OD1 – Synthèse

- *Equation de D'Alembert unidimensionnelle*

En raisonnant sur un système infinitésimal, on montre que :

- Le déplacement $y(x,t)$ décrivant les ondes transverses sur une corde, ainsi que
- La déformation locale $\xi(x,t)$ décrivant les ondes acoustiques longitudinales dans les solides sont tous deux régis par une équation d'onde appelée équation de d'Alembert unidimensionnelle :

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = 0$$

où c est la célérité des ondes.

Dans le cas des cordes vibrantes : $c = \sqrt{\frac{T}{\mu_l}}$ où T la tension et μ_l la masse linéique

Dans le cas des solides déformables : $c = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$ où E est le module d'Young et μ la masse volumique

- *Loi de Hooke*

Au sein d'une tige solide d'axe (Ox), la force exercée par la droite d'un élément de surface dS est liée à la déformation locale par la loi de Hooke mésoscopique :

$$d\vec{F} = E\frac{\partial \xi}{\partial x}\overrightarrow{dS}$$

Sous forme intégrale, ce résultat s'écrit encore : $\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l}$ $avec \begin{cases} \sigma = \frac{F}{S} \text{ la contrainte} \\ \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \text{ l'allongement relatif} \end{cases}$

- *Ondes planes progressives harmoniques*

Une OPPH est une onde de la forme : $a(x,t) = A\cos(\omega t - kx - \phi)$

Pour une telle onde, on appelle vitesse de phase la vitesse des lieux équiphases : $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$.

La propagation est non dispersive si la vitesse de phase est indépendante de la pulsation. Enfin, une telle onde est solution de l'équation de d'Alembert si k et ω sont reliés par la relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow v_\varphi = \pm c$$

- *Ondes stationnaires harmoniques*

Une onde stationnaire harmonique est une solution de la forme : $a(x,t) = C\cos(kx - \Psi)\cos(\omega t - \phi)$

Une onde stationnaire est obtenue concrètement en superposant deux ondes planes progressives harmoniques de même pulsation et de même amplitude se propageant dans la même direction mais dans des sens opposés. Une telle onde fait apparaître des nœuds de vibration distants de $\frac{\lambda}{2}$ et des ventres de vibration situés à égale distance de deux nœuds consécutifs.

- *Modes propres d'une corde fixée à ses extrémités*

Les modes propres d'une corde libre fixée aux deux extrémités possèdent une structure d'onde stationnaire harmonique avec $k = \frac{\omega}{c}$:

$$a_n(x,t) = C_n \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x + \right)\cos(\omega_n t - \phi_n)$$

Comme les extrémités sont des nœuds de vibration, les pulsations propres sont telles que :

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L} \; ou \; L = \frac{n\lambda}{2}, n \in \mathbb{N}^*$$

Un mouvement quelconque de la corde, satisfaisant à la fois aux conditions aux limites et aux conditions initiales, est obtenu par superposition de modes propres.

- *Résonances sur la corde de Melde*

L'extrémité d'une corde vibrante étant fixée, et l'autre extrémité étant soumise à un déplacement $y(0,t) = a\cos(\omega t)$, le régime sinusoïdal forcé montre une onde stationnaire harmonique de pulsation ω. L'amplitude des ventres diverge si ω coïncide avec l'une des pulsations propres ω_n (phénomène de résonance).

OD1 – SVF

a) Établir l'équation d'Alembert dans le cas de la corde vibrante.

b) Montrer que l'énergie mécanique linéique d'une corde vibrante est de la forme : $e_m = \frac{1}{2}\mu_l\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$, puis établir l'équation de conservation de l'énergie mécanique dans une corde : $\frac{\partial e_m}{\partial t} + div(\vec{R}) = 0$ où $\vec{R}$ est une grandeur que l'on nommera et dont on donnera l'expression.

c) Établir l'équation d'Alembert dans le cas d'une chaîne infinie de ressorts.

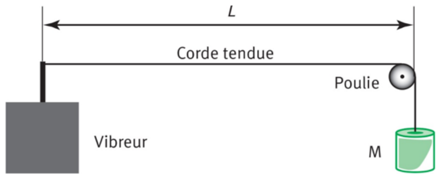
d) Établir l'équation d'Alembert dans le cas d'une lame solide.

e) Établir l'équation d'Alembert dans les lignes électriques en utilisant le modèle des constantes réparties (sans amortissement).

f) Démontrer que les modes propres d'une corde fixée à ses deux extrémités peuvent s'écrire :

$$y_n(x,t) = C_n\cos(\omega_n t + \varphi_n)\sin(k_n x) \text{ où } n\in\mathbb{N}^* \text{ si } \begin{cases} y(0,t) = 0 \\ y(L,t) = 0 \end{cases}$$

g) Dans le cas d'oscillations forcées par un vibreur dont les CL sont : $\begin{cases} y(0,t) = y_0\cos(\omega t) \\ y(L,t) = 0 \end{cases}$. Démontrez que l'amplitude de l'onde transversale peut s'écrire : $y(x,t) = \frac{y_0\cos(\omega t)}{\sin(kL)}\sin\big(k(L-x)\big)$

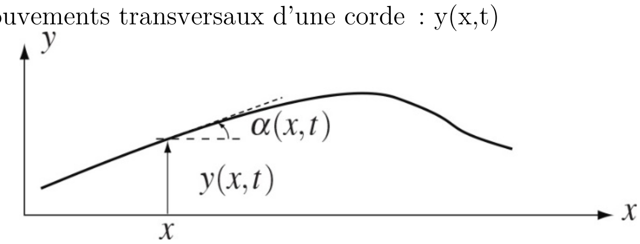


Exercices classiques :

- OD13 – Câble coaxial
- OD17 – Corde plombée

a) Établir l'équation d'Alembert dans le cas de la corde vibrante.

On s'intéresse aux petits mouvements transversaux d'une corde : y(x,t)

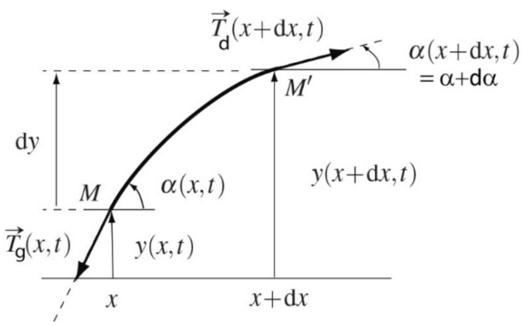


On émet les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} y(x,t) \ll L \\ \alpha(x,t) \ll 1 \Leftrightarrow \tan\alpha = \dfrac{\partial y}{\partial x} \ll 1 \\ Poids\ négligé \end{cases}$$

Puisque le poids est négligé, l'élément de corde, de masse δm, est soumis à :

- La tension de la portion de fil située à droite du point M'.
- La tension de la portion de fil située à gauche du point M.



La loi de la quantité de mouvement appliquée à cet élément de corde s'écrit :

$$\delta m\,\vec{a} = \vec{T}_g(x,t) + \vec{T}_d(x+dx,t)$$

En projection sur (Ox) :

$$\vec{0} = -T_g(x,t)\cos\alpha + T_d(x+dx,t)\cos(\alpha+d\alpha)$$

$$\Rightarrow T_g(x,t)\cos(\alpha(x)) = T_d(x+dx,t)\cos(\alpha(x+dx)) \Rightarrow T\cos(\alpha) = cste = T_0$$

En projection sur (Oy) :

$$\delta m\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = -T(x,t)\sin\alpha(x,t) + T(x+dx,t)\sin\,\alpha(x+dx,t)$$

$$\Leftrightarrow \delta m\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial(T\sin\alpha)}{\partial x}dx \Leftrightarrow \delta m\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial\left(\frac{T_0\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right)}{\partial x}dx$$

$$\Leftrightarrow \delta m\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = T_0\frac{\partial(\tan\alpha)}{\partial x}dx \Leftrightarrow \delta m\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = T_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx$$

Or : $\delta m = \mu_l dl \sim \mu_l dx$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = \frac{T_0}{\mu_l}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t)$$

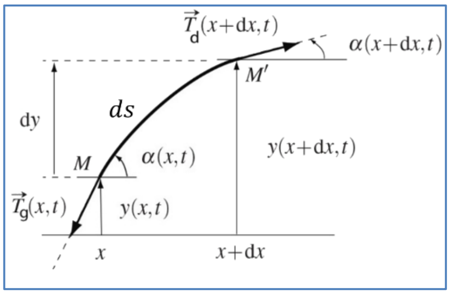
$$\Rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) \text{ où } \underbrace{c}_{ms^{-1}} = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_l}}$$

b) *Montrer que l'énergie mécanique linéique d'une corde vibrante est de la forme :* $e_m = \frac{1}{2}\mu_l\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$*, puis établir l'équation de conservation de l'énergie mécanique dans une corde :* $\frac{\partial e_m}{\partial t} + div(\vec{R}) = 0$ *où* $\vec{R}$ *est une grandeur que l'on nommera et dont on donnera l'expression.*

- Densité linéique d'énergie cinétique :

$$dE_c = \frac{1}{2}\mu_l dx\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \Rightarrow e_c = \frac{dE_c}{dx} = \frac{1}{2}\mu_l\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

- Densité linéique d'énergie potentielle :



Calculons le travail élémentaire d'un opérateur pour allonger la corde au repos de dx à ds tel que $dl = ds - dx$.

$$dE_p = \delta W_{op} = +T_0 dl = +T_0\left(\sqrt{(dx)^2+(dy)^2} - dx\right)$$

$$= +T_0 dx\left(\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - 1\right) \overset{D.L}{\simeq} +T_0 \times \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$$

$$\Rightarrow e_p = \frac{dE_p}{dx} = \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

- Densité linéique d'énergie mécanique :

$$\Rightarrow e_m = \frac{1}{2}\mu_l\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

- Equation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial e_m}{\partial t} = \mu_l\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + T_0\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial t\partial x}$$

D'après l'équation de D'Alembert : $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Rightarrow \mu_l\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial e_m}{\partial t} = T_0\left(\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial t\partial x}\right) = T_0\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

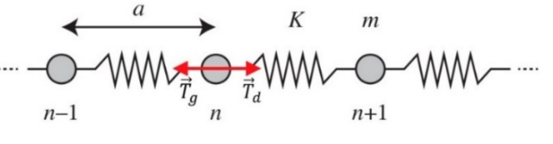
On introduit l'opérateur divergence :

$$\frac{\partial e_m}{\partial t} + div\left(-T_0\left(\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x}\right)\vec{u_x}\right) = 0 \Rightarrow \vec{R} = -T_0\left(\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x}\right)\vec{u_x}$$

Or : $T_0\frac{\partial y}{\partial x} = T_0\tan(\alpha) \sim T_0\sin(\alpha)$

$$\Rightarrow \vec{R} = -T_0\sin(\alpha)\,v_y\vec{u_x} = -\vec{T}_0.\vec{v}\,\vec{u_x}$$

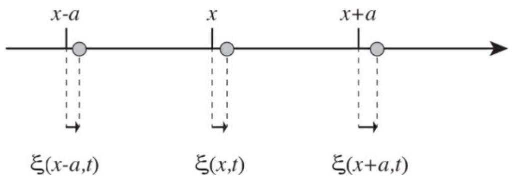
c) *Établir l'équation d'Alembert dans le cas d'une chaîne infinie de ressorts.*



Si on applique le PFD à la masse n on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{T_g} = -k(l_g - l_0)\overrightarrow{u_x} = -k(x_n - x_{n-1} - a)\overrightarrow{u_x} \\ \overrightarrow{T_d} = k(l_d - l_0)\,\overrightarrow{u_x} = k(x_{n+1} - x_n - a)\overrightarrow{u_x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m\frac{\partial^2 x_n}{\partial t^2} = k(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1})$$



Or :

$$\begin{cases} x_{n+1} = (n+1)a + \xi(x+a,t) \\ x_n = na + \xi(x,t) \\ x_{n-1} = (n-1)a + \xi(x-a,t) \end{cases}$$

On note ξ l'écart à la position au repos de la masse, et on passe à un modèle continu :

$$m\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = k\big(\xi(x+a,t) - 2\xi(x,t) + \xi(x-a,t)\big)$$

$$\Leftrightarrow m\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = k\left(a\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - a\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{ka^2}{m}\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2}$$

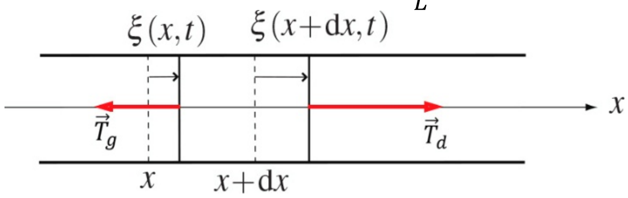
L'onde longitudinale se propageant le long de la chaîne de ressort vérifie :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} \text{ où } c = a\sqrt{\frac{k}{m}} = a\,\omega_0$$

d) Établir l'équation d'Alembert dans le cas d'une lame solide.

Dans le domaine d'élasticité du matériau, la force de traction T permettant à la lame de section S et de longueur L de s'allonger de ΔL est donnée par la loi de Hooke :

$$\sigma = E\,\varepsilon \Rightarrow T = ES\frac{\Delta L}{L}$$



On envisage le cas où l'allongement est positif : $\frac{\partial \xi}{\partial x} > 0$ ainsi :

- La force de traction $\vec{T}_d$ sera dirigée dans le sens positif de l'axe (Ox).
- La force de traction $\vec{T}_g$ sera dirigée dans le sens négatif de l'axe (Ox).

La tranche qui se trouve au repos entre les plans d'abscisses x et x+dx s'est allongée de :

$$d\xi = \xi(x+dx,t) - \xi(x,t)$$

Par conséquent la force de traction exercée par la partie gauche de la lame sur le système s'écrit :

$$\vec{T}_g = -T(x,t)\overrightarrow{u_x} = -ES\frac{\xi(x+dx,t) - \xi(x,t)}{dx}\overrightarrow{u_x} = -ES\frac{\partial \xi}{\partial x}(x,t)\overrightarrow{u_x}$$

La loi de la quantité de mouvement appliquée à cette tranche de lame dx s'écrit, en négligeant la pesanteur :

$$\delta m\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}\overrightarrow{u_x} = -T(x,t)\overrightarrow{u_x} + T(x+dx,t)\overrightarrow{u_x}$$

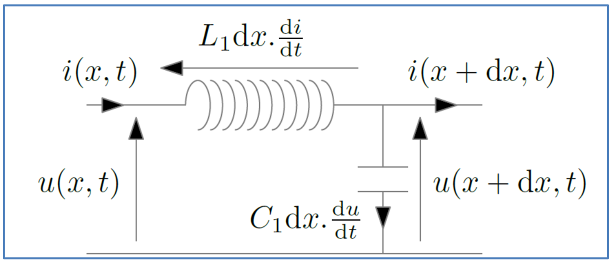
$$\Leftrightarrow \delta m\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial x}dx \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial\left(ES\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)}{\partial x}dx \Leftrightarrow \mu S dx\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = ES\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}dx$$

$$\Leftrightarrow \mu\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = E\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2}$$

Les ondes longitudinales progressant le long de la lame solide vérifient l'équation d'Alembert :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} \text{ où } c = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$$

e) *Établir l'équation d'Alembert dans les lignes électriques en utilisant le modèle des constantes réparties (sans amortissement).*



Les lois de Kirchhoff donnent : (L_1: inductance linéique et C_1: capacité linéique)

$$\begin{cases} u(x,t) = L_1 dx\dfrac{\partial i}{\partial t} + u(x+dx,t) \\ i(x,t) = C_1 dx\dfrac{\partial u}{\partial t} + i(x+dx,t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}dx = -L_1 dx\dfrac{\partial i}{\partial t} \\ \dfrac{\partial i}{\partial x}dx = -C_1 dx\dfrac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$$

En faisant apparaître les dérivées croisées :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} = -L_1\dfrac{\partial^2 i}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -C_1\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} \end{cases} \Rightarrow -\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} = L_1\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \frac{1}{C_1}\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}$$

D'où l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0 \text{ où } c^2 = \frac{1}{L_1C_1}$$

f) *Démontrer que les modes propres d'une corde fixée à ses deux extrémités peuvent s'écrire :*

$$y_n(x,t) = C_n\, cos(\omega_n t + \varphi_n)\, sin(k_n x) \text{ où } n\epsilon\mathbb{N}^* \; si \begin{cases} y(0,t) = 0 \\ y(L,t) = 0 \end{cases}$$

Considérons une corde de longueur L fixée à ses deux extrémités. Les conditions aux limites imposées sont donc :

$$CL : \begin{cases} y(0,t) = 0 \\ y(L,t) = 0 \end{cases}, \forall t$$

Vu que les deux extrémités sont fixées, nous allons rechercher des solutions particulières sous forme d'ondes stationnaires. Cherchons y(x,t) sous la forme :

$$y(x,t) = C\, cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \psi)$$

Les conditions aux limites donnent, pour tout t :

$$\begin{cases} y(0,t) = C\, cos(\omega t + \varphi)\cos(\psi) = 0 \\ y(L,t) = C\, cos(\omega t + \varphi)\cos(kL + \psi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \\ \cos\left(kL + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Donc : $\psi = \frac{\pi}{2}$ et $\sin(kL) = 0$

Par conséquent : $k_n = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow \omega_n = \frac{n\pi c}{L}$ et

Les solutions particulières en ondes stationnaires sont :

$$y_n(x,t) = C_n\, cos(\omega_n t + \varphi_n)\, sin(k_n x) \text{ où } n\epsilon\mathbb{N}^*$$

Ce sont les modes propres.

g) *Dans le cas d'oscillations forcées par un vibreur dont les CL sont :* $\begin{cases} y(0,t) = y_0\, cos(\omega t) \\ y(L,t) = 0 \end{cases}$. *Démontrez que l'amplitude de l'onde transversale peut s'écrire :* $y(x,t) = \frac{y_0 \cos(\omega t)}{sin(kL)} sin\big(k(L-x)\big)$

Ce type de dispositif est appelée corde de Melde. Les conditions aux limites sont les suivantes :

$$\begin{cases} y(0,t) = y_0\cos(\omega t) \\ y(L,t) = 0 \end{cases}$$

Cherchons une solution sous forme d'onde stationnaire de même pulsation que l'excitation :

$$y(x,t) = C\, cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \psi)$$

Les conditions aux limites donnent :

$$\begin{cases} y(0,t) = C\, cos(\omega t + \varphi)\cos(\psi) = y_0\cos(\omega t) \\ y(L,t) = C\, cos(\omega t + \varphi)\cos(kL + \psi) = 0 \end{cases}$$

Or : $cos(x+y) = cos(x)\,cos(y) - sin(x)\,sin(y)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C\ (cos(\omega t)\cos(\varphi) - \sin(\omega t)\sin(\varphi))\cos(\psi) = y_0\cos(\omega t) \\ \cos(kL+\psi) = 0 \end{cases}$$

Ceci est vraie pour tout t donc :

$$\begin{cases} \varphi = 0\ et\ C\cos(\psi) = y_0 \\ \cos(kL+\psi) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 0\ et\ C = \dfrac{y_0}{\cos(\psi)} \\ kL + \psi = \left(p + \dfrac{1}{2}\right)\pi,\ \ prenons\ p = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$y(x,t) = \frac{y_0\cos(\omega t)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - kL\right)}\cos\left(\frac{\pi}{2} + kx - kL\right)$$

$$\Leftrightarrow y(x,t) = \frac{y_0\ cos(\omega t)}{sin(kL)}sin\big(k(L-x)\big)$$

OD2 – Synthèse

a) Approximation acoustique

Les ondes acoustiques dans les fluides sont décrites comme une perturbation de l'état de repos où :

$$p = p_0, \vec{v} = \vec{0}\ et\ \mu = \mu_0$$

Lors du passage de l'onde :

$$p = p_0 + p_1, \vec{v} = \vec{v_1}\ et\ \mu = \mu_0 + \mu_1$$

L'approximation acoustique constitue l'approximation linéaire des ondes acoustiques, dans laquelle les rapports $\frac{p_1}{p_0}, \frac{v_1}{c}, \frac{\mu_1}{\mu_0}\ et\ \frac{\zeta}{\lambda} \ll 1$ sont traités comme des infiniment petits d'ordre 1.

Dans l'approximation acoustique, les champs sont solutions des équations couplées linéarisées :

- équation d'Euler :

$$\mu_0\frac{\partial\vec{v_1}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}\,p_1\ ou\ \mu_0\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0$$

- équation locale de conservation de la masse :

$$\frac{\partial\mu_1}{\partial t} + \mu_0 div\,\vec{v}_1 = 0\ ou\ \frac{\partial\mu_1}{\partial t} + \mu_0\frac{\partial v_1}{\partial x} = 0$$

- évolution isentropique des particules de fluide :

$$\mu_1 = \mu_0\,p_1\,\chi_s$$

b) Équation de d'Alembert pour la surpression

Le découplage des équations locales linéarisées conduit à l'équation de propagation de la surpression. Il s'agit d'une généralisation de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle faisant intervenir l'opérateur laplacien :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}\ \text{où}\ c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\chi_s}}$$

c) Structure des OPPH

Pour des OPPH de la forme $p_1 = p_0\,cos\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi\right)$, l'équation de d'Alembert impose $k = \frac{\omega}{c}$ (relation de dispersion). De plus, le couplage surpression/vitesse dû à l'équation d'Euler implique :

- le caractère longitudinal des ondes acoustiques dans les fluides, c'est-à-dire que $\vec{v_1} = v_1\,\vec{u}\ et\ \vec{k} = k\,\vec{u}$.
- la proportionnalité $p_1 = Z\,v_1$ avec $Z = \mu_0 c$ l'impédance acoustique.

d) Aspects énergétiques

Il faut associer à une onde acoustique une énergie de densité volumique :

$$e = \frac{1}{2}\mu_0 v_1^2 + \frac{1}{2}\chi_s {p_1}^2$$

dont le déplacement est décrit par le vecteur densité de courant énergétique (vecteur de Poynting sonore) $\vec{\Pi} = p_1\vec{v_1}$.

Étant donné la diversité des puissances surfaciques associées dans l'audible, on utilise couramment l'échelle d'intensité acoustique en décibel :

$$\begin{cases} Intensit\acute{e}\ sonore : I = \langle \Pi \rangle \\ Intensit\acute{e}\ sonore\ en\ dB : I_{dB} = 10Log\left(\dfrac{I}{I_0}\right) = 20log\left(\dfrac{p_{1,eff}}{p_{ref}}\right)\ \text{où}\ \begin{cases} I_0 = 10^{-12}Wm^{-2} \\ p_{ref} = 2.10^{-5}Pa \end{cases} \end{cases}$$

e) Ondes acoustiques sphériques harmoniques

L'équation de d'Alembert admet d'autres solutions que les superpositions d'OPPH. Par exemple, pour un problème à symétrie sphérique, des ondes sphériques harmoniques de la forme :

$$p_1(r,t) = \frac{A_0}{r}\cos(\omega t - kr + \varphi_0)$$

La décroissance en $1/r$ de l'amplitude conduit à une décroissance en $\frac{1}{r^2}$ de la puissance surfacique moyenne. Comme la surface de la sphère sur laquelle la puissance se répartit croît comme r^2, ce résultat assure la conservation de la puissance lors de la propagation.

OD2 – SVF

a) Démontrez l'équation de propagation des ondes sonores
b) Retrouvez la relation de la célérité d'une onde se propageant dans un gaz parfait de masse molaire M, de température T, et de coefficient de Laplace γ.
c) Donnez l'expression de l'impédance acoustique à l'aide de la notation complexe.
d) Effectuez un bilan d'énergie local afin de retrouver : $div(\vec{\Pi}) + \frac{\partial e}{\partial t} = 0$ où $\vec{\Pi}$ est le vecteur de Poynting sonore et e l'énergie volumique. On retrouvera les expressions de $\vec{\Pi}$ et e.
e) Effet Doppler. Dans le cas où l'émetteur se déplace à la vitesse $\vec{v_0}$ par rapport au récepteur. Démontrez le lien entre l'écart de fréquence, la fréquence de l'émetteur, v_0 et c la célérité de l'onde.

Exercices classiques :
- OD23 – Le vent porte le son
- OD25 – Ondes sphériques
- Ne pas oublier de revoir les exercices des ondes sonores avec réflexion/transmission qu'on retrouve dans OD5.

a) Démontrez l'équation de propagation des ondes sonores
- *Euler linéarisé*

Vu que le fluide est parfait et qu'on néglige la pesanteur on a : $\mu\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}\right) = -\overrightarrow{grad}\, p$

$$\Rightarrow \left(\mu_0 + \underbrace{\mu_1}_{\ll \mu_0}\right)\left(\underbrace{\frac{\partial \vec{v_1}}{\partial t}}_{\substack{ordre\ 1\\ en\ v_1}} + \underbrace{(\vec{v}_1.\overrightarrow{grad})\vec{v_1}}_{ordre\ 2\ en\ v_1}\right) = -\overrightarrow{grad}\left(\underbrace{p_0}_{cste} + p_1\right)$$

On se limite aux termes du premier ordre donc tout produit de deux termes du premier ordre est un deuxième ordre et sera négligé d'où :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v_1}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}\, p_1 \Rightarrow \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0$$

- *Conservation de la masse linéarisée*

Soit : $\frac{\partial \mu}{\partial t} + div(\mu\vec{v}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial(\mu_0+\mu_1)}{\partial t} + div\left((\mu_0 + \mu_1)\vec{v}_1\right) = 0$

En se limitant aux termes du premier ordre on a donc :

$$\Rightarrow \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 div\, \vec{v}_1 = 0$$

- *Transformation thermodynamique isentropique*

$$\chi_s = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_s \Rightarrow \chi_s = \frac{1}{\mu_0 + \mu_1}\left(\frac{\mu - \mu_0}{p - p_0}\right)_s \Rightarrow \chi_s \sim \frac{1}{\mu_0}\frac{\mu_1}{p_1}\ car\ \mu_0 \gg \mu_1$$

D'où :

$$\mu_1 = \mu_0 p_1\, \chi_s$$

Les équations de couplage à une dimension donnent :

$$\begin{cases} \mu_0 \dfrac{\partial v_1}{\partial t} + \dfrac{\partial p_1}{\partial x} = 0 \quad (1) \\ \dfrac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \dfrac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \quad (2) \\ \mu_1 = \mu_0\, p_1\, \chi_s \quad (3) \end{cases}$$

Afin de découpler les équations on va calculer : $\mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t}$ de deux façons :

$$(1) \Rightarrow \mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}$$
$$(2) \Rightarrow \mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial t^2}$$

Le théorème de Schwarz affirme que :

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t}$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial t^2} \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(\mu_0\, p_1\, \chi_s)}{\partial t^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \mu_0 \chi_s \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0$$

La surpression p_1 obéit donc à l'équation de d'Alembert, unidimensionnelle :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \text{ où } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$$

(La masse volumique μ_1 et la vitesse v_1 vérifient la même équation.)

b) Retrouvez la relation de la célérité d'une onde se propageant dans un gaz parfait de masse molaire M, de température T, et de coefficient de Laplace γ.

- *Transformation isentropique d'un gaz parfait :*

$$pV^\gamma = cste \Leftrightarrow p\left(\frac{m}{\mu}\right)^\gamma = cste \Rightarrow p = A\mu^\gamma$$
$$\Rightarrow \frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\mu}{\mu}$$

D'où :

$$\chi_s = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_s = \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\mu}{p}\right) = \frac{1}{\gamma p}$$

La célérité du son dans l'air est alors :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\mu_0}}$$

Or la loi des gaz parfaits s'écrit :

$$pV = nRT \Leftrightarrow p = \frac{\mu RT}{M} \sim \frac{\mu_0 R T_0}{M}$$

Donc :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

c) Donnez l'expression de l'impédance acoustique à l'aide de la notation complexe.

À l'aide de la notation complexe, les équations de couplage s'écrivent :

$$\begin{cases} \mu_0 \frac{\partial \vec{v_1}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\, p_1 = \vec{0} \Rightarrow \mu_0 i\omega \underline{\vec{v_1}} - i\vec{k}\,\underline{p_1} = \vec{0} \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 div\, \vec{v}_1 = 0 \Rightarrow i\omega\mu_1 + \mu_0\left(-i\vec{k}.\underline{\vec{v_1}}\right) = 0 \\ \underline{\mu_1} = \mu_0\, \underline{p_1}\, \chi_s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\vec{v_1}} = \frac{\vec{k}}{\mu_0 \omega}\, \underline{p_1} \\ \vec{k}.\underline{\vec{v_1}} = \frac{\omega \mu_1}{\mu_0} \\ \underline{\mu_1} = \mu_0\, \underline{p_1}\, \chi_s \end{cases}$$

La vitesse est colinéaire au vecteur $\vec{k}$ donc à la direction de propagation : l'onde de vitesse est longitudinale.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{k^2 p_1}{\mu_0 \omega} = \omega\, p_1\, \chi_s \Rightarrow k^2 = \mu_0 \omega^2 \chi_s = \frac{\omega^2}{c^2} \\ \underline{v_1} = \frac{k}{\mu_0 \omega}\, \underline{p_1} \Leftrightarrow \underline{p_1} = \mu_0 c\, \underline{v_1} \end{cases}$$

Si l'onde se propage suivant les x négatifs il faut changer $\vec{k}$ en $-\vec{k}$ d'où la relation : $\underline{p_1} = -\mu_0 c\, \underline{v_1}$

$$\begin{cases} Z_+ = \mu_0 c \\ Z_- = -\mu_0 c \end{cases} avec\ p_1 = Z v_1$$

d) Effectuez un bilan d'énergie local afin de retrouver : $div(\vec{\Pi}) + \frac{\partial e}{\partial t} = 0$ *où* $\vec{\Pi}$ *est le vecteur de Poynting sonore et e l'énergie volumique. On retrouvera les expressions de* $\vec{\Pi}$ *et e.*

Recherchons les équations de couplage en $(p_1, \vec{v}_1)$:

$$\begin{cases} \mu_0 \dfrac{\partial \vec{v_1}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\, p_1 = \vec{0} \\ \dfrac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 div\, \vec{v}_1 = 0 \Leftrightarrow \chi_s \dfrac{\partial p_1}{\partial t} + div\, \vec{v}_1 = 0 \end{cases}$$

Or :

$$div(p_1\vec{v_1}) = p_1 div\, \vec{v_1} + \vec{v_1}.\overrightarrow{grad}\, p_1$$

On essaye de faire apparaître les deux termes à l'aide des équations de couplage :

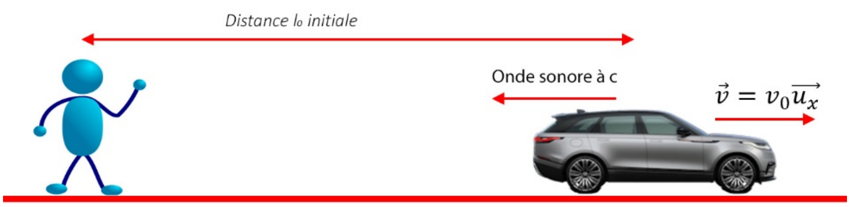
$$\begin{cases} \mu_0 \vec{v_1}.\dfrac{\partial \vec{v_1}}{\partial t} + \vec{v_1}.\overrightarrow{grad}\, p_1 = \vec{0} \\ \chi_s p_1 \dfrac{\partial p_1}{\partial t} + p_1 div\, \vec{v}_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{v_1}.\overrightarrow{grad}\, p_1 = -\mu_0 \vec{v_1}.\dfrac{\partial \vec{v_1}}{\partial t} \\ p_1 div\, \vec{v}_1 = -\chi_s p_1 \dfrac{\partial p_1}{\partial t} \end{cases}$$

Par conséquent :

$$div(p_1\vec{v_1}) = -\mu_0 \vec{v_1}.\frac{\partial \vec{v_1}}{\partial t} - \chi_s p_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} \Leftrightarrow div(\vec{\Pi}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu_0 v_1^2 + \frac{1}{2}\chi_s p_1^2\right)$$

$$\Rightarrow div(\vec{\Pi}) + \frac{\partial e}{\partial t} = 0 \text{ où } \begin{cases} \vec{\Pi} = p_1\vec{v_1} \\ e(M,t) = \underbrace{\frac{1}{2}\mu_0 v_1^2}_{e_c} + \underbrace{\frac{1}{2}\chi_s p_1^2}_{e_p} \end{cases}$$

e) Effet Doppler. Dans le cas où l'émetteur se déplace à la vitesse $\vec{v_0}$ *(et s'éloigne) par rapport au récepteur. Démontrez le lien entre l'écart de fréquence, la fréquence de l'émetteur,* v_0 *et c la célérité de l'onde.*



Formalisons cette situation : la distance initiale entre la personne et le haut-parleur est notée l_0.

- Le premier bip est émis en $t_0 = 0$. Il est reçu en $t'_0 = \frac{l_0}{c}$ et ainsi de suite…

N° du Bip	Instant d'émission	Distance	Instant de réception
Bip 0	$t_0 = 0$	l_0	$t'_0 = \frac{l_0}{c}$
Bip 1	$t_1 = T$	$l_1 = l_0 + v_0 T$	$t'_1 = T + \frac{l_1}{c}$
…Bip n-1	$t_{n-1} = (n-1)T$	$l_{n-1} = l_0 + v_0(n-1)T$	$t'_{n-1} = (n-1)T + \frac{l_{n-1}}{c}$
Bip n	$t_{n-1} = nT$	$l_n = l_0 + v_0 nT$	$t'_n = nT + \frac{l_n}{c}$

On déduit la période T' perçue par l'observateur :

$$T' = t'_{n+1} - t'_n = T + \frac{v_0 T}{c} = T\left(1 + \frac{v_0}{c}\right)$$

ainsi que la fréquence mesurée par l'observateur :

$$f' = \frac{f}{1 + \frac{v_0}{c}} \Rightarrow f' - f = f\left(\frac{1}{1 + \frac{v_0}{c}} - 1\right)$$

Si $\frac{v_0}{c} \ll 1$ alors on peut écrire : $\Delta f \sim -\frac{v_0}{c} f$.

OD3 – Synthèse

- Équations de propagation des champs $\vec{E}$ *et* $\vec{B}$ dans le vide

L'équation de propagation des champs électrique et magnétique B dans le vide est une équation de d'Alembert tridimensionnelle :

$$\vec{\Delta}\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \; et \; \vec{\Delta}\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \; où \; c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3.10^8 ms^{-1}$$

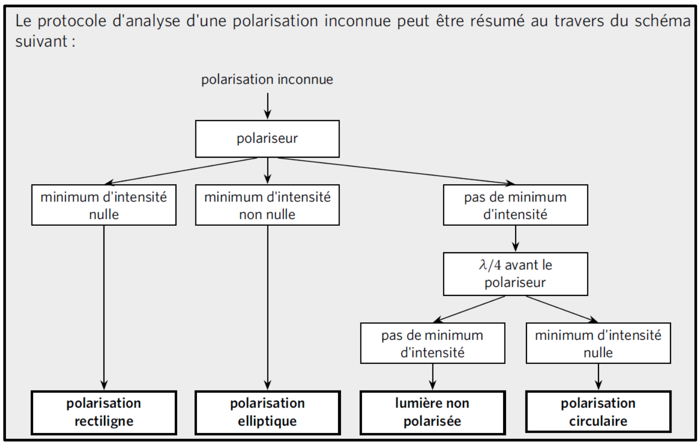
- Ondes électromagnétiques planes progressives harmoniques (OPPH) dans le vide
- La relation de dispersion des OPPH dans le vide est $\omega = kc$
- La structure des OPPH dans le vide est imposée par les équations de Maxwell :
  - Ces ondes sont transverses électriques $\vec{E} \perp \vec{k}$ et transverses magnétiques $\vec{B} \perp \vec{k}$
  - Les champs $\vec{E} et \vec{B}$ sont couplés par l'équation : $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$.
- L'étude énergétique des OPPH dans le vide montre que :
  - L'énergie est équirépartie entre sa forme électrique et magnétique : $u_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$
  - L'énergie se propage dans la même direction que l'onde électromagnétique.
- Polarisation d'une OPPH dans le vide :

La direction de polarisation d'une onde électromagnétique est donnée par la direction du champ électrique. Dans le cas d'une propagation suivant (Oz), le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}(z,t) = E_{0x}\cos(\omega t - kz)\,\overrightarrow{u_x} + E_{0y}\cos(\omega t - kz - \varphi)\,\overrightarrow{u_y}$$

On distingue plusieurs états de polarisation de la lumière :

- La polarisation elliptique est le cas le plus général, correspondant à une valeur de φ quelconque. On distingue :
  - La polarisation elliptique droite pour $\varphi \in [-\pi; 0[$
  - La polarisation elliptique gauche pour $\varphi \in]0; \pi[$
- La polarisation rectiligne est obtenue pour $\varphi = \{0\,, \pi\}$
- La polarisation circulaire gauche pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (ou droite $\varphi = -\frac{\pi}{2}$) ssi $E_{0x} = E_{oy}$.Création et analyse d'un état de polarisation de la lumière
- La lumière émise par une source est dite non polarisée si son état de polarisation fluctue aléatoirement dans le temps. (La lumière naturelle est non polarisée)
- Analyse d'une lumière polarisée



OD3 – SVF

a) Retrouvez l'équation de propagation dans le vide à l'aide des équations de Maxwell.
b) Retrouvez les relations de structure d'une OPPH dans le vide entre $\vec{E}, \vec{B}$ *et* $\vec{k}$.
c) Démontrez qu'une polarisation rectiligne peut s'écrire comme la superposition d'une polarisation circulaire gauche et droite.

Exercices classiques :

- OD33 – Pression de radiation
- OD34 – Ondes se propageant entre deux plans
- OD36 – Onde thermique

a) Retrouvez l'équation de propagation dans le vide à l'aide des équations de Maxwell

On applique l'opérateur rotationnel à l'équation de Maxwell Faraday : $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{E}\right)=\overrightarrow{rot}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{grad}\left(div\,\vec{E}\right)-\vec{\Delta}\vec{E}=-\frac{\partial\left(\overrightarrow{rot}\vec{B}\right)}{\partial t}\ avec\ \begin{cases} MG: div\,\vec{E}=0 \\ MA: \overrightarrow{rot}\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\vec{\Delta}\vec{E}=-\frac{\partial\left(\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)}{\partial t}\Leftrightarrow \vec{\Delta}\vec{E}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

b) Retrouvez les relations de structure d'une OPPH dans le vide entre $\vec{E},\vec{B}$ et $\vec{k}$ ainsi que la relation de dispersion

Les équations de Maxwell en complexe donnent :

$$\begin{cases} MG: -i\vec{k}.\underline{\vec{E}}=0 \\ M\phi: -i\vec{k}.\underline{\vec{B}}=0 \\ MF: -i\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}=-i\omega\,\underline{\vec{B}} \\ MA: -i\vec{k}\wedge\underline{\vec{B}}=\dfrac{i\omega}{c^2}\underline{\vec{E}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} MG: \vec{k}.\underline{\vec{E}}=0 \\ M\phi: \vec{k}.\underline{\vec{B}}=0 \\ MF: \vec{B}=\dfrac{\vec{k}}{\omega}\wedge\underline{\vec{E}} \\ MA: \underline{\vec{E}}=-c^2\dfrac{\vec{k}}{\omega}\wedge\underline{\vec{B}}\end{cases}$$

Par conséquent :

- Les vecteurs $\left(\underline{\vec{E}},\underline{\vec{B}},\vec{k}\right)$ forment un trièdre direct.
- $\omega=kc$ car $\vec{B}=\frac{\vec{k}}{\omega}\wedge\underline{\vec{E}}=\vec{B}=\frac{\vec{k}}{\omega}\wedge\left(-c^2\frac{\vec{k}}{\omega}\wedge\underline{\vec{B}}\right)=\frac{k^2\omega^2}{c^2}\underline{\vec{B}}$

Et les relations de structure s'écrivent : $\vec{B}=\frac{\vec{u}\wedge\vec{E}}{c}$ ou $\underline{\vec{E}}=-c\,\vec{u}\wedge\underline{\vec{B}}$

c) Démontrez qu'une polarisation rectiligne peut s'écrire comme la superposition d'une polarisation circulaire gauche et droite :

Une onde polarisée rectilignement peut être vu comme la superposition de deux ondes circulaires gauche et droite, en effet :

$$\vec{E}(z,t)=E_0\left(cos\alpha\,\overrightarrow{u_x}+\sin\alpha\,\overrightarrow{u_y}\right)\cos(\omega t-kz)$$

$$=\left|\begin{matrix}\dfrac{E_0}{2}\cos(\omega t-kz+\alpha)\\ \dfrac{E_0}{2}\sin(\omega t-kz+\alpha)\end{matrix}\right.+\left|\begin{matrix}\dfrac{E_0}{2}\cos(\omega t-kz-\alpha)\\ -\dfrac{E_0}{2}\sin(\omega t-kz-\alpha)\end{matrix}\right.=\left|\begin{matrix}\dfrac{E_0}{2}\cos(\omega t-kz+\alpha)\\ \dfrac{E_0}{2}\cos\left(\omega t-kz+\alpha-\underbrace{\dfrac{\pi}{2}}_{\varphi}\right)\end{matrix}\right.+\left|\begin{matrix}\dfrac{E_0}{2}\cos(\omega t-kz-\alpha)\\ \dfrac{E_0}{2}\cos\left(\omega t-kz-\alpha+\underbrace{\dfrac{\pi}{2}}_{-\varphi}\right)\end{matrix}\right.$$

$$=\vec{E}_{cg}(z,t)+\vec{E}_{cd}(z,t)$$

OD4 – Synthèse

- Dispersion et absorption

Lorsqu'un phénomène de propagation unidimensionnel est régi par une équation d'ondes linéaire à coefficients constants, une méthode de résolution consiste à chercher des solutions en ondes planes progressives harmoniques généralisées (OPPH*) s'écrivant en notation complexe : $\underline{\theta}(x\,,t)=\underline{A}e^{j(\omega t-\underline{k}x)}$ où $\underline{A}=Ae^{j\varphi}$. Pour de telles ondes, l'équation d'onde est alors équivalente à une relation entre k et ω appelée relation de dispersion. Il s'agit alors de décomposer le complexe k en :

$$\underline{k}(\omega)=k'(\omega)+jk''(\omega)\text{ où }k'\text{et }k''\ réels$$

L'onde réelle s'écrit alors :

$$\theta(x\,,t)=Ae^{+k''x}\cos(\omega t-k'x+\varphi)$$

Ainsi, la relation de dispersion renferme toute l'information sur la propagation d'une onde harmonique plane dans le milieu considéré :

- Le milieu est dispersif si la vitesse de phase $v_\varphi=\frac{\omega}{k'(\omega)}=\frac{\omega}{Re\left(\underline{k}(\omega)\right)}$ dépend de la pulsation ω (c'est-à-dire dès que $k'(\omega)$ n'est pas linéaire en ω) ;
- Le milieu est absorbant si $k''\neq 0$. L'amplitude de l'onde est alors atténuée sur une distance caractéristique $\delta=\frac{1}{|k''|}$.

- Propagation d'un paquet d'ondes paquet d'ondes

Un paquet d'ondes est une superposition d'OPPH* se propageant dans la même direction et dont les pulsations sont voisines de la pulsation moyenne ω_0. D'après l'analyse de Fourier, la durée temporelle d'un paquet d'ondes et la largeur fréquentielle de son spectre sont reliées par $\Delta t\,\Delta\omega \sim 1$

Dans un milieu non absorbant et faiblement dispersif où la relation de dispersion peut être linéarisée, l'enveloppe d'un paquet d'ondes se propage sans déformation à la vitesse de groupe :

$$v_g = \frac{\delta\omega}{\delta k} = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{\omega_0}$$

- Effet de peau dans un conducteur ohmique

Dans un conducteur ohmique à basses fréquences ($f \ll 10^{14}\ Hz$), la loi d'Ohm locale s'applique et $\sigma_0 \in \mathbb{R}$. Le champ électrique est solution d'une équation de diffusion. Le vecteur d'onde s'écrit :

$$\underline{k} = \pm\frac{1-j}{\delta} \text{ où } \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\gamma_0}}$$

Une OPPH* se propage dans le conducteur en s'atténuant sur une distance typique δ (épaisseur de peau). D'un point de vue énergétique, l'énergie de l'onde est cédée aux porteurs de charge (effet Joule). Dans le cuivre, l'épaisseur de peau vaut $\delta = 7\ mm$ à 50 Hz et n'est plus que de $\delta = 7\ \mu m$ à 5 GHz.

- Onde transverse dans un plasma dilué

Dans un plasma dilué, les collisions peuvent être négligées. En raison de leur inertie, les ions ne contribuent pas à la densité de courant. Tant qu'ils sont non-relativistes, les électrons sont seulement soumis à la force électrique de Lorentz. Enfin, la neutralité électrique locale est assurée par le caractère transverse des ondes électriques considérées. Sous ces hypothèses, le plasma est décrit par une conductivité complexe $\underline{\gamma} = -j\, n_0 \frac{e^2}{m\omega}$ qui diffère radicalement de celle du conducteur ohmique aux basses fréquences. La relation de dispersion des OPPH* transverses s'écrit alors :

$$\Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2 - {\omega_p}^2}{c^2} \text{ où } \omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m\varepsilon_0}}$$

- Si $\omega > \omega_p$ (domaine de transparence) : k est réel. Une OPPH se propage dans le plasma à la vitesse de phase $v_\varphi(\omega)$.
- Si $\omega < \omega_p$ (domaine réactif) : k est imaginaire pur. Il existe une onde évanescente dans le plasma (onde stationnaire atténuée). Cette onde ne transporte pas d'énergie en moyenne.

OD4 – SVF

a) Retrouver l'équation différentielle de N pendules de torsion couplés. En déduire l'équation de dispersion pour les petites oscillations sans frottements.
b) Démontrer que la conductivité dans un conducteur est complexe à l'aide du modèle de Drude.
c) Retrouvez l'équation de dispersion pour une onde électromagnétique à basse fréquence se propageant dans un conducteur : $\underline{k} = \underline{k}(\omega)$
d) Déterminer la conductivité complexe $\underline{\gamma} = -j\varepsilon_0\frac{\omega_p^2}{\omega}$ dans le cas de propagation de $\vec{E}$ dans un milieu « plasma dilué ». On exprimera ω_p en fonction de la densité n_0, la charge élementaire e, la masse de l'électron m et la permittivité du vide.
e) Déterminer l'équation de propagation de $\vec{E}$ dans un plasma dilué puis la relation de dispersion.
f) Donnez les solutions de l'équation de Klein-Gordon pour $\underline{k}$ puis pour $\vec{E}$ suivant le signe de $\omega^2 - \omega_p^2$.

Exercices classiques :
- OD43 – OPPH dans un conducteur métallique
- ...(Annales)

a) Retrouver l'équation différentielle de N pendules de torsion couplés. En déduire l'équation de dispersion pour les petites oscillations sans frottements.

Appliquons la loi du moment cinétique scalaire suivant l'axe (Ox) au pendule *n*.

$$ml^2\frac{d^2\theta_n}{dt^2} = -f\frac{d\theta_n}{dt} + C(\theta_{n+1} - \theta_n) + C(\theta_{n-1} - \theta_n) - mgl\sin(\theta_n)$$
$$\Leftrightarrow ml^2\frac{d^2\theta_n}{dt^2} = -f\frac{d\theta_n}{dt} + C(\theta_{n+1} + \theta_{n-1} - 2\theta_n) - mgl\sin(\theta_n)$$

En supposant que d est très inférieur aux dimensions caractéristiques du phénomène de propagation étudié, nous pouvons faire l'approximation des milieux continus en posant : $\theta_n = \theta(x = nd, t)$ d'où :

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta(x+d,t) = \theta(x,t) + d\dfrac{\partial \theta}{\partial x} + \dfrac{d^2}{2}\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + o(d^2) \\ \theta_{n-1} = \theta(x-d,t) = \theta(x,t) - d\dfrac{\partial \theta}{\partial x} + \dfrac{d^2}{2}\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + o(d^2) \end{cases}$$

L'équation du mouvement devient alors :

$$ml^2\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2} = -f\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t} + Cd^2\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2} - mglsin\big(\theta(x,t)\big)$$

Dans le cas de petites oscillations et si on néglige les frottements :

$$ml^2\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2} = +Cd^2\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2} - mgl\theta(x,t)$$

On cherche la solution sous la forme d'une OPPH* : $\underline{\theta}(x\,,t) = \underline{A}e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$

$$\Rightarrow ml^2(-\omega^2)\underline{\theta} = +Cd^2(-k^2)\underline{\theta} - mgl\underline{\theta}$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{ml^2}{Cd^2}\omega^2 - \frac{mgl}{Cd^2}$$

Posons : $\frac{\omega_0^2}{c^2} = \frac{mgl}{Cd^2}$ $et \frac{1}{c^2} = \frac{ml^2}{Cd^2} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{g}{l}$

D'où l'équation de dispersion appelée équation de Klein-Gordon :

$$k^2 = \frac{1}{c^2}(\omega^2 - \omega_0^2)$$

b) Démontrer que la conductivité dans un conducteur est complexe à l'aide du modèle de Drude.

Hypothèses du modèle de Drude :

- Les électrons de conduction sont fournis par chaque atome et délocalisés à l'échelle du métal. Les ions positifs du réseau sont fixes.
- Pas d'interaction longue portée entre cations et électrons. L'influence du réseau de cations est traduite par une force de frottement fluide (mais ce sont surtout les phonons et les impuretés qui interagissent avec les électrons).
- Pas de champ magnétique externe.
- Électrons non relativistes.
- On a fait l'hypothèse que le champ électrique est uniforme à l'échelle d'un volume mésoscopique d'électrons. Cela se traduit par la condition $\lambda \ll l = 10^{-8}m$ où l est le libre parcours moyen d'un électron

D'où le PFD appliqué à l'électron dans un référentiel galiléen :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m\vec{v}}{\tau}$$

Qui s'écrit en complexe :

$$j\omega m\underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}} - \frac{m\underline{\vec{v}}}{\tau} \Rightarrow \underline{\vec{v}} = -\frac{\frac{e\underline{\vec{E}}}{m}}{j\omega + \frac{1}{\tau}}$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{j}} = -ne\underline{\vec{v}} = \frac{\frac{ne^2\tau}{m}}{1 + j\omega\tau}\underline{\vec{E}}$$

D'où la conductivité complexe :

$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + j\omega\tau}\ avec\ \gamma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}\ conductivité\ statique$$

Remarques :

- $\tau \sim 10^{-14}s$: c'est le temps moyen entre 2 chocs sur le réseau de cations.
- En HF : $\omega\tau \gg 1 \Rightarrow \underline{\gamma} = -j\frac{\gamma_0}{\omega\tau}$ la conductivité est imaginaire pure, on retrouvera ce cas dans les plasmas dilués.
- La conductivité complexe : $\underline{\vec{j}}$ et $\underline{\vec{E}}$ sont déphasés : lorsque le champ varie trop rapidement, c'est comme si les électrons avaient une certaine inertie et se déplaçaient avec un certain retard.

c) *Retrouvez l'équation de dispersion pour une onde électromagnétique à basse fréquence se propageant dans un conducteur :* $\underline{k} = \underline{k}(\omega)$

Les équations de Maxwell dans un milieu localement neutre (conducteur) sont :

$$\begin{cases} MG : div\,\vec{E} = 0 \\ M\phi : div\,\vec{B} = 0 \\ MF : \overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ MA : \overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Comparons les deux termes de Maxwell-Ampère :

$$\frac{\left\| \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|}{\|\vec{j}\|} \sim \frac{\varepsilon_0 \omega E}{\gamma_0 E} \sim \frac{\varepsilon_0 \omega}{\gamma_0}$$

Or : $\frac{\left\|\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right\|}{\|\vec{j}\|} \overset{ODG}{\approx} \frac{\varepsilon_0 \omega}{\gamma_0} = \frac{8{,}85\ 10^{-12}}{6{,}0\ 10^{7}} \times 2\pi f = 9{,}2\ 10^{-19} f$

Par conséquent si $f < 10^{14} Hz$ les équations de Maxwell peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} MG : div\,\vec{E} = 0 \\ M\phi : div\,\vec{B} = 0 \\ MF : \overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ MA : \overrightarrow{rot}\,\vec{B} \sim \mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

D'où :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{E}\right) = -\frac{\partial\left(\overrightarrow{rot}\vec{B}\right)}{\partial t}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{grad}\left(div\,\vec{E}\right) - \vec{\Delta}\vec{E} = -\frac{\partial\left(\mu_0 \vec{j}\right)}{\partial t}$$
$$\Leftrightarrow \vec{\Delta}\vec{E} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On cherche des solutions de l'équation différentielle sous forme d'ondes électromagnétiques progressives généralisées :

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E}_0} e^{j(\omega t - \underline{\vec{k}}.\vec{r})}$$
$$\Rightarrow -\underline{\vec{k}}^2 \underline{\vec{E}} = j\omega \mu_0 \gamma_0 \underline{\vec{E}}$$
$$\Rightarrow \underline{k}^2 = -j\omega\mu_0\gamma_0 = e^{-j\frac{\pi}{2}}\omega\mu_0\gamma_0$$
$$\Rightarrow \underline{k} = \pm e^{-j\frac{\pi}{4}}\sqrt{\omega\mu_0\gamma_0}$$
$$\Rightarrow \underline{k} = \pm\frac{1-j}{\sqrt{2}} * \sqrt{\omega\mu_0\gamma_0}$$
$$\Rightarrow \underline{k} = \pm\frac{1-j}{\delta} \text{ où } \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\gamma_0}}$$

d) Déterminer la conductivité complexe $\underline{\gamma} = -j\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}$ dans le cas de propagation de $\vec{E}$ dans un milieu « plasma dilué ». On exprimera ω_p en fonction de la densité n_0, la charge élementaire e, la masse de l'électron m et la permittivité du vide.

Sous l'action du champ électromagnétique, les particules chargées vont se mettre en mouvement. Les ions étant beaucoup plus lourds que les électrons, on les supposera fixes et on ne considérera que le mouvement des électrons dont on néglige le poids.

$$m\, n_0 d\tau \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}\right) = -n_0 d\tau\, e\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

Étudions la contribution des deux forces :

$$\frac{F_m}{F_e} = \frac{vB}{E} = \frac{vk}{\omega} \sim \frac{v}{c} \ll 1$$

Comme le plasma est dilué, on suppose que ω reste au moins de l'ordre de ck, et le rapport $\frac{F_m}{F_e}$ est alors négligeable par rapport à 1. Donc :

$$m\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}\right) = -e\vec{E}$$

Par une analyse en ordre de grandeur des deux accélérations on a : $\frac{\left\|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right\|}{\left\|\left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}\right\|} \sim \frac{\frac{v}{T}}{\frac{v^2}{\lambda}} = \frac{\lambda}{vT} = \frac{c}{v} \gg 1$

$$\Rightarrow m\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -e\vec{E}$$

Ce qui donne en régime harmonique :

$$mj\omega\,\underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}}$$

Évaluons alors la densité volumique de courant :

$$\underline{\vec{j}} = -e\,n_0\,\vec{v} = -j\,n_0\frac{e^2\underline{\vec{E}}}{m\omega}$$

On peut écrire cette relation sous la forme suivante :

$$\underline{\vec{j}} = -j\varepsilon_0\frac{\omega_p^2}{\omega}\underline{\vec{E}}\text{ où }\omega_p = \sqrt{\frac{n_0e^2}{m\varepsilon_0}}$$

e) Déterminer l'équation de propagation de $\vec{E}$ dans un plasma dilué puis la relation de dispersion.

Soit : $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\,\underline{\vec{E}} = \overrightarrow{grad}\,(div\,\vec{E}) - \vec{\Delta}\vec{E} = -\vec{\Delta}\vec{E}$ car $div\,\vec{E} = 0$

$$\Rightarrow \overrightarrow{rot}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\vec{\Delta}\vec{E} \Leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\underline{\vec{B}}\right) = -\vec{\Delta}\vec{E}$$

$$\text{MA} \Rightarrow -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\underline{\vec{j}} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t}\right) = -\vec{\Delta}\vec{E}$$

$$\Leftrightarrow -\mu_0\frac{\partial\underline{\vec{j}}}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = -\vec{\Delta}\vec{E} \Leftrightarrow \vec{\Delta}\vec{E} = \mu_0\frac{\partial\underline{\vec{j}}}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2}$$

$$\Leftrightarrow \vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \mu_0\underline{\gamma}\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t}$$

Pour arriver à l'équation de dispersion, on reporte la forme de l'onde plane progressive monochromatique dans l'équation de propagation. On en déduit :

$$-k^2\underline{\vec{E}} + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\vec{E}} = \mu_0\,\underline{\gamma}\,j\,\omega\,\underline{\vec{E}}$$

Or : $\underline{\gamma} = -j\varepsilon_0\frac{\omega_p^2}{\omega} \Rightarrow -k^2\underline{\vec{E}} + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\vec{E}} = \mu_0\varepsilon_0\omega_p^2\,\underline{\vec{E}}$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2 - {\omega_p}^2}{c^2}$$

f) Donnez les solutions de l'équation de Klein-Gordon pour $\underline{k}$ puis pour $\vec{E}$ suivant le signe de $\omega^2 - \omega_p^2$.

- Pour $\omega < \omega_p$, cela correspond à un vecteur d'onde imaginaire pur : $k = \pm j\sqrt{\frac{{\omega_p}^2 - \omega^2}{c^2}} = \pm jk_2$

$$\Rightarrow \underline{\vec{E}} = \underline{\overrightarrow{E_0}}e^{j(\omega t \pm jk_2x)}$$

En passant à la partie réelle,

$$\vec{E} = \underline{\overrightarrow{E_0}}e^{\pm k_2x}\cos(\omega t)$$

On s'intéresse à une onde se « propageant » suivant les x positifs, par conséquent, on conserve l'expression : $\underline{k} = -jk_2$ qui entraîne une atténuation de l'onde et non une amplification qui n'est physiquement pas acceptable.

$$\Rightarrow \vec{E} = \overrightarrow{E_0}e^{-k_2x}\cos(\omega t)$$

Cette onde est nommée onde évanescente, car celle-ci ne prend de valeurs notables que sur des distances de l'ordre de $\frac{1}{k_2}$ et s'évanouit rapidement au-delà, le tout sans propagation.

- Pour $\omega > \omega_p$: $k = \pm\sqrt{\frac{\omega^2 - {\omega_p}^2}{c^2}} = \pm k_1$

Le vecteur d'onde est réel et on a une onde plane progressive monochromatique se propageant selon $\pm\,\overrightarrow{u_x}$ selon le sens choisi. On choisit $+\overrightarrow{u_x}$ d'où :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\overrightarrow{E_0}}e^{j(\omega t - k_1x)}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = E_0\cos(\omega t - k_1x)\,\overrightarrow{u_y}$$

OD5 – Synthèse

- Réflexion et transmission sur un dioptre acoustique

Une OPPH envoyée en incidence normale sur un dioptre acoustique séparant deux fluides, dont les impédances acoustiques sont notées $Z_1\ et\ Z_2$, est partiellement réfléchie et partiellement transmise. La surpression et la vitesse sont continues sur le dioptre, ce qui fournit les deux équations nécessaires à la détermination des coefficients de réflexion et de transmission.

$$\begin{cases} r_v = \dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = -r_p \\ t_v = \dfrac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}\ et\ t_p = \dfrac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \end{cases}\ et\ \begin{cases} R = r_v^2 = \left(\dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \\ T = \dfrac{Z_2}{Z_1}\ {t_v}^2 = \dfrac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \end{cases}\ avec\ R + T = 1$$

Les coefficients de réflexion et de transmission en puissance font apparaître une transmission totale lorsque les impédances sont adaptées $Z_1 = Z_2$.

- Réflexion et transmission sur un dioptre en incidence normale

À l'interface entre deux milieux d'indices complexes $n_1\ et\ n_2$, en incidence normale, les coefficients de réflexion et transmission du champ électrique sont :

$$\begin{cases} \underline{r_E} = \dfrac{\underline{E_{0r}}}{\underline{E_{0i}}} = \dfrac{\underline{n_1} - \underline{n_2}}{\underline{n_1} + \underline{n_2}} \\ \underline{t_E} = \dfrac{\underline{E_{0t}}}{\underline{E_{0i}}} = \dfrac{2\underline{n_1}}{\underline{n_1} + \underline{n_2}} \end{cases},\ \begin{cases} \underline{r_B} = -\underline{r_E} = \dfrac{\underline{n_2} - \underline{n_1}}{\underline{n_1} + \underline{n_2}} \\ \underline{t_B} = \dfrac{\underline{n_2}}{\underline{n_1}} \underline{r_E} = \dfrac{2\underline{n_2}}{\underline{n_1} + \underline{n_2}} \end{cases}\ et\ \begin{cases} R = \left|\dfrac{\langle \Pi_r \rangle}{\langle \Pi_i \rangle}\right| = \left|\underline{r_E}\right|^2 = \left(\dfrac{1-n}{1+n}\right)^2 \\ T = \left|\dfrac{\langle \Pi_t \rangle}{\langle \Pi_i \rangle}\right| = \dfrac{R_e(\underline{n_2}^*)}{R_e(\underline{n_1}^*)} \left|\underline{t_E}\right|^2 = \dfrac{4n}{(1+n)^2} \end{cases}$$

a) Retrouvez les équations de continuité en surpression et vitesse pour une onde sonore puis en déduire les différents coefficients de réflexion et de transmission pour une onde sonore.

b) Retrouver les différents coefficients de réflexion et de transmission pour une onde électromagnétique.

Exercices classiques

- OD51 : Transmission d'une onde sonore au travers d'un mur
- OD52 : Couche antireflet
- OD57 : Réflexion sur un conducteur parfait

a) Retrouvez les équations de continuité en surpression et vitesse pour une onde sonore puis en déduire les différents coefficients de réflexion et de transmission pour une onde sonore.

On applique le principe fondamental de la dynamique à une surface S de l'interface. Comme son nom l'indique, l'interface sépare les deux fluides ; ce ne sont plus les molécules du fluides 1, mais pas encore celle de 2 : l'interface n'a pas de masse. Alors : $m\vec{a} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \left(P_0 + \underline{P_i}(0,t) + \underline{P_r}(0,t)\right) S\,\overrightarrow{u_x} - \left(P_0 + \underline{P_t}(0,t)\right) S\overrightarrow{u_x} = \vec{0}$$

Ainsi :

$$\underline{P_i}(0,t) + \underline{P_r}(0,t) = \underline{P_t}(0,t)$$
$$\Rightarrow Z_1 v_{0i} e^{j\omega_i t} - Z_1 v_{0r} e^{j\omega_r t} = Z_2 v_{0t} e^{j\omega_t t}$$

Cette équation est vraie pour tout t, ainsi les pulsations des trois ondes sont identiques :

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t\ \ notée\ \ \omega\ ainsi:\ Z_1 v_{0i} - Z_1 v_{0r} = Z_2 v_{0t}$$

Les fluides ne sont pas miscibles, ils ne se mélangent pas. Si les molécules du fluide 1 bougent à une certaine vitesse, ils poussent les molécules du fluide 2 à la même vitesse. Les champs des vitesses sont donc continus :

$$\underline{v_i}(0,t) + \underline{v_r}(0,t) = \underline{v_t}(0,t) \Leftrightarrow v_{0i} + v_{0r} = v_{0t}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} Z_1(v_{0i} - v_{0r}) = Z_2 v_{0t} \\ v_{0i} + v_{0r} = v_{0t} \end{cases}$$

On définit les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude pour les champs des vitesses par :

$$r_v = \frac{v_{0r}}{v_{0i}}\ et\ t_v = \frac{v_{0t}}{v_{0i}}$$

Or :

$$\begin{cases} Z_1(v_{0i} - v_{0r}) = Z_2 v_{0t} \\ v_{0i} + v_{0r} = v_{0t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z_1(1 - r_v) = Z_2 t_v \\ 1 + r_v = t_v \end{cases}$$
$$\Rightarrow 1 + r_v = \frac{Z_1(1 - r_v)}{Z_2} \Rightarrow r_v\left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) = \frac{Z_1}{Z_2} - 1$$

$$\Rightarrow r_v = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \; et \; t_v = 1 + r_v = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

De même :

$$r_p = \frac{p_{0r}}{p_{0i}} \; et \; t_p = \frac{p_{ot}}{p_{oi}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_p = \dfrac{p_{0r}}{p_{0i}} = \dfrac{Z_1 v_{or}}{-Z_1 v_{0i}} = -r_v \\ t_p = \dfrac{p_{ot}}{p_{oi}} = \dfrac{Z_2}{Z_1} t_v \end{cases} \Rightarrow r_p = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \; et \; t_p = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

On définit les coefficients de réflexion et de transmission en puissance par :

$$R = \frac{\langle \|\overrightarrow{\pi_{0r}}\| \rangle}{\langle \|\overrightarrow{\pi_{0i}}\| \rangle} \; et \; T = \frac{\langle \|\overrightarrow{\pi_{0t}}\| \rangle}{\langle \|\overrightarrow{\pi_{0i}}\| \rangle}$$

Le calcul des vecteurs de Poynting requiert la notation réelle :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\pi_i} = P_i \overrightarrow{v_i} = Z_1 v_i^2 \overrightarrow{u_x} \\ \overrightarrow{\pi_r} = P_r \overrightarrow{v_r} = -Z_1 v_r^2 \overrightarrow{u_x} \\ \overrightarrow{\pi_t} = P_t \overrightarrow{v_t} = Z_2 v_t^2 \overrightarrow{u_x} \end{cases}$$

On en déduit : $R = |r_v r_p| \; et \; T = |t_v t_p|$

$$\Rightarrow \begin{cases} R = r_v^2 = \left(\dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \\ T = \dfrac{Z_2}{Z_1} \, {t_v}^2 = \dfrac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \end{cases}$$

On remarque ainsi que : $R + T = 1$

b) Retrouver les différents coefficients de réflexion et de transmission pour une onde électromagnétique.
On admet les relations de passage :

$$\begin{cases} \underline{\overrightarrow{E_i}}(0^-, t) + \underline{\overrightarrow{E_r}}(0^-, t) = \underline{\overrightarrow{E_t}}(0^+, t) \\ \underline{\overrightarrow{B_i}}(0^-, t) + \underline{\overrightarrow{B_r}}(0^-, t) = \underline{\overrightarrow{B_t}}(0^+, t) \end{cases}$$

$$avec \; \vec{E} : \begin{cases} \underline{\overrightarrow{E_i}} = \underline{E_{oi}} e^{i(\omega t - \underline{k_1} z)} \overrightarrow{u_x} \\ \underline{\overrightarrow{E_r}} = \underline{E_{or}} e^{i(\omega t + \underline{k_1} z)} \overrightarrow{u_x} \\ \underline{\overrightarrow{E_t}} = \underline{E_{ot}} e^{i(\omega t - \underline{k_2} z)} \overrightarrow{u_x} \end{cases} et \; \vec{B} : \begin{cases} \underline{\overrightarrow{B_i}} = \dfrac{\underline{\overrightarrow{k_1}} \wedge \underline{\overrightarrow{E_i}}}{\omega} = \dfrac{\underline{n_1} \overrightarrow{u_z} \wedge \underline{\overrightarrow{E_i}}}{c} = \dfrac{\underline{n_1} \underline{E_{oi}}}{c} e^{i(\omega t - \underline{k_1} z)} \overrightarrow{u_y} \\ \underline{\overrightarrow{B_r}} = -\dfrac{\underline{\overrightarrow{k_1}} \wedge \underline{\overrightarrow{E_r}}}{\omega} = -\dfrac{\underline{n_1} \overrightarrow{u_z} \wedge \underline{\overrightarrow{E_r}}}{c} = -\dfrac{\underline{n_1} \underline{E_{or}}}{c} e^{i(\omega t + \underline{k_1} z)} \overrightarrow{u_y} \\ \underline{\overrightarrow{B_t}} = \dfrac{\underline{\overrightarrow{k_2}} \wedge \underline{\overrightarrow{E_t}}}{\omega} = \dfrac{\underline{n_2} \overrightarrow{u_z} \wedge \underline{\overrightarrow{E_t}}}{c} = \dfrac{\underline{n_2} \underline{E_{ot}}}{c} e^{i(\omega t - \underline{k_2} z)} \overrightarrow{u_y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{E_{oi}} + \underline{E_{or}} = \underline{E_{ot}} \\ \underline{n_1}(\underline{E_{oi}} - \underline{E_{or}}) = \underline{n_2} \underline{E_{ot}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{r_E} = \dfrac{\underline{E_{or}}}{\underline{E_{oi}}} = \dfrac{\underline{n_1} - \underline{n_2}}{\underline{n_1} + \underline{n_2}} \\ \underline{t_E} = \dfrac{\underline{E_{ot}}}{\underline{E_{oi}}} = \dfrac{2\underline{n_1}}{\underline{n_1} + \underline{n_2}} \end{cases}$$

$$Or : \begin{cases} \underline{B_{oi}} = \dfrac{\underline{n_1}}{c} \underline{E_{oi}} \\ \underline{B_{or}} = -\dfrac{\underline{n_1}}{c} \underline{E_{or}} \\ \underline{B_{ot}} = \dfrac{\underline{n_2}}{c} \underline{E_{ot}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{r_B} = -\underline{r_E} = \dfrac{\underline{n_2} - \underline{n_1}}{\underline{n_1} + \underline{n_2}} \\ \underline{t_B} = \dfrac{\underline{n_2}}{\underline{n_1}} r_E = \dfrac{2\underline{n_2}}{\underline{n_1} + \underline{n_2}} \end{cases}$$

La notation complexe utilisée, peut poser problème dans le calcul de R et T dans le cas où les indices sont complexes.

En effet on définit :

$$\begin{cases} R = \left| \dfrac{\langle \underline{\Pi_r} \rangle}{\langle \underline{\Pi_i} \rangle} \right| \\ T = \left| \dfrac{\langle \underline{\Pi_t} \rangle}{\langle \underline{\Pi_i} \rangle} \right| \end{cases}$$

Or : $\langle \underline{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} R_e(E.B^*) \Rightarrow \begin{cases} \langle \underline{\Pi_i} \rangle = \frac{|\underline{E_{0i}}|^2}{2\mu_0 c} R_e(\underline{n_1^*}) \\ \langle \underline{\Pi_r} \rangle = \frac{|\underline{E_{0r}}|^2}{2\mu_0 c} R_e(-\underline{n_1^*}) \\ \langle \underline{\Pi_t} \rangle = \frac{|\underline{E_{0t}}|^2}{2\mu_0 c} R_e(\underline{n_2^*}) \end{cases}$ Donc : $\begin{cases} R = \left| \frac{\langle \underline{\Pi_r} \rangle}{\langle \underline{\Pi_i} \rangle} \right| = |\underline{r_E}|^2 \\ T = \left| \frac{\langle \underline{\Pi_t} \rangle}{\langle \underline{\Pi_i} \rangle} \right| = \frac{R_e(\underline{n_2^*})}{R_e(\underline{n_1^*})} |\underline{t_E}|^2 \end{cases}$