

OP1 – SVF

- Retrouvez les conditions d'application pour avoir réflexion totale ainsi que la valeur de l'angle d'incidence limite.
- Dans le cas d'une fibre optique, calculer l'angle définissant le cône d'acceptance puis la valeur de la dispersion intermodale.
- Calculer le grossissement pour une lunette astronomique.
- Calculer la puissance intrinsèque d'un microscope $P_i = \frac{\alpha'}{AB}$.
- Calculer la profondeur de champ d'un appareil photographique dans le cas où $|\overline{OA}| \gg f'$.
- Dans le cas de la méthode de Bessel, démontrer que $D > 4f'$.

Exercices classiques :

- OD11 – Bessel
- OD12 – Optique de l'œil
- OD111 – Prisme de petit angle

a) Retrouvez les conditions d'application pour avoir réflexion totale ainsi que la valeur de l'angle d'incidence limite.

Dans le cas où le milieu 1 est plus réfringent que le milieu 2, le faisceau va s'éloigner donc i_2 peut varier de 0 à $\pi/2$ mais i_1 sera limité : $n_1 > n_2$.

Loi de Descartes :

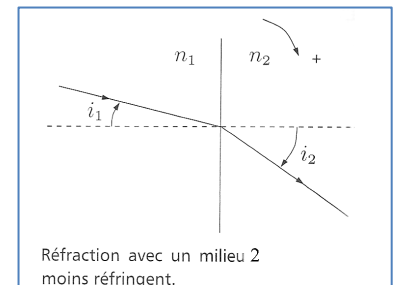
$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2) \Leftrightarrow \sin(i_2) = \frac{n_1}{n_2} \sin(i_1)$$

$$\text{Or } 0 \leq i_2 \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \sin(i_2) \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{n_1}{n_2} \sin(i_1) \leq 1$$

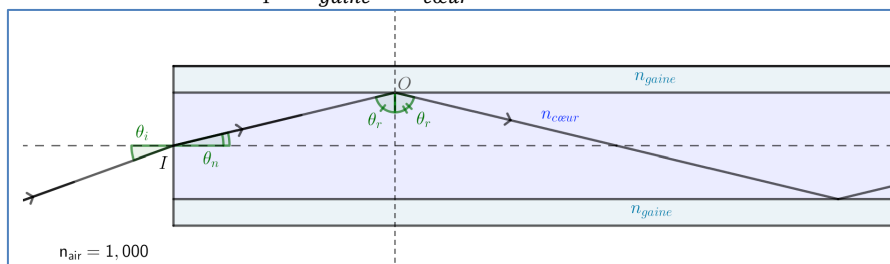
$$\Rightarrow 0 \leq \sin(i_1) \leq \frac{n_2}{n_1}$$

$$\Rightarrow 0 \leq i_1 \leq \text{Arcsin}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = i_{1,lim} : \text{angle de réflexion totale.}$$



b) Dans le cas d'une fibre optique, calculer l'angle définissant le cône d'acceptance puis la valeur de la dispersion intermodale.

On considère une fibre à saut d'indice telle que $n_{gaine} < n_{cœur}$.



Pour que le signal soit correctement guidé, il ne faut pas qu'il y ait de réfraction dans la gaine. En effet le signal transmis ne serait plus guidé et serait donc perdu. Vu les indices, il peut y avoir réfraction en O ainsi on cherche à avoir :

$$\theta_r \geq \theta_{r,lim} \Leftrightarrow \sin(\theta_r) \geq n_{gaine}/n_{cœur}$$

Et en entrée :

$$\begin{aligned} \sin(\theta_i) &= n_{cœur} \sin(\theta_n) \\ \Rightarrow \sin(\theta_i) &= n_{cœur} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_r\right) \\ \Rightarrow \sin(\theta_i) &= n_{cœur} \cos(\theta_r) \end{aligned}$$

Or :

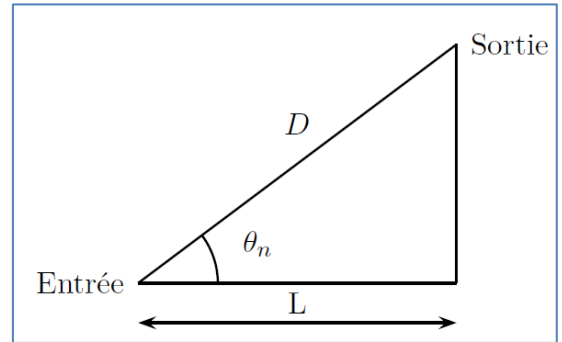
$$\begin{aligned} \sin^2(\theta_r) + \cos^2(\theta_r) &= 1 \\ \Rightarrow \sin(\theta_i) &\leq n_{cœur} \sqrt{1 - \left(\frac{n_{gaine}}{n_{cœur}}\right)^2} \\ \Rightarrow \sin(\theta_i) &\leq \sqrt{n_{cœur}^2 - n_{gaine}^2} = \sin(\theta_i)_{max} \end{aligned}$$

$\sqrt{n_{\text{cœur}}^2 - n_{\text{gaine}}^2}$ est appelée l'ouverture numérique.

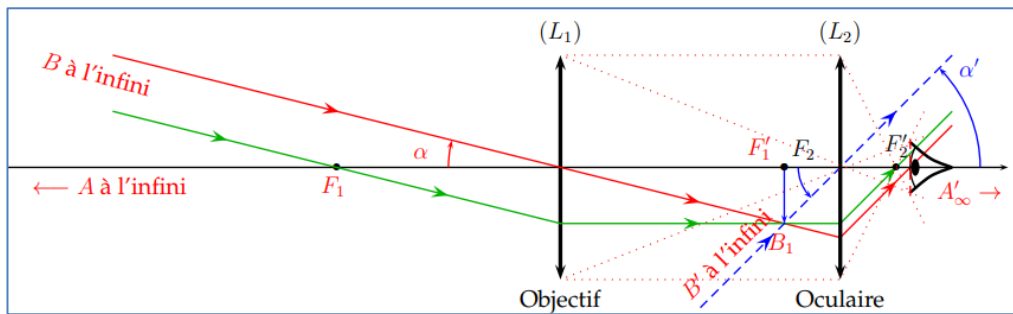
Pour pouvoir transmettre un signal, il est nécessaire que les différentes informations soient distinguables, en particulier que deux impulsions successives soient telles que la première finit d'arriver avant que la seconde commence à arriver. Toutefois, en fonction de l'angle θ_n , la distance parcourue et donc le temps de parcours varie. Une impulsion va donc s'élargir (temporellement) au fur et à mesure de la propagation le long de la fibre. On appelle dispersion intermodale la grandeur :

$$\Delta t = t_{\text{max}} - t_{\text{min}}$$

$$\text{où } \begin{cases} t_{\text{max}} = \frac{D}{v} = \frac{L}{\frac{c}{n_{\text{cœur}}} \times \cos(\theta_n)} = \frac{Ln_{\text{cœur}}}{c} \times \frac{1}{n_{\text{cœur}} \cos(\theta_n)} \\ \text{car } \cos(\theta_n) = \sin(\theta_r) \\ t_{\text{min}} = \frac{L}{v} = \frac{L}{\frac{c}{n_{\text{cœur}}}} = \frac{Ln_{\text{cœur}}}{c} \\ \Rightarrow \Delta t = t_{\text{max}} - t_{\text{min}} \\ \Rightarrow \Delta t = \frac{Ln_{\text{cœur}}}{c} \left(\frac{n_{\text{cœur}}}{n_{\text{gaine}}} - 1 \right) \\ \Rightarrow \Delta t = \frac{L n_{\text{cœur}}}{c n_{\text{gaine}}} (n_{\text{cœur}} - n_{\text{gaine}}) : \text{ la dispersion intermodale} \end{cases}$$



c) Calculer le grossissement pour une lunette astronomique.

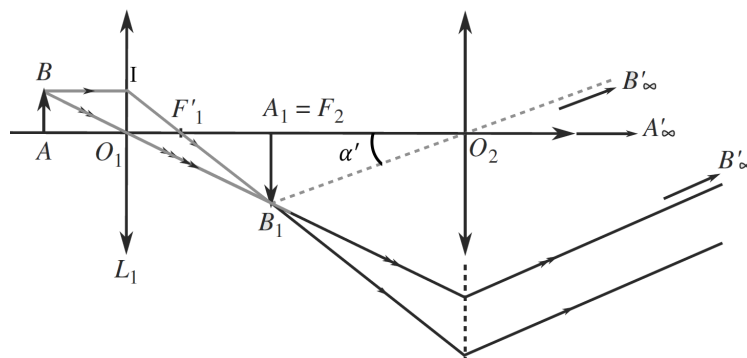


On définit le grossissement algébrique par : $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$

On a ici : $\begin{cases} \alpha = -\frac{A_1 B_1}{f'_1} \\ \alpha' = \frac{A_1 B_1}{f'_2} \end{cases}$

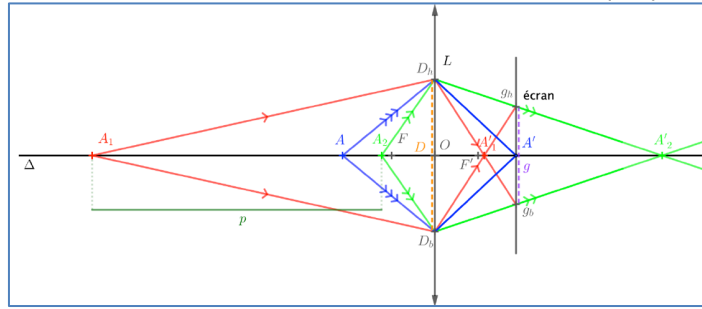
$$\Rightarrow G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f'_1}{f'_2}$$

d) Calculer la puissance intrinsèque d'un microscope $P_i = \frac{\alpha'}{AB}$.



$$\text{D'après le schéma : } \begin{cases} \alpha' = \frac{A_1 B_1}{O_2 F_2} = -\frac{A_1 B_1}{f'_2} \\ \frac{A_1 B_1}{AB} = \frac{A_1 B_1}{O_1 I} = \frac{F'_1 F_2}{F'_1 O_1} = \frac{\Delta}{-f'_1} \end{cases} \Rightarrow \alpha' = -\overline{AB} \times \frac{\Delta}{-f'_1 f'_2} \Rightarrow P_i = \frac{\Delta}{f'_1 f'_2}$$

e) Calculer la profondeur de champ d'un appareil photographique dans le cas où $|\overline{OA}| \gg f'$.



D'après la loi de Descartes : $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'}$. On différentie : $\frac{d\overline{OA'}}{OA'^2} - \frac{d\overline{OA}}{OA^2} = 0$

Notons $X = d\overline{OA} = \overline{A_1A}$ et $X' = d\overline{OA'} = \overline{A'_1A'}$ $\Rightarrow X' = X \frac{\overline{OA'}^2}{OA^2}$

On va supposer que : $\begin{cases} |\overline{OA}| \gg f' \Rightarrow A' \sim F' \\ \text{et } \overline{A_1A} \sim \overline{A_2A} \Rightarrow p \sim 2X \end{cases}$

D'après Thalès : $\frac{\overline{OA'_1}}{A'_1A'} = \frac{D}{g} \Rightarrow X' = \frac{g}{D} \overline{OA'_1} \Rightarrow X' \sim \frac{g}{D} f'$

Par conséquent : $X = \frac{gf'}{D} \frac{\overline{OA}^2}{OA'^2} \sim \frac{g}{Df'} \overline{OA}^2 \Rightarrow p = \frac{2g}{Df'} \overline{OA}^2$

f) Dans le cas de la méthode de Bessel, démontrer que $D > 4f'$.

On note $\begin{cases} D = \overline{AA'} \\ d = |\overline{OA'_2} - \overline{OA'_1}| \\ p' = \overline{OA'} \text{ et } p = \overline{OA} \end{cases}$

$$\text{Descartes : } \frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{p+D} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} \Rightarrow -Df' = p^2 + Dp \Rightarrow p^2 + D.p + Df' = 0$$

Le discriminant s'écrit :

$$\Delta = b^2 - 4ac = D^2 - 4Df' > 0 \Rightarrow D > 4f'$$

Les deux solutions ont un grandissement négatif mais une des solutions grandit l'image alors que l'autre la réduit.

OP2 – Synthèse

- *Modèle scalaire de la lumière*

- Le chemin optique (SM) fournit une mesure en unité de longueur du temps de propagation τ_M mis par une onde lumineuse pour aller de S à M :

$$(SM) = \int_{(\Gamma, S \rightarrow M)} n(P) ds = c\tau_M$$

- Dans un milieu homogène d'indice n, le chemin optique s'écrit : $(SM) = nSM$.
- Une onde lumineuse émise par une source ponctuelle S monochromatique de pulsation ω peut être décrite en un point M par un champ scalaire $s(M, t)$ appelé amplitude instantanée dont l'expression est :

$$s(M, t) = A(M) \cos(\omega t - \varphi_M) \text{ avec } \varphi_M = \varphi_S + \frac{2\pi}{\lambda_0} (SM)$$

- Une surface d'onde est le lieu des points tel que $(SM) = cste$, c'est-à-dire l'ensemble des points atteints au même instant par l'onde lumineuse issue de S. D'après le théorème de Malus, les surfaces d'ondes sont orthogonales aux rayons lumineux.
- Pour une onde plane se propageant dans un milieu homogène d'indice n, O étant une origine quelconque,

$$\varphi_M = \varphi_O + \vec{k} \cdot \overline{OM}$$

- L'éclairement est proportionnel à la moyenne du carré de l'amplitude instantanée. Physiquement, il s'agit de la puissance lumineuse moyenne reçue par unité de surface :

$$\varepsilon(M) = K \langle s(M, t)^2 \rangle$$

- Représentation complexe

On associe une notation complexe à l'amplitude instantanée de l'onde émise par une source monochromatique :

$$\underline{s}(M, t) = \underline{A}(M) e^{j\omega t} \text{ où } \underline{A}(M) = A(M) e^{-j\varphi_M},$$

OP2 – SVF

- a) Montrer que l'éclairement sur un écran est proportionnel à la valeur moyenne du carré de la vibration scalaire.
 b) Montrer que la longueur de cohérence et de largeur de raie d'une émission sont liées par : $l_c = c\tau_c = \frac{c}{\Delta\nu}$.

Exercices classiques :

- Voir OP3/4/5

- a) Montrer que l'éclairement sur un écran est proportionnel à la valeur moyenne du carré de la vibration scalaire.
 La puissance reçue par l'écran est proportionnelle à la moyenne temporelle du vecteur de Poynting arrivant sur la surface du capteur :

$$P \div \iint_S \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S}$$

$$\stackrel{OPPH}{\Leftrightarrow} P \div \iint_S \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2} \vec{u} \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dS} \div \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2}$$

$$\text{Or } \langle s(M, t)^2 \rangle = \frac{A^2(M)}{2} \div \frac{E_0^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dS} \div \langle s(M, t)^2 \rangle$$

Ainsi l'éclairement reçu s'écrit :

$$\varepsilon(M) = \frac{dP}{dS} = K \langle s(M, t)^2 \rangle$$

- b) Montrer que la longueur de cohérence et de largeur de raie d'une émission sont liées par : $l_c = c\tau_c = \frac{c}{\Delta\nu} = \frac{\lambda_m^2}{\Delta\lambda}$.

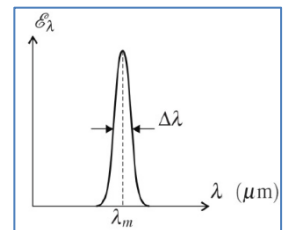
D'après Heisenberg, le temps de survie du niveau excité est lié à l'indétermination sur l'énergie par : $\tau_c \Delta E \cong h$

$$\Rightarrow \tau_c \Delta\nu \cong 1$$

$$\text{Or : } l_c = c\tau_c \Rightarrow l_c = \frac{c}{\Delta\nu}$$

$$\text{Si on rajoute le fait que : } \nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow d\nu = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda \Rightarrow \Delta\nu = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m^2}$$

$$\Rightarrow l_c = \frac{\lambda_m^2}{\Delta\lambda}$$



OP3 – Synthèse

- Interférence à deux ondes

Si les vibrations lumineuses vérifient les conditions de cohérence :

- Cohérence temporelle : $\omega_1 = \omega_2$
- Sources synchrones (Cohérence de phase) : $\varphi_{S_2} - \varphi_{S_1} = cste$
- Sources mutuellement cohérentes : $\delta(M) \ll l_c$
- Cohérence de polarisation : $\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \neq 0$

Alors l'intensité au point M est donnée par la formule de Fresnel :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi(M))$$

Avec :

$$\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} [(S_2 M) - (S_1 M)]$$

Sinon, les ondes sont incohérentes et l'intensité en M s'écrit : $I(M) = I_1 + I_2$.

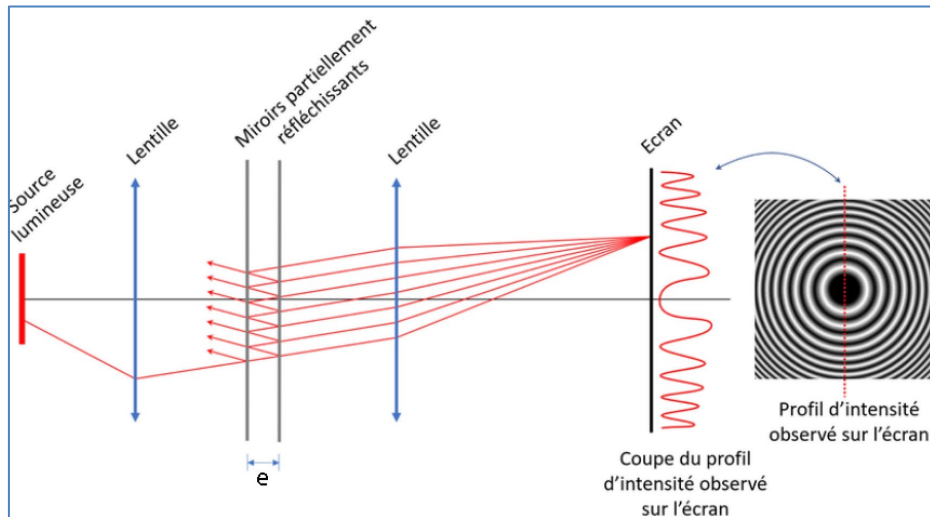
- Contraste

Si les deux ondes sont cohérentes, l'intensité en M admet des maxima ($\delta = p\lambda_0$) et des minima ($\delta = (p + \frac{1}{2})\lambda_0$) pour certaines valeurs de la différence de marche. La visibilité des franges est qualifiée par le contraste :

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

OP3 – SVF

- Montrer la formule de Fresnel en précisant les hypothèses faites et la signification des grandeurs intervenant dans la formule. Établir l'expression du contraste C et montrer que ce contraste est maximal quand $I_1 = I_2$. En déduire l'éclairement dans cette situation.
- Exprimer la différence de marche entre deux rayons successifs dans le cas d'un réseau par réflexion puis par transmission. Expliquer la notion d'ordre sur un schéma.
- Retrouver l'expression de l'intensité lors de la superposition de N ondes cohérentes de même amplitude. Représenter graphiquement $I(M)$.
- A l'aide du critère de Rayleigh, retrouver l'expression du pouvoir de résolution d'un réseau.
- Retrouver l'intensité lumineuse $I(M)$ lors de l'utilisation d'un interféromètre de Pérot-Fabry.



- Calculer la différence de marche entre deux rayons successifs.
- Rappeler les valeurs de R et T pour interface air – verre et verre – air
- Démontrer que :
$$I(M) = \frac{I_0}{1+m \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

Exercices classiques :

- OP32 : Interférences
- OP34 : Tube de Kundt

- Montrer la formule de Fresnel en précisant les hypothèses faites et la signification des grandeurs intervenant dans la formule. Établir l'expression du contraste C et montrer que ce contraste est maximal quand $I_1 = I_2$. En déduire l'éclairement dans cette situation.

- Supposons deux sources lumineuses et utilisons l'additivité des vibrations : $s(M, t) = s_1(M, t) + s_2(M, t)$

$$\text{avec } \begin{cases} s_1(M, t) = A_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M)) \\ s_2(M, t) = A_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M)) \end{cases}$$

D'où l'éclairement :

$$\varepsilon(M) = K \langle s^2(M) \rangle = K (\langle s_1^2 \rangle + \langle s_2^2 \rangle + 2 \langle s_1 s_2 \rangle)$$

$$\text{Or : } \begin{cases} \varepsilon_1 = K \langle s_1^2 \rangle = \frac{KA_1^2}{2} \\ \varepsilon_2 = K \langle s_2^2 \rangle = \frac{KA_2^2}{2} \end{cases}$$

$$\text{Et : } 2K \langle s_1 s_2 \rangle = 2KA_1 A_2 \langle \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M)) \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M)) \rangle$$

$$\text{Or : } \cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$\Rightarrow 2K \langle s_1 s_2 \rangle = KA_1 A_2 \langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t - \varphi_1(M) - \varphi_2(M)) + \cos((\omega_1 - \omega_2)t - \varphi_1(M) + \varphi_2(M)) \rangle$$

Or $\langle \cos(\omega t + \varphi) \rangle = 0$ si $\omega \neq 0$, par conséquent :

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_{12}$$

$$\text{où } \varepsilon_{12} = 2\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t - (\varphi_1(M) - \varphi_2(M))) \rangle$$

Si les vibrations lumineuses vérifient les conditions de cohérence :

- Cohérence temporelle : $\omega_1 = \omega_2$
- Sources synchrones (Cohérence de phase) : $\varphi_{s_2} - \varphi_{s_1} = cste$

- Sources mutuellement cohérentes : $\delta(M) \ll l_c$
- Cohérence de polarisation : $\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \neq 0$

Alors :

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cos(\Delta\varphi)$$

- ii- Le contraste s'écrit : $C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$

$$\Rightarrow C = \frac{4\sqrt{I_1 I_2}}{2(I_1 + I_2)} = 2 \frac{\sqrt{u}}{1+u} \text{ où } u = \frac{I_2}{I_1}$$

Or :

$$C'(u) = \frac{2 \left[\frac{1}{2\sqrt{u}}(1+u) - \sqrt{u} \right]}{(1+u)^2} = \frac{2 \left[\frac{1}{2\sqrt{u}} - \frac{\sqrt{u}}{2} \right]}{(1+u)^2} = \frac{\sqrt{u} \left[\frac{1}{u} - 1 \right]}{(1+u)^2} = 0 \text{ pour } u = 1$$

$$\text{Si } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_0 : \varepsilon(M) = 2\varepsilon_0(1 + \cos(\Delta\varphi))$$

- b) Retrouver l'expression de l'intensité lors de la superposition de N ondes cohérentes de même amplitude. Représenter graphiquement $I(M)$.

Nous supposons que :

- Les N ondes qui viennent interférer en M sont émises par N sources $S_1, S_2, \dots, S_p, \dots, S_N$.
- La différence de phase en M des ondes émises par les sources S_{p+1} et S_p est une constante : $\varphi_{p+1}(M) - \varphi_p(M) = \varphi$
- Les N ondes ont la même amplitude au point M .

Dans ces conditions, la vibration lumineuse rayonnée par la source S_p (et S_{p+1}) s'écrit au point M ainsi :

$$\begin{cases} \underline{s}_p(M, t) = s_0 e^{i(\omega t - \varphi_p(M))} \\ \underline{s}_{p+1}(M, t) = s_0 e^{i(\omega t - \varphi_{p+1}(M))} = \underline{s}_p(M, t) e^{-i\varphi} \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} \underline{s}_2(M, t) = \underline{s}_1(M, t) e^{-i\varphi} \\ \underline{s}_p(M, t) = \underline{s}_1(M, t) e^{-i(p-1)\varphi} \end{cases}$$

Donc :

$$\underline{s}(M, t) = \sum_{p=1}^N \underline{s}_1(M, t) e^{-i(p-1)\varphi}$$

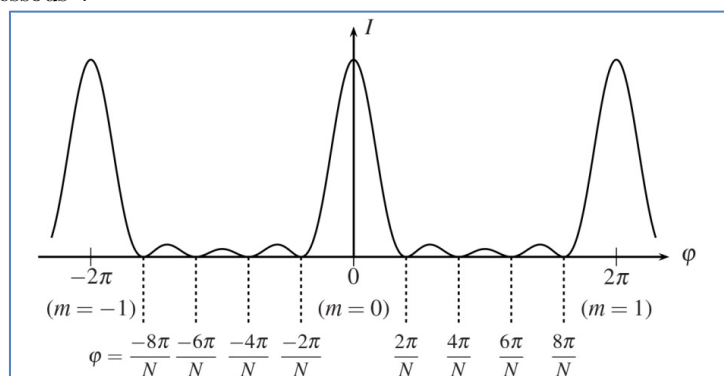
Il s'agit d'une progression géométrique d'où :

$$\begin{aligned} \underline{s}(M, t) &= \underline{s}_1(M, t) \frac{1 - e^{-iN\varphi}}{1 - e^{-i\varphi}} \Leftrightarrow \underline{s}(M, t) = \underline{s}_1(M, t) \frac{e^{-\frac{iN\varphi}{2}} e^{\frac{iN\varphi}{2}} - e^{-\frac{iN\varphi}{2}}}{e^{-i\varphi/2} e^{i\varphi/2} - e^{-i\varphi/2}} \\ &\Leftrightarrow \underline{s}(M, t) = \underline{s}_1(M, t) e^{-\frac{i(N-1)\varphi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \end{aligned}$$

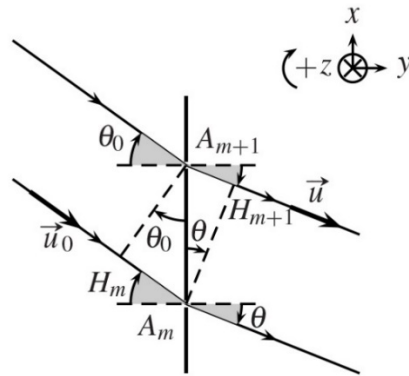
Par conséquent l'intensité lumineuse peut s'écrire : $I(M, t) = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{s} \underline{s}^*)$

$$I(M, t) = I_1 \left(\frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right)^2 \text{ avec } I_{max} = N^2 I_1 \text{ d'où } \frac{I(M, t)}{I_{max}} = \left(\frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right)^2$$

Dont le tracé est donné ci-dessous :



- c) Exprimer la différence de marche entre deux rayons successifs dans le cas d'un réseau par réflexion puis par transmission. Donnez, dans le cas du réseau par réflexion, la relation des réseaux.



Le plan orthogonal aux rayons incidents sur le plan des trous d'Young et contenant les points H_m et A_{m+1} est un plan d'onde relativement à la source S.

Le plan orthogonal aux rayons émergents et qui contient les points H_{m+1} et A_m est un plan d'onde relativement à une source fictive qui serait placée en M.

D'où la différence de marche :

$$\begin{aligned} \delta(M) &= (H_{m+1}A_{m+1}) - (H_mA_m) \\ \Leftrightarrow \delta(M) &= na \sin(\theta_p) - na \sin(\theta_0) \end{aligned}$$

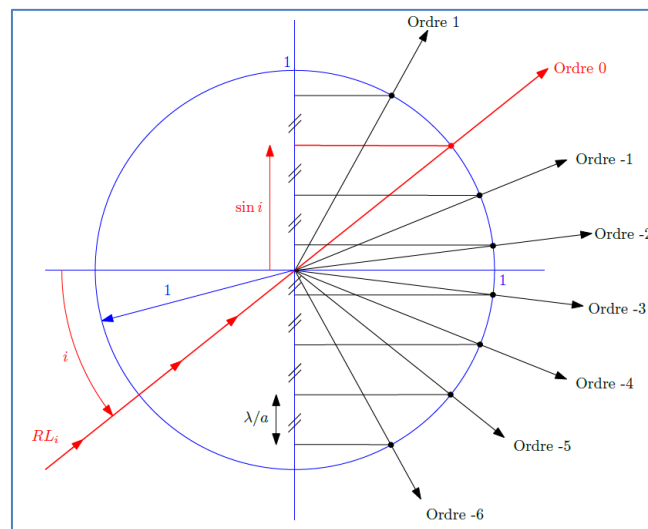
Pour un réseau par transmission les deux angles sont de sens opposé d'où :

$$\delta(M) = na \sin(\theta_p) + na \sin(\theta_0)$$

L'éclairement est maximal si on vérifie :

$$\sin(\theta_p) - \sin(\theta_0) = p \frac{\lambda_0}{na} \text{ où } p \text{ entier (relation des réseaux)}$$

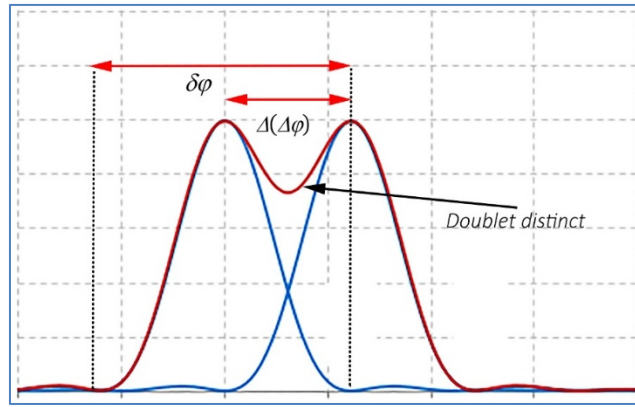
On représente pour une incidence i les différents ordres que l'on peut observer. (Ici de $p = -6$ à 1).



- d) A l'aide du critère de Rayleigh, retrouver l'expression du pouvoir de résolution d'un réseau.

Le critère de Rayleigh impose, afin de bien visualiser les pics de « diffraction » que :

$$\Delta(\Delta\varphi) \geq \delta\varphi_{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{N}$$



On définit le pouvoir de résolution par :

$$P_R = \frac{\lambda}{\delta\lambda_{min}}$$

Où $\delta\lambda_{min}$ est la différence minimale de longueurs d'onde que le système arrive à séparer. Une raie spectrale de longueur d'onde λ est déviée d'un angle θ_p telle que :

$$\sin(\theta_p) - \sin(\theta_0) = p \frac{\lambda_0}{na}$$

Ainsi pour deux longueurs d'ondes que l'on cherche à séparer :

$$\begin{cases} \sin(\theta_{p,1}) - \sin(\theta_0) = p \frac{\lambda_1}{na} \\ \sin(\theta_{p,2}) - \sin(\theta_0) = p \frac{\lambda_2}{na} \end{cases} \Rightarrow \sin(\theta_{p,2}) - \sin(\theta_{p,1}) = p \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{na} = p \frac{\delta\lambda}{na}$$

Pour la partie pic principal-première annulation on vérifie (par exemple pour λ_1) :

$$\begin{aligned} \sin(\theta_{max,1}) - \sin(\theta_{min,1}) &= \Delta p \times \frac{\lambda_1}{na} \text{ où } \Delta p = \frac{1}{N} \\ \Rightarrow \sin(\theta_{max,1}) - \sin(\theta_{min,1}) &= \frac{\lambda_1}{Nna} \end{aligned}$$

Or $\Delta\varphi = 2p\pi$

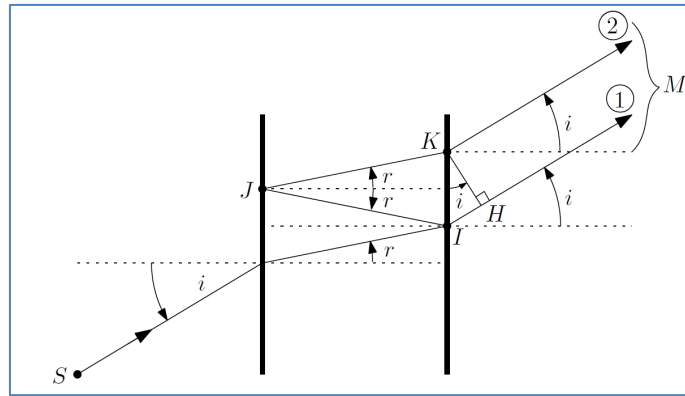
$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\delta\varphi}{2} = \frac{2\pi na}{\lambda_1} (\sin(\theta_{max,1}) - \sin(\theta_{min,1})) \\ \Delta(\Delta\varphi) = \frac{2\pi na}{\lambda_1} (\sin(\theta_{p,2}) - \sin(\theta_{p,1})) \end{cases} \\ \text{Or : } \Delta(\Delta\varphi) \geq \delta\varphi_{\frac{1}{2}} = \frac{\delta\varphi}{2} \\ \Rightarrow \sin(\theta_{p,2}) - \sin(\theta_{p,1}) > \sin(\theta_{max,1}) - \sin(\theta_{min,1}) \\ \Rightarrow p \frac{\delta\lambda}{na} > \frac{\lambda_1}{Nna} \\ \Leftrightarrow \frac{\delta\lambda}{\lambda_1} \geq \frac{1}{pN} \\ \Leftrightarrow \frac{\lambda_1}{\delta\lambda} \leq pN \end{aligned}$$

Par conséquent le pouvoir de résolution s'écrit :

$$P_R = \frac{\lambda}{\delta\lambda_{min}} = pN$$

e) Retrouver l'intensité lumineuse $I(M)$ lors de l'utilisation d'un interféromètre de Pérot-Fabry.

- i- Calculer la différence de marche entre deux rayons successifs.
- ii- Rappeler les valeurs de R et T pour interface air – verre et verre – air. Puis calculer le coefficient de transmission total du rayon 1 puis 2.
- iii- Démontrer que : $I(M) = \frac{I_0}{1+m \sin^2(\frac{\phi}{2})}$



- i- La différence de marche entre deux rayons successifs peut s'exprimer par en utilisant le théorème de Malus :

$$\delta = 2(IJ) - (IH) = \frac{2ne}{\cos(r)} - (KI) \sin(i)$$

La lame de verre ne fait que déplacer le rayon ainsi $i = r$ et $(KI) = 2ne \tan(i)$

$$\Rightarrow \delta(M) = 2ne \left(\frac{1}{\cos(i)} - \sin(i) \tan(i) \right) = 2ne \left(\frac{1 - \sin^2(i)}{\cos(i)} \right) = 2ne \cos(i) = 2e \cos(i) \text{ si } n = 1$$

- ii- On utilise les formules sur les interfaces :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{av} = \frac{1-n}{1+n}, R_{av} = \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^2, t_{av} = \frac{2}{1+n}, T_{av} = \frac{n_2}{n_1} t_{av}^2 = \frac{4n}{(1+n)^2} = T \\ r_{va} = -r_{av}, R_{va} = R_{av} = R, t_{va} = \frac{2n}{1+n}, T_{va} = \frac{n_1}{n_2} t_{va}^2 = \frac{4n}{(1+n)^2} = T_{av} = T \end{array} \right. \text{ avec } T = 1 - R$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour le rayon 1 : } t^2 = t_{av} t_{va} = \frac{4n}{(1+n)^2} = T_{av} = T_{va} \\ \text{Pour le rayon 2 : } r_{av}^2 t^2 = R_{av} T_{av} \end{array} \right.$$

- iii- La vibration totale est la somme des N vibrations :

$$\underline{s}(M) = \sum_{i=1}^{N \rightarrow \infty} s_0 t^2 r^{2(i-1)} e^{j(\varphi_1 + \varphi(i-1))} = \sum_{i=1}^{N \rightarrow \infty} s_0 t^2 e^{j\varphi_1} (Re^{j\varphi})^{i-1}$$

$$\Leftrightarrow \underline{s}(M) = s_0 t^2 e^{j\varphi_1} \sum_{i=1}^{N \rightarrow \infty} (Re^{j\varphi})^{i-1} = s_0 t^2 e^{j\varphi_1} \frac{1 - (Re^{j\varphi})^N}{1 - (Re^{j\varphi})}$$

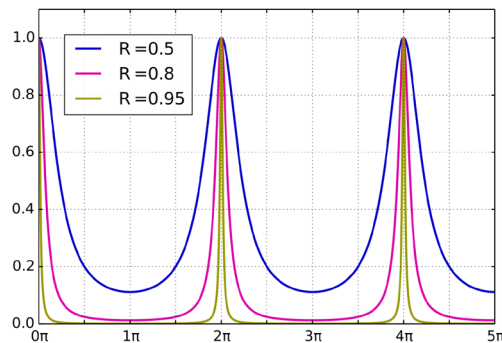
Vu que $R < 1$ et $N \rightarrow \infty$: $\underline{s}(M) = s_0 t^2 e^{j\varphi_1} \frac{1}{1 - (Re^{j\varphi})}$

$$\text{On définit } I(M) \text{ par } I(M) = \frac{1}{2} \underline{s} \underline{s}^* = \frac{1}{2} s_0^2 t^4 \frac{1}{1 - (Re^{j\varphi})} \cdot \frac{1}{1 - (Re^{-j\varphi})} = \frac{1}{2} s_0^2 t^4 \frac{1}{1 + R^2 - R(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi})} = \frac{1}{2} s_0^2 \frac{(1-R)^2}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi}$$

$$= \frac{1}{2} s_0^2 \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 2R(1 - \cos \varphi)} = \frac{1}{2} s_0^2 \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)} = \frac{1}{2} s_0^2 \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)}$$

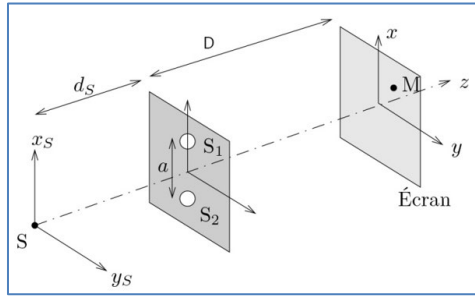
$$\text{On pose } m = \frac{4R}{(1-R)^2} \Rightarrow I(M) = \frac{I_{\max}}{1 + m \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)}$$

Remarque m est appelé le facteur de finesse. Il est directement lié à la finesse des raies observées ainsi pour $m = \{8, 80 \text{ et } 1520\}$:



OP4 – Synthèse

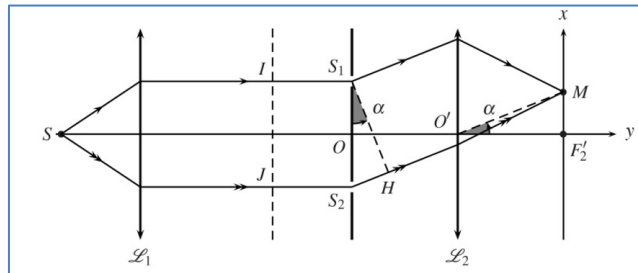
- Division du front d'ondes : trous d'Young



- Lorsqu'on éclaire deux trous d'Young séparés d'une distance a , l'ordre d'interférences en un point M d'abscisse x sur l'écran est : $p = n \frac{ax}{\lambda_0 D}$
- Les zones d'interférences constructives forment des franges rectilignes orthogonales à la direction reliant les trous. La distance sur l'écran entre deux franges est l'interfrange :

$$i = \frac{\lambda_0 D}{na}$$

- L'utilisation de deux fentes parallèles, appelées fentes d'Young, à la place des trous d'Young permet d'augmenter la luminosité de la figure d'interférences en ne modifiant que le profil de diffraction et aucunement la forme des interférences.
- Montage de Fraunhofer :



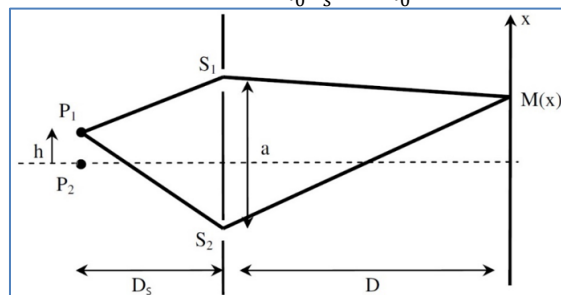
Dans le cas d'un montage de Fraunhofer, l'ordre d'interférences en un point M de l'écran d'abscisse x est :

$$p = n \frac{ax}{\lambda_0 f'}$$

- Cohérence spatiale

- Si le point source éclairant des trous d'Young est décalé de l'axe optique d'une distance h suivant (Ox) , l'ordre d'interférences en un point M d'abscisse x s'écrit

$$p_1(M) = n \frac{ah}{\lambda_0 D_s} + n \frac{ax}{\lambda_0 D}$$



On observe une chute de contraste de la figure d'interférences dans le cas d'une source étendue.

- En éclairant des trous d'Young par une source étendue :
 - Si la source est étendue dans la direction orthogonale à la direction des trous, la visibilité de la figure d'interférences n'est pas modifiée, elle apparaît plus lumineuse ;
 - Si la source est étendue dans la direction des trous, on observe une chute du contraste des interférences avec l'extension de la source. Ainsi on définit un critère semi-quantitatif de brouillage.
 - Critère de brouillage : on considère qu'il y a brouillage des interférences sur l'écran si pour deux points de la source séparés par une distance égale à la moitié de l'étendue spatiale de la source on a $\Delta p > \frac{1}{2}$. Dans ce la source est dite incohérente spatialement.
- Dans le cas d'une source étendue on démontre que si $b \ll l_s$ la figure d'interférences sera fortement contrastée

alors que si $b \geq l_s$ la figure d'interférences sera brouillée. l_s est appelée longueur de cohérence spatiale et dans le cas d'un montage de Fraunhofer elle vaut : $l_s = \frac{\lambda n f_1'}{a}$

- Cohérence temporelle

Pour obtenir des franges visibles à partir d'une source de faible largeur spectrale, il faut respecter la condition :

$$\delta \leq \frac{\lambda_m^2}{\Delta\lambda} = l_c$$

où l_c est la longueur de cohérence temporelle de la source.

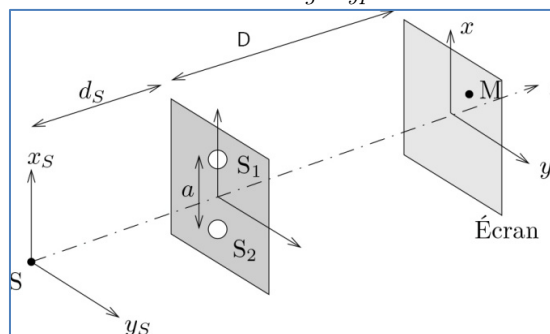
OP4 – SVF

- Calculer la différence de marche dans le cas d'un montage type « trous d'Young ».
- Expliciter l'intensité $I(M)$ observée dans le cas d'un montage type « fentes d'Young ».
- Calculer la différence de marche dans le cas d'un montage type « trous d'Young » utilisée dans un montage de Fraunhofer.
- Expliciter l'intensité $I(M)$ observée dans le cas d'un montage type « trous d'Young » éclairée par deux points sources décalés de h suivant un axe orthogonal à la direction des trous.
- Expliciter l'intensité $I(M)$ observée dans le cas d'un montage type « trous d'Young » éclairée par une source étendue de largeur b . En déduire une condition de brouillage ou non en comparant la largeur de la source b à la longueur de cohérence spatiale l_s .
- Expliciter l'intensité $I(M)$ observée dans le cas d'un montage type « trous d'Young » éclairée par une source spectrale de bande passante $\Delta\lambda$. En déduire une condition de brouillage ou non en comparant la différence de marche δ à la longueur de cohérence spatiale l_c .

Exercices classiques :

- OP41 : Double étoiles
- OP42 : Fentes d'Young et lame
- OP44 : Trois fentes d'Young
- OP45 – Trous d'Young et largeur de source

- Calculer la différence de marche dans le cas d'un montage type « trous d'Young ».



Soit : $\delta = (S_2M) - (S_1M)$

$$\text{Or : } \begin{cases} S_2M = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + D^2 + y^2} = D \sqrt{1 + \frac{y^2}{D^2} + \left(\frac{x}{D} + \frac{a}{2D}\right)^2} \\ S_1M = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + D^2 + y^2} = D \sqrt{1 + \frac{y^2}{D^2} + \left(\frac{x}{D} - \frac{a}{2D}\right)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_2M \sim D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{ax}{D^2} + \frac{y^2}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2} + \frac{x^2}{D^2}\right)\right) \\ S_1M \sim D \left(1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{ax}{D^2} + \frac{y^2}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2} + \frac{x^2}{D^2}\right)\right) \end{cases}$$

Donc :

$$\delta \sim nD \times \frac{ax}{D^2} \Rightarrow \delta = \frac{nax}{D}$$

- Expliciter l'intensité $I(M)$ observée dans le cas d'un montage type « fentes d'Young ».

L'intensité sur l'écran s'écrit sous la forme :

$$I(M) = I_{diff}(M)I_{interf}(M)$$

Où :

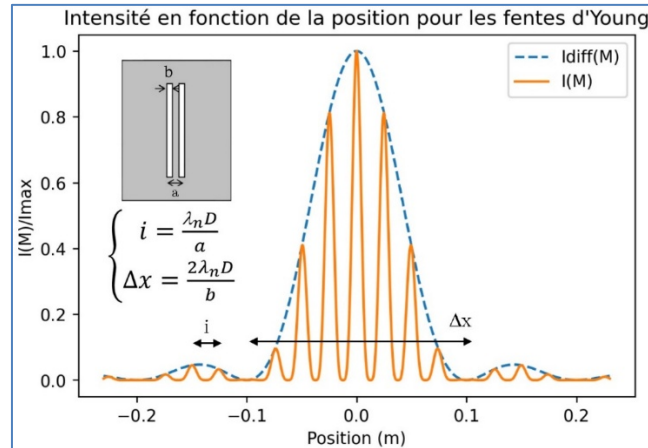
- $I_{diff}(M)$ est l'intensité normalisée au point M due au phénomène de diffraction par une unique ouverture.
- $I_{interf}(M)$ est l'intensité en M résultant du phénomène d'interférences, son expression est donnée par la formule

de Fresnel.

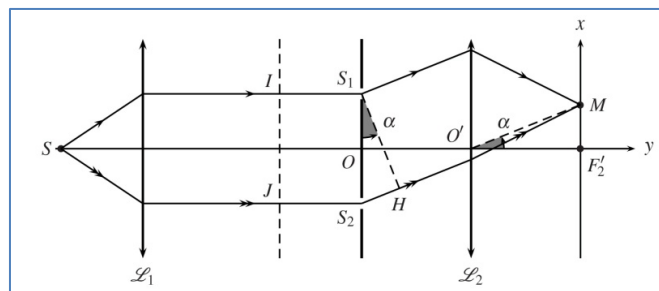
Dans le cas de fentes d'Young on aura :

$$I(M) = \frac{I_{max}}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi x b}{\lambda_n D}\right) \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi a x}{\lambda_n D}\right)\right)$$

$$\text{où : } \begin{cases} i = \frac{\lambda_n D}{a} \\ \Delta x = \frac{2\lambda_n D}{b} \end{cases}$$



- c) Calculer la différence de marche dans le cas d'un montage type « trous d'Young » utilisée dans un montage de Fraunhofer.



D'après le théorème de Malus :

$$\delta = (SM)_2 - (SM)_1 = (S_2M) - (S_1M) = (S_2H)$$

Or :

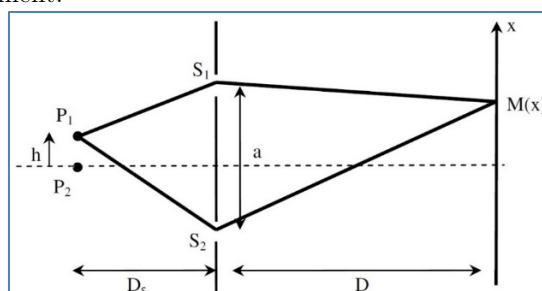
$$S_2H = a \sin(\alpha) \sim a \tan(\alpha) \sim \frac{ax}{f'}$$

D'où :

$$\delta = n \frac{ax}{f'} \text{ et } p(M) = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{ax}{\lambda_n f'}$$

- d) Expliciter l'intensité $I(M)$ observée dans le cas d'un montage type « trous d'Young » éclairée par deux points sources décalés de h suivant un axe orthogonal à la direction des trous.

On considère une source constituée de deux points P_1 et P_2 , séparés d'une distance h . Cette source éclaire deux trous d'Young. Les deux points sources sont incohérents : l'intensité totale sur l'écran sera donc la somme des intensités créées par chacune des sources prise séparément.



On s'intéresse à l'éclairement dû à la source P_1 ; la différence de marche totale est :

$$\delta_1(M) = (P_1 S_2 M) - (P_1 S_1 M) = n \frac{ah}{D_s} + n \frac{ax}{D} = \lambda_0 p_1(M)$$

L'intensité vaut alors : $I_1(M) = 2I_{01}(1 + \cos(2\pi p_1(M)))$

Alors que pour la source P_2 : $\delta_2(M) = n \frac{ax}{D} = \lambda_0 p_2(M)$ et $I_2(M) = 2I_{02}(1 + \cos(2\pi p_2(M)))$

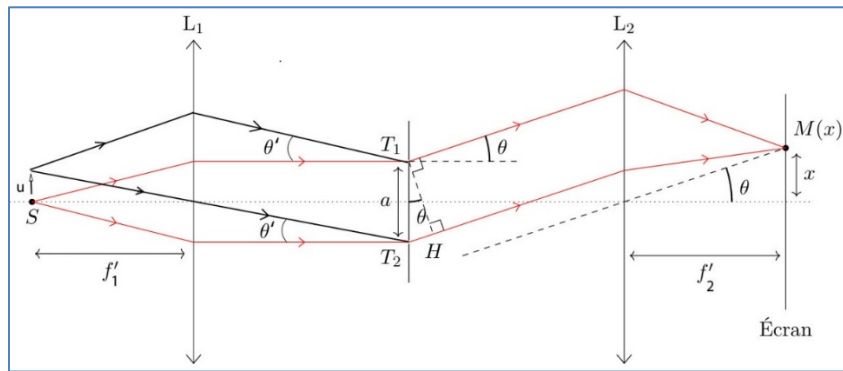
Par conséquent vu l'incohérence des sources avec :

$$I_{01} = I_{02} = I_0 \text{ et } \cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} I(M) &= 4I_0 (1 + \cos(\pi(p_1 - p_2)) \cos(\pi(p_1 + p_2))) \\ \Leftrightarrow I(M) &= 4I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{\pi nah}{\lambda_0 D_s}\right) \cos\left(\frac{2\pi nax}{\lambda_0 D} + \frac{\pi nah}{\lambda_0 D_s}\right) \right) \\ \Leftrightarrow I(M) &= 4I_0 \left(\underbrace{1 + \cos\left(\frac{\pi nah}{\lambda_0 D_s}\right)}_{\text{visibilité}} \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi na}{\lambda_0 D} \left(x + \frac{hD}{2D_s}\right)\right)}_{\text{terme d'interférences}} \right) \end{aligned}$$

- e) Expliciter l'intensité $I(M)$ observée dans le cas d'un montage type « trous d'Young » éclairée par une source étendue de largeur b . En déduire une condition de brouillage ou non en comparant la largeur de la source b à la longueur de cohérence spatiale l_s



Dans le montage de Fraunhofer et envisageons un déplacement continu du point source S sur une largeur allant de $-\frac{b}{2}$ à $+\frac{b}{2}$. Chaque point source de largeur dx va générer sa propre figure d'interférences. Ces fentes infinitésimales constituent des sources incohérentes. Par conséquent l'intensité lumineuse sur l'écran est la somme des intensités élémentaires données par chacune des fentes.

La fente située en u et de largeur du , donne sur l'écran une intensité élémentaire : $dI = dI_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} \left(\frac{ax}{f'_2} + \frac{au}{f'_1}\right)\right) \right)$

Or dI_0 est proportionnel à du d'où : $dI = \alpha du \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} \left(\frac{ax}{f'_2} + \frac{au}{f'_1}\right)\right) \right) \Rightarrow I(M) = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \alpha \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} \left(\frac{ax}{f'_2} + \frac{au}{f'_1}\right)\right) \right) du$

$$\Rightarrow I(M) = \alpha \left(b + \frac{\lambda_n f'_1}{2\pi a} \left(\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} \left(\frac{ax}{f'_2} + \frac{ab}{2f'_1}\right)\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} \left(\frac{ax}{f'_2} - \frac{ab}{2f'_1}\right)\right) \right) \right)$$

Or : $\sin(p) - \sin(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$$\Rightarrow I(M) = \alpha \left(b + \frac{\lambda_n f'_1}{\pi a} \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda_n f'_2}\right) \sin\left(\frac{2\pi ab}{\lambda_n 2f'_1}\right) \right) = \alpha \left(b + \frac{\lambda_n f'_1}{\pi a} \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda_n f'_2}\right) \sin\left(\frac{\pi ab}{\lambda_n f'_1}\right) \right)$$

$$\Rightarrow I(M) = I_0 \left(1 + \text{sinc}\left(\frac{\pi ab}{\lambda_n f'_1}\right) \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda_n f'_2}\right) \right)$$

Dans cette modélisation le facteur de visibilité s'écrit :

$$V = \text{sinc}\left(\frac{\pi ab}{\lambda_n f'_1}\right)$$

On retrouve la fonction sinus cardinal qui s'annule pour la première fois en l_s , valeur particulière de b telle que :

$$\frac{\pi a l_s}{\lambda_n f'_1} = \pi \Leftrightarrow l_s = \frac{\lambda_n f'_1}{a}$$

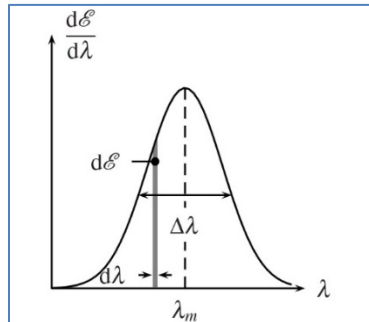
Cette grandeur est appelée longueur de cohérence spatiale.

Ainsi :

- Si $b \ll l_s$ la figure d'interférences sera fortement contrastée.
- Si $b \geq l_s$ la figure d'interférences sera brouillée.

f) *Expliciter l'intensité $I(M)$ observée dans le cas d'un montage type « trous d'Young » éclairée par une source spectrale de bande passante $\Delta\lambda$. En déduire une condition de brouillage ou non en comparant la différence de marche δ à la longueur de cohérence spatiale l_c*

On envisage maintenant le cas d'une source de faible largeur spectrale. Dans l'intervalle de longueur d'onde $[\lambda - \frac{\Delta\lambda}{2}; \lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}]$, la source rayonne un éclairement $d\varepsilon$.



On peut considérer que le rayonnement émis, est constitué d'une superposition d'ondes lumineuses monochromatiques de largeur $d\lambda$. Chacune de ces ondes produit sur l'écran son propre système de franges d'interférences. Comme elles sont incohérentes, on observe la superposition des éclairissements.

$$dI = dI_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda_n f'_2}\right) \right)$$

Le calcul est plus simple en passant par le nombre d'ondes tel que :

$$\sigma = \frac{1}{\lambda_n}$$

Or dI_0 est proportionnel à $d\sigma$ d'où

$$\begin{aligned} dI &= \alpha d\sigma \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi a\sigma x}{f'_2}\right) \right) \\ \Rightarrow I(M) &= \int_{-\sigma_m + \frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_m + \frac{\Delta\sigma}{2}} \alpha \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi a\sigma x}{f'_2}\right) \right) d\sigma \\ \Rightarrow I(M) &= \alpha \left(\Delta\sigma + \frac{f'_2}{2\pi ax} \left(\sin\left(\frac{2\pi \left(\sigma_m + \frac{\Delta\sigma}{2}\right) ax}{f'_2}\right) - \sin\left(\frac{2\pi \left(\sigma_m - \frac{\Delta\sigma}{2}\right) ax}{f'_2}\right) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\text{Or : } \sin(p) - \sin(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I(M) &= \alpha \left(\Delta\sigma + \frac{f'_2}{\pi ax} \cos\left(\frac{2\pi a\sigma_m x}{f'_2}\right) \sin\left(\frac{\pi a\Delta\sigma x}{f'_2}\right) \right) \\ \Rightarrow I(M) &= \alpha \left(\Delta\sigma + \Delta\sigma \cos\left(\frac{2\pi a\sigma_m x}{f'_2}\right) \text{sinc}\left(\frac{\pi a\Delta\sigma x}{f'_2}\right) \right) \\ \Rightarrow I(M) &= I_0 \left(1 + \text{sinc}\left(\frac{\pi a\Delta\sigma_m x}{f'_2}\right) \cos\left(\frac{2\pi a\sigma x}{f'_2}\right) \right) \end{aligned}$$

Dans cette modélisation le facteur de visibilité s'écrit :

$$V = \text{sinc}\left(\frac{\pi a\Delta\sigma x}{f'_2}\right) \Rightarrow V = \text{sinc}(\pi\delta\Delta\sigma)$$

Le facteur de visibilité s'annule pour la première fois en :

$$\pi\delta\Delta\sigma = \pi \Rightarrow \delta = \frac{1}{\Delta\sigma}$$

$$\text{Or : } \Delta\sigma = \frac{1}{\lambda_m - \frac{\Delta\lambda}{2}} - \frac{1}{\lambda_m + \frac{\Delta\lambda}{2}} \sim \frac{\lambda_m^2}{\Delta\lambda}$$

Pour ne pas avoir brouillage des franges il faut donc :

$$\delta < \frac{\lambda_m^2}{\Delta\lambda} = l_c : \text{longueur de cohérence temporelle}$$