tel que :  $\epsilon = 0 \Rightarrow v_+ = v_-$
- o Un fonctionnement saturé obtenu lorsque :  $s = \pm V_{sat}$  tel que :  $\epsilon \neq 0 \Rightarrow v_- \neq v_+$

### • Montages classiques

- Suiveur :  $V_s = V_e$
- Non-inverseur :  $V_s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_e$
- Inverseur :  $V_s = -\frac{R_2}{R_1} V_e$
- Intégrateur :  $V_s = -\frac{1}{RC} \int V_e dt$
- Dérivateur :  $V_s = -RC \frac{dV_e}{dt}$  (Sur le schéma on inverse de position R et C)

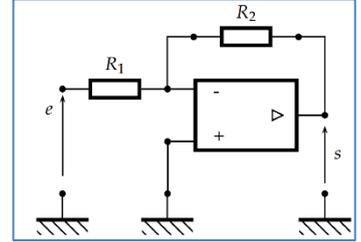


4 schémas classique d'ALI en mode linéaire : Suiveur, Non inverseur, Inverseur et intégrateur.

## SVF

a) Montage non inverseur, intégrateur et dérivateur.

- Calculer la fonction de transfert du montage non inverseur suivant
- Remplacer  $R_2$  par un condensateur et  $R_1$  par  $R$ . Calculer alors la fonction de transfert. Comment se nomme ce montage ?
- Remplacer  $R_1$  par un condensateur et  $R_2$  par  $R$ . Calculer alors la fonction de transfert. Comment se nomme ce montage ?



On applique un diviseur de tension sur l'entrée inverseuse (ou la LNTP) :

$$\frac{e}{e-s} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \Rightarrow e(R_1 + R_2) = (e-s)R_1 \Rightarrow H = -\frac{R_2}{R_1}$$

En utilisant les impédances :  $\underline{H} = -\frac{Z_c}{R} = -\frac{1}{jRC\omega} \Rightarrow s(t) = -\frac{1}{RC} \int e(t)dt$  : c'est un intégrateur.

En utilisant les impédances :  $\underline{H} = -\frac{R}{Z_c} = -jRC\omega \Rightarrow s(t) = -RC \frac{de}{dt}$  : c'est un dérivateur.

b) Structure de Rauch. Calculer la fonction de transfert du filtre actif suivant en fonction des différentes admittances : (La méthode est à retenir car elle s'applique de façon plus simple à tout type de filtres à base d'ALI)

- LNTP à l'entrée inverseuse :

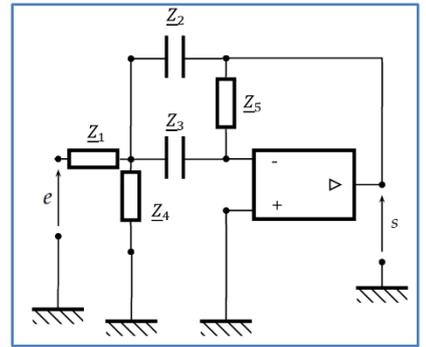
$$V_- = \frac{V_A Y_3 + s Y_5}{Y_3 + Y_5} = 0 \text{ car } V_+ = 0$$

- LNTP au nœud principal A :

$$V_A = \frac{e Y_1 + \overset{0}{V_-} Y_3 + s Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{e Y_1 + s Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4} &= -s \frac{Y_5}{Y_3} \Leftrightarrow -s Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) = Y_3 (e Y_1 + s Y_2) \\ \Leftrightarrow s(-Y_2 Y_3 - Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)) &= e Y_3 Y_1 \Rightarrow \underline{H} = -\frac{Y_1 Y_3}{Y_2 Y_3 + Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)} \end{aligned}$$



c) On choisit les admittances suivantes :  $Y_1 = \frac{1}{R_1}, Y_2 Y_3 = (jC\omega)^2, Y_4 = \frac{1}{R}, Y_5 = \frac{1}{R_2}$ . Démontrer qu'il s'agit d'un passe-bande.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{H} &= -\frac{-\frac{jC\omega}{R_1}}{(jC\omega)^2 + \frac{1}{R_2} \left( \frac{1}{R_1} + 2jC\omega + \frac{1}{R} \right)} = -\frac{\frac{jC\omega}{R_1} R_2 \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right)^{-1}}{(jC\omega)^2 R_2 \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right)^{-1} + 1 + 2jC\omega \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right)^{-1}} \\ \Rightarrow \underline{H} &= -\frac{\frac{jC\omega}{R_1} R_2 \left( \frac{RR_1}{R+R_1} \right)}{(jC\omega)^2 R_2 \left( \frac{RR_1}{R+R_1} \right) + 1 + 2jC\omega \left( \frac{RR_1}{R+R_1} \right)} \\ \Rightarrow \underline{H} &= -\frac{R_1}{2R_2} \frac{2jC\omega \left( \frac{RR_1}{R+R_1} \right)}{(jC\omega)^2 R_2 \left( \frac{RR_1}{R+R_1} \right) + 1 + 2jC\omega \left( \frac{RR_1}{R+R_1} \right)} = H_0 \frac{\frac{jx}{Q}}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2} \end{aligned}$$

$$\text{où } \begin{cases} H_0 = -\frac{R_1}{2R_2} \\ \omega_0^2 = \frac{R+R_1}{RR_1 R_2 C^2} \\ \omega_0 Q = \frac{R+R_1}{2CRR_1} \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{RR_1 R_2 C^2}{R+R_1} \cdot \frac{R+R_1}{2CRR_1}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2(R+R_1)}{RR_1}} \end{cases} \Rightarrow \text{C'est bien un filtre passe bande d'ordre 2}$$