

MF1 – Synthèse

- *Champ eulérien des vitesses et accélération d'une particule de fluide*

L'écoulement d'un fluide est décrit par le champ eulérien des vitesses $\vec{v}(M, t)$ correspondant au point de vue d'un observateur fixe regardant passer les particules de fluide en M. L'accélération de la particule de fluide passant au point M à t est donnée par la dérivée particulaire du vecteur-vitesse :

$$\underbrace{\vec{a}(M, t)}_{\substack{\text{Accélération} \\ \text{particulaire}}} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\substack{\text{Accélération} \\ \text{Locale}}} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}}_{\substack{\text{Accélération} \\ \text{Convective}}}$$

Le recours à la dérivée particulaire provient de la nécessité d'adapter un concept lagrangien (l'accélération d'une particule de fluide donnée) à un champ eulérien (le champ des vitesses).

- *Équation locale de conservation de la masse*

À travers une surface (S) orientée, les débits volumique et massique sont les flux respectifs du vecteur-vitesse et du vecteur densité de courant massique :

$$\underbrace{D_v}_{m^3 s^{-1}} = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}_M \quad \text{et} \quad \underbrace{D_m}_{kg s^{-1}} = \iint_S \vec{J}_m \cdot d\vec{S}_M \quad \text{où} \quad \underbrace{\vec{J}_m}_{kg m^{-2} s^{-1}} = \mu(M, t) \vec{v}(M, t)$$

Le postulat de conservation de la masse impose un couplage entre μ et \vec{J}_m :

$$\frac{\partial \mu(M, t)}{\partial t} + \text{div } \vec{J}_m(M, t) = 0$$

- Un écoulement stationnaire est invariant dans le temps. Pour un tel écoulement, le débit massique se conserve le long d'un tube de courant. Le caractère stationnaire dépend du référentiel.
- Dans un écoulement incompressible, les particules de fluide conservent leur masse volumique soit $\frac{D\mu}{Dt} = 0$ ou encore $\text{div } \vec{v}(M, t) = 0$. Pour un tel écoulement, le débit volumique se conserve le long d'un tube de courant. Le caractère incompressible est indépendant du référentiel.
- Le vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}$ est le vecteur-rotation local des particules de fluide. Lorsque $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$, l'écoulement est irrotationnel et il existe un potentiel des vitesses ϕ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi$. Cette caractéristique dépend du référentiel.

MF1 – SVF

- Retrouver l'expression du débit massique en calculant la masse qui traverse une surface dS pendant dt.
- Retrouver l'équation de conservation de la masse par un bilan.
- Démontrer que la pression dans le modèle de l'atmosphère isotherme peut s'écrire à l'aide d'un facteur de Boltzmann.
- Retrouver l'expression de la pression dans l'atmosphère dans le cas d'un modèle polytropique où $T(z) = T_0(1 - \lambda z)$.
- Calculer la force exercée par un fluide sur une paroi plane dans le cas d'une séparation eau/air. En déduire le centre de poussée.

Exercices classiques à connaître :

- MF12 – Atmosphère en équilibre
- MF15 – Poussée sur un mur de barrage (question 1 surtout)
- MF19 – Écoulement de couette cylindrique

- Retrouver l'expression du débit massique en calculant la masse qui traverse une surface dS pendant dt.*

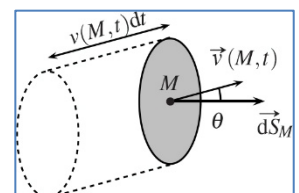
Considérons une section infinitésimale $d\vec{S}_M$ autour d'un point M et calculons la masse $\delta^2 m$ de fluide traversant $d\vec{S}_M$ pendant dt. Cette masse se trouve dans le prisme de base $d\vec{S}_M$ et de génératrice $\vec{v} dt$ d'où :

$$\delta^2 m = \mu \delta^2 V = \mu v dt dS_M \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow \delta^2 m = \mu \vec{v} \cdot d\vec{S}_M dt$$

En sommant toutes les contributions on obtient la masse δm qui traverse S pendant dt.

$$\delta m = \iint_S \mu \vec{v} \cdot d\vec{S}_M dt \Rightarrow D_m = \frac{\delta m}{dt} = \iint_S \mu \vec{v} \cdot d\vec{S}_M$$



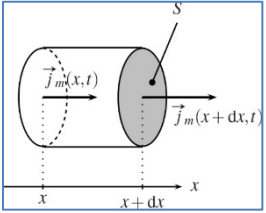
Le débit massique à travers la surface S est le flux du vecteur densité de courant de masse tel que :

$$D_m = \iint_S \vec{j}_m \cdot d\vec{S}_M \text{ où } \vec{j}_m = \mu(M, t) \vec{v}(M, t)$$

$kg\ s^{-1}$ $kgm^{-2}s^{-1}$

b) Retrouver l'équation de conservation de la masse par un bilan.

On écrit un bilan de matière, pendant une durée dt, en considérant le volume cylindrique, de section S, et limité par les abscisses x et x+dx. On note Σ ce système.



La masse contenue dans Σ est :

$$\begin{cases} m_\Sigma(t) = \mu(x, t) d\tau \\ m_\Sigma(t + dt) = \mu(x, t + dt) d\tau \end{cases}$$

D'où la variation :

$$dm_\Sigma = (\mu(x, t + dt) - \mu(x, t)) d\tau \Leftrightarrow dm_\Sigma \stackrel{D.L}{\approx} \frac{\partial \mu(x, t)}{\partial t} dt d\tau$$

La masse qui rentre dans le système pendant dt est :

$$dm_\Sigma = \delta m_x - \delta m_{x+dx}$$

$$\Leftrightarrow dm_\Sigma = \vec{j}_m(x, t) \cdot \vec{S}_x dt - \vec{j}_m(x + dx, t) \cdot \vec{S}_{x+dx} dt \Leftrightarrow dm_\Sigma \stackrel{D.L}{\approx} -\frac{\partial j_m(x, t)}{\partial x} \cdot dt S dx$$

Par conséquent :

$$-\frac{\partial j_m(x, t)}{\partial x} \cdot dt S dx = \frac{\partial \mu(x, t)}{\partial t} dt d\tau$$

D'où l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \mu(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial j_m(x, t)}{\partial x} = 0$$

À trois dimensions on pourra écrire :

$$\frac{\partial \mu(M, t)}{\partial t} + \text{div } \vec{J}_m(M, t) = 0$$

c) Démontrer que la pression dans le modèle de l'atmosphère isotherme peut s'écrire à l'aide d'un facteur de Boltzmann.

On fait l'hypothèse que l'air se comporte comme un gaz parfait et qu'il est en équilibre isotherme, c'est-à-dire que la température T est la même en tout point : T = constante. La masse volumique ρ n'est pas une constante et il faut en tenir compte pour intégrer la relation.

$$pV = nRT = \frac{m}{M} RT \Rightarrow pM = \frac{m}{V} RT \Rightarrow \rho = \frac{pM}{RT}$$

En reportant cette expression dans l'équation de statique des fluides :

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{pM}{RT} g$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre dont la solution est de la forme :

$$p(z) = Ae^{-\frac{Mg}{RT}z}$$

où A est une constante. On note p₀ la pression à l'altitude z = 0. Finalement :

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{Mg}{RT}z}$$

On définit la hauteur d'échelle H par l'altitude à laquelle p₀ est divisée par e (base du logarithme népérien). Alors :

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{z}{H}} \text{ où } H = \frac{Mg}{RT}$$

Avec M = 29 g.mol⁻¹ et T = 273 K, on trouve : H = 8,5 km qui est de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de l'atmosphère terrestre.

d) Retrouver l'expression de la pression dans l'atmosphère dans le cas d'un modèle polytropique où $T(z) = T_0(1 - \lambda z)$.
L'équation de statique des fluides peut s'écrire

$$\frac{dp}{dz} = -\rho(z)g = -\frac{p(z)M}{RT_0(1 - \lambda z)}g$$

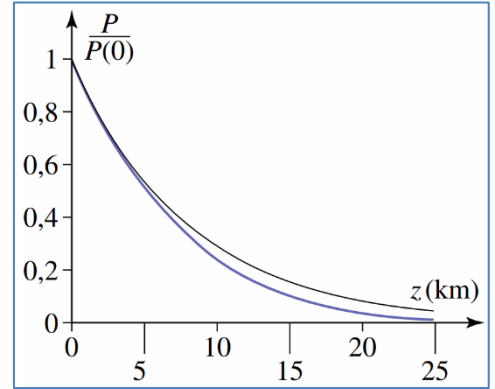
On sépare les variables puis on intègre entre 0 et z et les bornes assorties sur p(z).

$$\begin{aligned} \frac{dp}{p} &= -\frac{Mg}{RT_0} \frac{dz}{(1 - \lambda z)} \Rightarrow \int_{p(0)}^{p(z)} \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT_0} \int_0^z \frac{dz}{1 - \lambda z} \\ &\Rightarrow \ln\left(\frac{p(z)}{p_0}\right) = +\frac{Mg}{\lambda RT_0} \ln\left(\frac{1 - \lambda z}{1}\right) \end{aligned}$$

On pose : $\beta = \frac{Mg}{\lambda RT_0}$ d'où :

$$p(z) = p_0(1 - \lambda z)^\beta$$

Ce modèle est plus compliqué que le précédent mais les représentations graphiques de p(z) sont très proches, d'où l'utilisation plus courant de l'atmosphère isotherme comme modèle. Cette fois on obtient $\frac{p(H')}{p_0} = \frac{1}{e}$ pour $H' = 7,9 \text{ km}$.



e) Calculer la force exercée par un fluide sur une paroi plane dans le cas d'une séparation eau/air. En déduire le centre de poussée.

La définition de la force de pression nous permet d'écrire :

$$\begin{cases} \vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{air}} = \iint_{M \in S} (P_a + \rho gh) dS \vec{u}_x \\ \vec{F}_{\text{air} \rightarrow \text{eau}} = \iint_{M \in S} -P_a dS \vec{u}_x \end{cases}$$

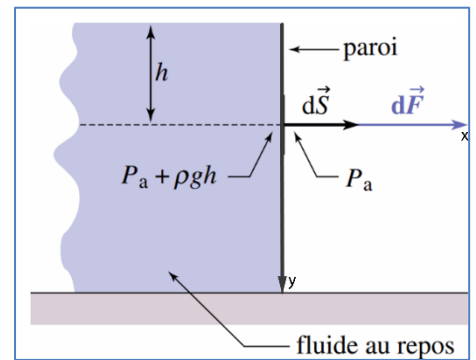
D'où la force totale subie par la paroi plane :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \iint_{M \in S} \rho gh dS \vec{u}_x = \int_0^H \rho gh L dh \vec{u}_x \\ \vec{F} &= \frac{1}{2} \rho g LH^2 \vec{u}_x \text{ où } \begin{cases} L = \text{largeur de la paroi} \\ H = \text{hauteur de la paroi} \end{cases} \end{aligned}$$

Le centre de poussée C est le point d'application de la force que l'on peut définir ainsi :

$$\begin{aligned} \vec{OC} \wedge \vec{F} &= \int_0^H d\vec{M}_0(M) \\ \Rightarrow h_c \vec{u}_y \wedge \frac{1}{2} \rho g LH^2 \vec{u}_x &= \int_0^H \vec{OM} \wedge d\vec{F} = \int_0^H h \vec{u}_y \wedge \rho gh L dh \vec{u}_x = \int_0^H \rho gh^2 L dh (-\vec{u}_z) \\ &\Rightarrow h_c \cdot \frac{1}{2} \rho g LH^2 = \frac{1}{3} \rho g H^3 L \\ &\Rightarrow h_c = \frac{2}{3} H \end{aligned}$$

Le point d'application de la force de poussée se situe au $\frac{2}{3}$ de la hauteur ($\frac{1}{3}$ en partant du sol). En effet la force élémentaire augmente avec la profondeur, il est donc normal d'avoir le centre de poussée en dessous de $\frac{H}{2}$.



MF2 – Synthèse

- Écoulements laminaires et turbulents

La force de traînée F subie par une sphère rigide de rayon r à vitesse U dans un fluide newtonien fait apparaître deux régimes distincts selon la valeur du nombre de Reynolds $Re = \frac{\mu UL}{\eta} = \frac{UL}{\nu}$ où $L = R$, η sa viscosité dynamique et ν sa viscosité cinématique.

- Lorsque $Re < 1$, la traînée est linéaire et $F = 6\pi\eta RU$
- Lorsque $Re > 10^3$, elle est quadratique et $F = \frac{1}{2} C_x \mu S U^2$

avec $S = \pi R^2$ la section droite de la sphère et C_x le coefficient de traînée.

Plus généralement, l'évaluation du nombre de Reynolds indique le caractère régulier ou non des lignes de courant, ce qui correspond respectivement à un écoulement laminaire ou turbulent.

- Approche mésoscopique des actions de contact dans un fluide en écoulement

Soit un champ des vitesses de la forme $\vec{v} = v_x(y)\vec{u}_x$. Au niveau d'un élément de surface dS parallèle à l'écoulement, le fluide situé au-delà exerce sur le fluide situé en-deçà une action de contact :

- de composante normale : $d\vec{F}_N = -p(M)dS\vec{u}_y$ (forces de pression)
- de composante tangentielle $d\vec{F}_T = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} dS \vec{u}_x$ (forces de cisaillement ou de viscosité)

Les équivalents volumiques de ces actions sont : $\frac{d\vec{F}_N}{d\tau} = \vec{f}_p = -\overrightarrow{\text{grad}} p$ et $\frac{d\vec{F}_T}{d\tau} = \vec{f}_{visc} = \eta \overrightarrow{\Delta} \vec{v}$

L'expression volumique des forces de viscosité n'étant valable que pour un écoulement incompressible et newtonien.

MF2 – SVF

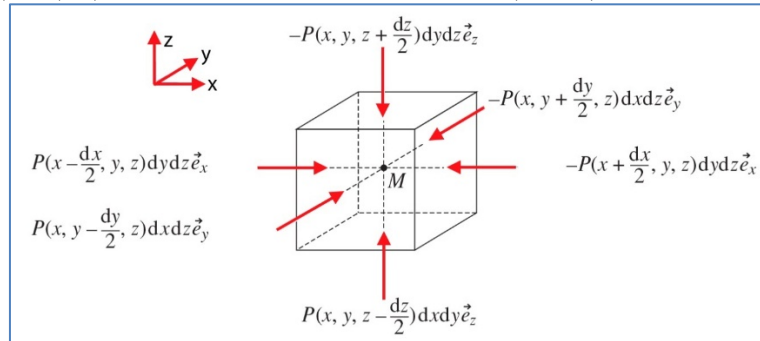
- Retrouver l'équivalent volumique des forces de pression.
- Retrouver l'équivalent volumique des forces de viscosité.
- Démontrez que le phénomène de viscosité correspond à une diffusion de quantité de mouvement.
- À l'aide de deux rapports convection/diffusion, donner l'expression du coefficient de Reynolds.
- Retrouver à l'aide d'un modèle simple l'expression de l'épaisseur de la couche limite.
- Retrouvez la loi de Stokes à l'aide de l'expression du C_x à faibles vitesses : $C_x \sim \frac{24}{Re}$
- Expliquez le phénomène de chute de trainée et comment le forcer sur quelques exemples.

Exercices classiques à connaître :

- MF21 : plan incliné

- Retrouver l'équivalent volumique des forces de pression

On considère un élément de fluide mésoscopique, de forme parallélépipédique, de côtés dx , dy et dz respectivement parallèles aux axes (Ox) , (Oy) et (Oz) , dont le centre est de coordonnées (x, y, z) .



On veut calculer la résultante $d\vec{F}_p$ des forces de pression exercées par le fluide qui l'entoure sur cet élément de fluide. $d\vec{F}_p$ est la somme de six forces s'exerçant sur les six faces. La composante dF_{pz} , provient des forces s'exerçant sur les deux faces orthogonales à (Oz) , qui ont pour surface $dS=dx dy$.

Elle s'écrit :

$$dF_{pz} = p\left(x, y, z - \frac{dz}{2}\right) dS - p\left(x, y, z + \frac{dz}{2}\right) dS$$

$$\Leftrightarrow dF_{pz} = -\frac{\partial p}{\partial z} dz dS = -\frac{\partial p}{\partial z} d\tau$$

De la même manière on montre que :

$$dF_{py} = -\frac{\partial p}{\partial y} d\tau \text{ et } dF_{px} = -\frac{\partial p}{\partial x} d\tau$$

Donc :

$$d\vec{F}_p = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{u}_z\right) d\tau = -\overrightarrow{\text{grad}} p d\tau$$

b) Retrouver l'équivalent volumique des forces de viscosité.

Comme nous l'avons fait pour la résultante des forces de pression, nous cherchons à calculer la résultante des forces de viscosité de cisaillement qui s'exercent sur une particule de fluide que l'on suppose située, à un instant t, entre x_0 et $x_0 + dx$, y_0 et $y_0 + dy$, z_0 et $z_0 + dz$

L'écoulement du fluide est un écoulement de cisaillement décrit par le champ de vitesse : $\vec{v} = v_x(y, t) \vec{u}_x$.

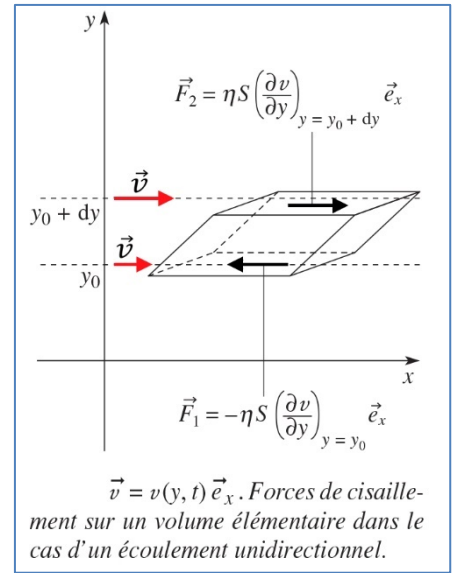
On suppose que les seules forces sont celles de cisaillement, dues à la viscosité. Alors, le système subit une force de la partie du fluide au-dessus, et une du fluide au-dessous :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{dF}_t &= \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}(y + dy, t) - \frac{\partial v_x}{\partial y}(y, t) \right) dx dz \vec{u}_x \Leftrightarrow \overrightarrow{dF}_t \sim \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy \right) dS \vec{u}_x \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{dF}_t &= \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} d\tau \vec{u}_x \end{aligned}$$

Dans ce cas particulier on a : $\frac{\overrightarrow{dF}_t}{d\tau} = \vec{f}_t = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \vec{u}_x$

D'où la généralisation pour un vecteur vitesse quelconque :

$$\vec{f}_t = \vec{f}_{visc} = \eta \Delta \vec{v}$$



c) Démontrez que le phénomène de viscosité correspond à une diffusion de quantité de mouvement.

En appliquant la loi de la quantité de mouvement à la particule de fluide, en tenant compte seulement des forces de viscosité, on obtient :

$$\delta m \frac{D\vec{v}}{dt} = \overrightarrow{dF}_t + \underbrace{\overrightarrow{dF}_p}_{=0}$$

Illustrons ce principe sur l'écoulement de cisaillement décrit par le champ de vitesse : $\vec{v} = v_x(y, t) \vec{u}_x$. Ainsi en projection sur \vec{u}_x :

$$\begin{aligned} \mu d\tau \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \underbrace{\frac{\partial v_x}{\partial x}}_{=0} \right) &= \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} d\tau \\ \Leftrightarrow \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{\eta}{\mu} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \end{aligned}$$

ce qui correspond à une équation de diffusion de coefficient $\nu = \frac{\eta}{\mu}$.

Posons la quantité de mouvement volumique : $p_{x,v} = \mu v_x$

$$\Rightarrow \frac{\partial p_{x,v}}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 p_{x,v}}{\partial y^2}$$

La viscosité peut s'interpréter comme un transfert interne de quantité de mouvement dans la direction transverse à l'écoulement, selon un phénomène de diffusion.

d) À l'aide de deux rapports convection/diffusion, donner l'expression du coefficient de Reynolds.

Première méthode : On a vu que le terme associé à l'accélération convective peut s'écrire :

$$\mu \overrightarrow{a_{convection}} = \mu (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$$

Et que la force de viscosité volumique peut s'écrire à une dimension :

$$\vec{f}_{v,x} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \vec{u}_x$$

On peut ainsi réaliser une comparaison de ces deux termes en ordre de grandeur sans dimension :

$$\begin{cases} \text{force volumique convective} \sim \mu \frac{U^2}{L} \\ \text{force volumique diffusive} \sim \eta \frac{U}{L^2} \end{cases} \Rightarrow \text{Re} = \frac{\text{terme convectif}}{\text{terme diffusif}} = \frac{\mu}{\eta} UL = \frac{UL}{\nu}$$

Seconde méthode :

L'équation de diffusion s'écrit :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

Si on écrit cette équation en ordre de grandeur on a alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial t} \leftrightarrow \frac{V_x}{\tau_{diff}} \\ v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \leftrightarrow v \frac{V_x}{L^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{V_x}{\tau_{diff}} \sim v \frac{V_x}{L^2} \Rightarrow \tau_{diff} = \frac{L^2}{v} = \frac{\mu L^2}{\eta}$$

Or le temps caractéristique de convection sur une distance L à la vitesse U peut s'écrire :

$$\tau_{conv} = \frac{L}{U}$$

Le nombre de Reynolds s'identifie alors au rapport : $Re = \frac{convection}{diffusion} = \frac{\frac{1}{\tau_{conv}}}{\frac{1}{\tau_{diff}}} = \frac{\mu UL}{\eta} = \frac{UL}{\nu}$

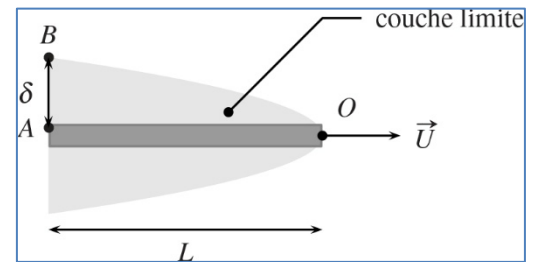
Si $Re \ll 1$, le transfert de quantité de mouvement par diffusion est bien plus rapide que par convection : les effets visqueux dominent.

e) Retrouver à l'aide d'un modèle simple l'expression de l'épaisseur de la couche limite.

La couche limite étant lié à un phénomène de diffusion, on va écrire :

$$\delta = \sqrt{D_{diff} \tau}$$

Or la couche limite observée à l'arrière de la plaque (points A et B sur la figure) a commencé à se développer lorsque le point O (avant de la plaque) se trouvait au niveau du point A . Si l'on note t l'instant auquel la figure est représentée, la couche limite observée à l'arrière de la plaque a donc commencé à se développer à l'instant $t - \tau$ tel que : $\tau = \frac{L}{U}$



$$\Rightarrow \delta = \sqrt{v \frac{L}{U}} = \frac{L}{\sqrt{\frac{UL}{\nu}}} = \frac{L}{\sqrt{Re}}$$

f) Retrouvez la loi de Stokes à l'aide de l'expression du C_x à faibles vitesses : $C_x \sim \frac{24}{Re}$

La force de traînée peut s'écrire à l'aide des résultats suivants :

$$\begin{cases} C_x = 24/Re \\ F_t = \frac{1}{2} C_x \mu U^2 S \\ Re = \frac{U \mu}{\eta} (2R) \quad \Delta L = 2R \end{cases} \Rightarrow \vec{F}_t = \frac{1}{2} \mu \frac{24}{\frac{U \mu}{\eta} (2R)} U^2 \pi R^2 \vec{u}_x$$

$$\Rightarrow \vec{F}_t = 6\pi \eta R \vec{U}$$

Donc, si la sphère possède une vitesse \vec{v} dans un fluide au repos, alors elle subit la force :

$$\vec{F}_t = -6\pi \eta R \vec{v}$$

g) Expliquez le phénomène de chute de traînée et comment le forcer sur quelques exemples.

Dans le cas d'une sphère dans un fluide en écoulement, il apparaît une chute du C_x à fort nombre de Reynolds : $Re > 2 \cdot 10^5$. Ce phénomène est intéressant pour augmenter la portance des objets, ainsi on cherche souvent à le provoquer. Pour cela, on peut rajouter des alvéoles dans la sphère comme les balles de golf ce qui permettra de créer une couche limite turbulente.

MF3 – Synthèse

• Écoulement visqueux

Pour un écoulement incompressible étudié dans un référentiel galiléen, l'application de la loi de la quantité de mouvement à une particule de fluide fournit l'équation de Navier-Stokes dont le champ des vitesses est solution :

$$\mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{v}}_{\text{terme convectif}} \right) = \vec{f}_v - \overrightarrow{grad} p + \underbrace{\frac{\eta \Delta \vec{v}}{\eta}}_{\text{terme diffusif}}$$

- L'analyse en ordre de grandeur de cette équation montre que le nombre de Reynolds est le rapport du terme convectif sur le terme diffusif de l'équation de Navier-Stokes.
- La présence de parois imperméables impose les conditions aux limites suivantes. On dit que les fluides visqueux «

collent » aux parois.

Interface	Fluide parfait	Fluide visqueux
Fluide → Paroi	$v_{n,fluide} = v_{n,paroi}$ $p_{fluide} = p_{paroi}$	$\vec{v}_{fluide} = \vec{v}_{paroi}$ $p_{fluide} = p_{paroi}$
Fluide 1 → Fluide 2	$v_{n,fluide1} = v_{n,fluide2}$ $p_{fluide1} = p_{fluide2}$	$\vec{v}_{fluide1} = \vec{v}_{fluide2}$ $p_{fluide1} = p_{fluide2}$ $\eta_2 \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big _{y=0^-} = \eta_1 \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big _{y=0^+}$

- *Écoulement parfait*

Lorsqu'on néglige les effets visqueux, le champ des vitesses est solution de l'équation d'Euler :

$$\mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = \vec{f}_v - \overrightarrow{\text{grad}} p$$

- La présence de parois imperméables impose seulement la continuité de la composante normale de la vitesse sur la paroi dans le référentiel de la paroi.
- Pour des fluides visqueux, les effets visqueux se concentrent près des parois, dans une zone appelée **couche limite**. Cela permet de considérer que l'écoulement est parfait en dehors.

Lorsque l'écoulement est parfait, stationnaire, incompressible et homogène, l'équation d'Euler possède une intégrale première appelée relation de Bernoulli : $\frac{v_A^2}{2} + gz_A + \frac{p_A}{\mu} = \frac{v_B^2}{2} + gz_B + \frac{p_B}{\mu}$ où A et B appartiennent à la même ligne de courant.

Lorsque l'écoulement est parfait, stationnaire, incompressible et homogène et irrotationnel, l'équation d'Euler possède une intégrale première appelée relation de Bernoulli :

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\mu} + gz = \text{cste si } z \text{ ascendant}$$

MF3 – SVF

- Retrouver l'expression du nombre de Reynolds à partir de l'équation de NS.
- Retrouver la loi de la vitesse dans un écoulement type Couette plan. Calculer la force exercée par le fluide sur la plaque.
- Retrouver la loi de la vitesse dans un écoulement type Poiseuille cylindrique. En déduire la loi de Hagen-Poiseuille.
- Retrouver le théorème de Bernoulli dans le cas d'un écoulement parfait, incompressible, stationnaire, et tourbillonnaire.
- Retrouver le théorème de Bernoulli dans le cas d'un écoulement parfait, incompressible, stationnaire, et irrotationnel (non tourbillonnaire).
- Retrouver la formule de Torricelli.
- Donner l'expression de la vitesse en entrée du tube de Pitot.

Exercices classiques à connaître :

- MF31 : Effet Magnus.
- MF38 ou 39 : Écoulement de Poiseuille
- TH310 : Vidange d'un récipient

a) *Retrouver l'expression du nombre de Reynolds à partir de l'équation de NS.*

L'équation de NS s'écrit :

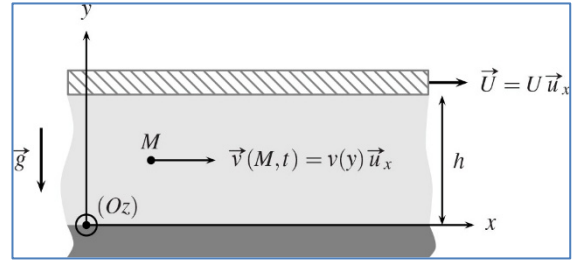
$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = - \underbrace{\mu (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}}_{\text{convectif}} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \vec{f}_v + \underbrace{\eta \Delta \vec{v}}_{\text{diffusif}}$$

On utilise l'analyse par ordre de grandeurs afin de comparer les termes diffusifs et convectifs.

$$\begin{cases} \eta \Delta v \rightarrow \eta U/L^2 \\ \mu (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \rightarrow \mu \frac{U^2}{L} \Rightarrow Re = \frac{\text{terme convectif}}{\text{terme diffusif}} = \frac{\mu UL}{\eta} \end{cases}$$

b) Retrouver la loi de la vitesse dans un écoulement type Couette plan.

Le système étudié est invariant par translation selon (Oz). Une plaque entraînée à la vitesse $\vec{U} = U \vec{u}_x$ entraîne une couche de fluide, d'épaisseur uniforme h . Aucune force n'est appliquée au fluide, qui est seulement soumis à l'action de la pesanteur et de la plaque. On se place en régime stationnaire. On cherche une solution de l'équation de Navier-Stokes sous la forme : $\vec{v} = v(x, y, t) \vec{u}_x$.



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Écoulement incompressible : } \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow v_x = v_x(y) \\ \text{Écoulement stationnaire : } \frac{\partial v_x}{\partial t} = 0 \end{array} \right.$$

L'équation de Navier-Stokes :

$$\mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = \vec{f}_v - \text{grad } p + \eta \Delta \vec{v}$$

se simplifie en :

$$\Rightarrow \mu v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} \vec{u}_x = -\mu g \vec{u}_y - \text{grad } p + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \vec{u}_x$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (1) \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - \mu g \quad (2) \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_x = -\mu g \Rightarrow p(x, y) = -\mu g y + f(x) \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} \Rightarrow p = p(x, y) \end{array} \right.$$

Or le système présente une invariance par translation selon (Ox) :

$$\Rightarrow p(y) = -\mu g y + cste \Rightarrow p(y) = -\mu g y + p(0)$$

Donc (1) se résout :

$$\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow v_x = Ay + B$$

Le fluide étant visqueux (réel) :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x(0) = 0 = B \\ v_x(h) = Ah + B = U \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B = 0 \\ A = \frac{U}{h} \end{array} \right. \Rightarrow \vec{v} = \frac{U}{h} y \vec{u}_x$$

D'où la force exercée par le fluide sur la plaque :

$$\vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{plaque}} = -\eta S \frac{\partial v_x}{\partial y} \vec{u}_x = -\frac{\eta S U}{h} \vec{u}_x$$

c) Retrouver la loi de la vitesse dans un écoulement type Poiseuille cylindrique. En déduire la loi de Hagen-Poiseuille.

L'écoulement de Poiseuille correspond à l'écoulement d'un fluide réel à l'intérieur d'une conduite cylindrique de rayon R. L'axe de symétrie de révolution de la conduite est (Oz). Pour forcer le liquide à s'écouler, un opérateur impose :



$$\left\{ \begin{array}{l} p_e = p(0) \\ p_s = p(L) < p_e \end{array} \right. \text{ avec } \Delta p = p_e - p_s > 0$$

Hypothèses :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Écoulement incompressible} \\ \text{Écoulement stationnaire} \\ \text{pesanteur négligée} \\ \vec{v}(M, t) = v(r) \vec{u}_x \Rightarrow \Delta v_x = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \end{array} \right.$$

L'équation de NS se simplifie en :

$$\mu v_x \frac{\partial v(r)}{\partial x} \vec{u}_x = -\text{grad } p + \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \vec{u}_x$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial r} \text{ et } 0 = -\frac{\partial p}{\partial \theta} \end{array} \right.$$

Donc p ne dépend que de x et v dépend que de r donc :

$$\frac{dp}{dx} = \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{dv_x}{dr} \right) \Leftrightarrow F(x) = G(r)$$

Comme x et r sont deux variables indépendantes, chacune de ces deux fonctions est nécessairement égale à une constante, indépendante de r et de x , que nous notons K :

$$\frac{dp}{dx} = K \Rightarrow p(x) = Kx + B$$

$$\text{Or : } \begin{cases} p(0) = p_e \\ p(L) = p_s \end{cases} \Rightarrow p(x) = \frac{p_s - p_e}{L} x + p_e$$

D'où :

$$\eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{dv_x}{dr} \right) = -\frac{\Delta p}{L} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{dv_x}{dr} \right) = -\frac{\Delta p}{\eta L} r$$

$$\Rightarrow r \frac{dv_x}{dr} = -\frac{\Delta p}{\eta L} \frac{r^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow \frac{dv_x}{dr} = -\frac{\Delta p}{\eta L} \frac{r}{2} + \frac{C}{r}$$

$$\Leftrightarrow v_x = -\frac{\Delta p}{\eta L} \frac{r^2}{4} + C \ln(r) + D$$

Or $\ln(r)$ diverge en $r=0$ donc $C=0$ d'où :

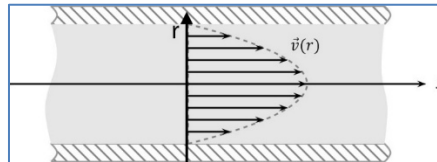
$$v_x = -\frac{\Delta p}{\eta L} \frac{r^2}{4} + D$$

Les parois étant immobiles :

$$v(R) = 0 \Rightarrow v_x = -\frac{\Delta p}{4\eta L} (r^2 - R^2)$$

$$\Rightarrow \vec{v}(r) = \frac{\Delta p}{4\eta L} (R^2 - r^2) \vec{u}_x$$

Le profil des vitesses est le suivant :



Pour retrouver la loi de Hagen-Poiseuille, calculons le débit volumique du fluide dans l'écoulement de Poiseuille :

$$D_v = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{dS} = \iint_S \frac{\Delta p}{4\eta L} (R^2 - r^2) \cdot \underbrace{r dr d\theta}_{\text{couronne cylindrique}}$$

$$\Leftrightarrow D_v = \frac{\Delta p}{4\eta L} 2\pi \left(R^2 \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{\Delta p}{2\eta L} \frac{\pi R^4}{4}$$

On fait l'analogie avec la loi d'ohm en électrocinétique :

$$I = \frac{U}{R} \Leftrightarrow D_v = \frac{\Delta p}{R_h} \text{ où } R_h = \text{résistance hydraulique}$$

$$\Rightarrow D_v = \frac{\Delta p}{R_h} = \frac{\pi R^4}{8\eta L} \Delta p \text{ où } R_h = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$$

d) Retrouver le théorème de Bernoulli dans le cas d'un écoulement parfait, incompressible, stationnaire, et tourbillonnaire.

Considérons un écoulement parfait et tourbillonnaire on peut donc partir de l'équation d'Euler. Intégrons l'équation d'Euler le long d'une ligne de courant. Pour ce faire multiplions par un élément de longueur \vec{dl} .

$$\mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) + (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v} \right) \cdot \vec{dl} = \vec{f}_v \cdot \vec{dl} - \overrightarrow{\text{grad}} p \cdot \vec{dl}$$

Or : $((\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v}) \cdot \vec{dl} = 0$ car $\vec{dl} = \vec{v} dt$

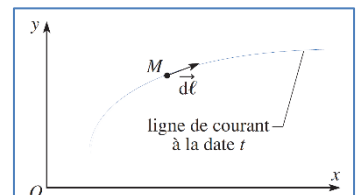
$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{dl} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) \cdot \vec{dl} = \frac{\vec{f}_v}{\mu} \cdot \vec{dl} - \frac{\overrightarrow{\text{grad}} p}{\mu} \cdot \vec{dl}$$

On suppose que les forces massiques dérivent d'une énergie potentielle d'où :

$$\frac{\vec{f}_v}{\mu} = \vec{f}_m = -\overrightarrow{\text{grad}} e_p = -\overrightarrow{\text{grad}} (gz) \text{ pour la pesanteur}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{dl} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} + e_p \right) \cdot \vec{dl} = -\frac{\overrightarrow{\text{grad}} p}{\mu} \cdot \vec{dl}$$

Or l'écoulement est du type :



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Stationnaire : } \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \text{ et } \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0 \\ \text{Fluide homogène : } \frac{\overrightarrow{\text{grad}} p}{\mu} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{p}{\mu} \right) \\ \Rightarrow d \left(\frac{v^2}{2} + e_p + \frac{p}{\mu} \right) = 0 \end{array} \right.$$

Dans un écoulement parfait, incompressible, stationnaire, tourbillonnaire d'un fluide homogène évoluant dans le champ de pesanteur, on vérifie le théorème de Bernoulli, le long d'une ligne de courant :

$$\frac{v_A^2}{2} + gz_A + \frac{p_A}{\mu} = \frac{v_B^2}{2} + gz_B + \frac{p_B}{\mu}$$

où A et B appartiennent à la même ligne de courant.

e) Retrouver le théorème de Bernoulli dans le cas d'un écoulement parfait, incompressible, stationnaire, et irrotationnel (non tourbillonnaire).

On considère un écoulement répondant aux hypothèses suivantes : écoulement parfait, écoulement du fluide homogène est stationnaire et incompressible, l'écoulement est irrotationnel. Le fluide n'évolue que sous l'action des forces de pression et du champ de pesanteur uniforme. Compte tenu de ces hypothèses, dans le référentiel d'étude R galiléen, l'équation de Navier-Stokes devient :

$$\begin{aligned} \mu \left(\begin{array}{l} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \\ \vec{0} \text{ car} \\ \text{stationnaire} \end{array} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \underbrace{\left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \right)}_{\vec{0} \text{ car irrotationnel}} \wedge \vec{v} \right) &= \vec{f}_v - \overrightarrow{\text{grad}} p \Rightarrow \mu \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \vec{f}_v - \overrightarrow{\text{grad}} p \\ \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\mu} \right) &= \frac{\vec{f}_v}{\mu} = -\overrightarrow{\text{grad}} e_p \\ \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}} \left(\mu \frac{v^2}{2} + p + e_p \right) &= \vec{0} \end{aligned}$$

Dans un écoulement parfait, incompressible, stationnaire, irrotationnel d'un fluide homogène évoluant dans le champ de pesanteur, on vérifie le théorème de Bernoulli:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\mu} + gz = \text{cste si } z \text{ ascendant ou } \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\mu} - gz = \text{cste si } z \text{ descendant}$$

f) Retrouver la formule de Torricelli.

Étudions la vidange d'un réservoir par une petite ouverture. Le fluide, supposé parfait et incompressible, s'écoule par un orifice de section s très inférieure à la section S du récipient. La hauteur de fluide comptée à partir de l'orifice de sortie est notée h(t) à l'instant t. À l'instant initial, elle vaut h₀.

À priori, l'écoulement n'est pas stationnaire. Nous allons cependant comparer l'importance relative du terme local et du terme convectif dans l'expression de l'accélération d'une particule de fluide.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} \sim \frac{v_0}{\tau} \\ \left\| (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right\| \sim \frac{v_0^2}{h_0} \Rightarrow \frac{\frac{\partial v}{\partial t}}{\left\| (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right\|} \sim \frac{h_0}{v_0 \tau} \end{array} \right.$$

On note v₀ l'ordre de grandeur du champ des vitesses et τ la durée caractéristique de variation temporelle de ce champ.

L'écoulement étant incompressible :

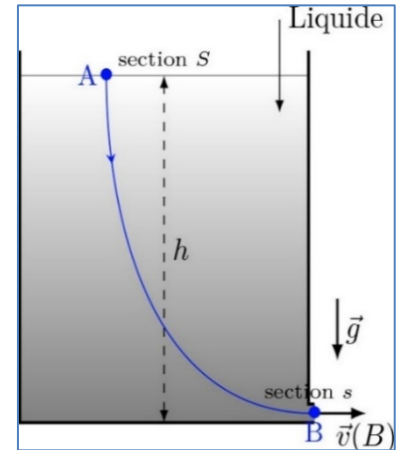
$$D_v = v_A S = v_B s \Rightarrow v_A = \left| \frac{dh}{dt} \right| = \frac{s}{S} v_B$$

En ordre de grandeur :

$$\frac{h_0}{\tau} \sim \frac{s}{S} v_0 \Rightarrow \frac{\frac{\partial v}{\partial t}}{\left\| (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right\|} \sim \frac{s}{S} \ll 1$$

On peut négliger l'accélération locale devant l'accélération convective. On dit que le régime est quasi-stationnaire.

Appliquons le théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant AB reliant la surface libre au jet de sortie. Nous ne l'appliquons pas dans tout l'écoulement car au niveau de l'orifice de sortie le jet est sans doute tourbillonnaire.



$$\frac{v_A^2}{2} + gz_A + \frac{p_A}{\mu} = \frac{v_B^2}{2} + gz_B + \frac{p_B}{\mu}$$

Or :

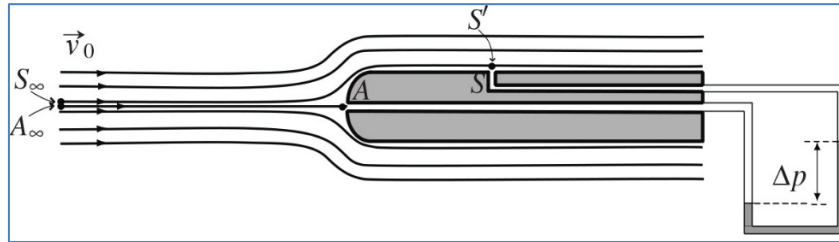
$$\begin{cases} v_A \ll v_B \\ p_B = p_0 \text{ (au contact de l'air extérieur)} \\ p_A = p_0 \end{cases}$$

D'où :

$$g(z_A - z_B) = \frac{v_B^2}{2} \\ \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh} : \text{Formule de Torricelli}$$

g) Donner l'expression de la vitesse en entrée du tube de Pitot.

On suppose l'écoulement d'air permanent, incompressible et homogène, à la vitesse constante $\vec{v} = v \vec{u}_x$, loin en amont du tube. On négligera l'influence de la pesanteur vu la faible taille du dispositif.



Le nombre de Reynolds vaut : $R_e = \frac{UL}{\nu} = 300 \times \frac{0,2}{10^{-5}} = 6.10^6 \gg 1$. Comme le nombre de Reynolds est très grand, on va étudier l'écoulement en dehors de la couche limite d'épaisseur très faible, afin de considérer l'écoulement parfait. Toutes les conditions d'application du théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant sont vérifiées.

• Appliquons-le dans un premier temps le long de la ligne de courant $A_\infty A$ où A_∞ est sur la ligne de courant arrivant au point d'arrêt A mais suffisamment loin du tube pour que la vitesse de l'écoulement y soit v_0 et la pression p_0 :

$$\frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\mu} = \frac{p_A}{\mu} \text{ car A point d'arrêt.}$$

• Appliquons de nouveau le théorème de Bernoulli mais le long de la ligne de courant $S_\infty S'$ où S_∞ est sur la ligne de courant arrivant au point S' , proche de l'orifice S mais hors de la couche limite. Vu qu'on néglige la pesanteur $p_S = p_{S'}$ d'où :

$$\frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\mu} = \frac{p_S}{\mu} + \frac{v_{S'}^2}{2}$$

Or : $v_{S'} = v_0$ car S' est assez éloigné de A.

$$\Rightarrow p_0 = p_S$$

Par conséquent on a accès à la vitesse du fluide grâce à la sonde :

$$\frac{v_0^2}{2} + \frac{p_S}{\mu} = \frac{p_A}{\mu} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2}{\mu}(p_A - p_S)}$$

MF4 – Synthèse

• Système et bilan de masse

Lorsque les détails de l'écoulement sont mal connus, un bilan macroscopique est souvent fécond lorsqu'il s'agit d'obtenir la résultante des forces de pression ou la puissance dissipée par les forces de viscosité. On considère le système ouvert (Σ_0) situé entre les sections d'entrée et de sortie fixes dans lesquelles l'écoulement est supposé unidimensionnel, c'est-à-dire uniforme et orthogonal à la section droite. Les lois de la mécanique étant formulées pour des systèmes fermés, on associe à (Σ_0) un système fermé constitué

- à t de (Σ_0) et de la masse rentrant entre t et $t + dt$;
- à $t + dt$ de (Σ_0) et de la masse sortie entre t et $t + dt$.

Un bilan de masse consiste à affirmer la conservation de la masse pour le système fermé associé. En régime stationnaire, il en résulte la conservation déjà connue du débit massique le long d'un tube de courant.

• Bilan de quantité de mouvement

Un bilan de quantité de mouvement consiste à appliquer la loi de la quantité de mouvement au système fermé. En régime stationnaire, la résultante des forces extérieures s'écrit : $D_m(\vec{v}_s - \vec{v}_e) = \sum \vec{F}_{ext \rightarrow \Sigma_f}$

- *Bilans énergétiques*

Un bilan d'énergie cinétique consiste à appliquer la loi de l'énergie cinétique au système fermé. En régime stationnaire, la puissance des forces extérieures et intérieures s'écrit :

$$\frac{D_m}{2}(v_s^2 - v_e^2) = P_{int \rightarrow \Sigma_f} + P_{ext \rightarrow \Sigma_f}$$

Lorsque l'écoulement est parfait et incompressible, $P_{int \rightarrow \Sigma_f} = 0$.

Un bilan d'énergie mécanique en régime stationnaire pour un écoulement parfait et incompressible s'écrit :

$$D_m \left[\underbrace{\left(\frac{v_s^2}{2} + gz_s \right)}_{e_{ms}} - \underbrace{\left(\frac{v_e^2}{2} + gz_e \right)}_{e_{me}} \right] = P_{pression} + P_{autre}$$

MF4 – SVF

- À l'aide d'un bilan de quantité de mouvement, retrouver la loi de vitesse d'un écoulement de Poiseuille.
- Pour un écoulement incompressible et parfait, démontrer l'expression du bilan d'énergie mécanique.
- À l'aide d'un bilan d'énergie mécanique, retrouver l'équation de Bernoulli à l'aide d'un bilan énergétique.
- Dans le cas d'une éolienne, démontrer que la puissance maximale récupérable est de l'ordre de 60%.
- Dans le cas d'un système type fusée, démontrer que la force d'éjection des gaz peut s'écrire : $-D_m \vec{u}$ où \vec{u} est la vitesse des gaz par rapport à la fusée.

Exercices classiques à connaître :

- MF41 – L'hélice et limite de Betz
- MF42 – Fusée Ariane V
- MF45 – L'aéroglesseur
- MF48 – Onde de ressaut (les 4 premières questions surtout)

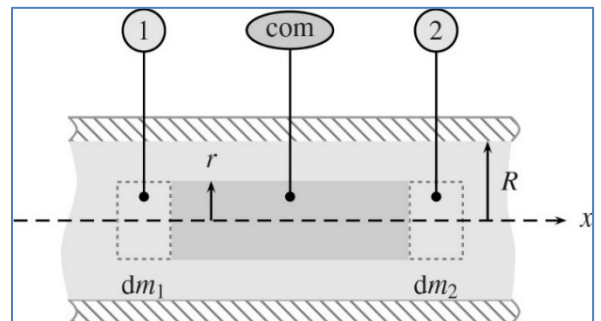
- À l'aide d'un bilan de quantité de mouvement, retrouver la loi de vitesse d'un écoulement de Poiseuille.

Bilan de quantité de mouvement, en écoulement permanent et incompressible, appliquée au cylindre de rayon r et de longueur L :

$$\begin{cases} \vec{p}_{\Sigma_f}(t) = \vec{p}_{\Sigma_o}(t) + \delta m_e \vec{v}_e \\ \vec{p}_{\Sigma_f}(t + dt) = \vec{p}_{\Sigma_o}(t + dt) + \delta m_s \vec{v}_s \\ \Rightarrow \frac{d\vec{p}_{\Sigma_f}}{dt} = \frac{d\vec{p}_{\Sigma_o}}{dt} + D_{ms} \vec{v}_s - D_{me} \vec{v}_e = \sum \vec{F}_{ext} \end{cases}$$

Vu que l'écoulement est permanent :

$$D_m (v_2 - v_1) \vec{u}_x = \sum \vec{F}_{ext}$$



Avec :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{p1} + \vec{F}_{p2} + \vec{F}_{visc} + \vec{P}$$

$$\begin{cases} \vec{F}_{p1} = p_e \pi r^2 \vec{u}_x \\ \vec{F}_{p2} = -p_s \pi r^2 \vec{u}_x \\ \vec{F}_{visc} = +\eta \frac{\partial v}{\partial r} S_{lat} \vec{u}_x \text{ (Les veines rapides sont au centre)} \end{cases}$$

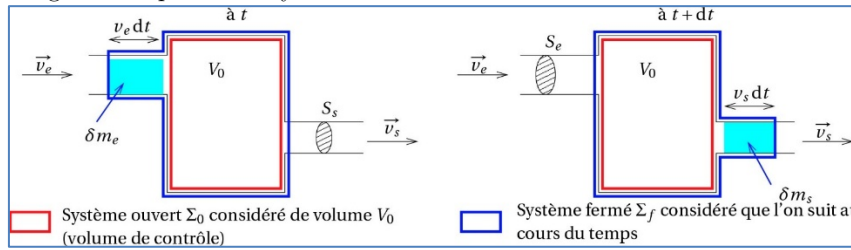
$$\text{Donc : } D_m (v_2 - v_1) = (p_e - p_s) \pi r^2 + \eta \frac{\partial v}{\partial r} (2\pi r L)$$

$$\text{Or : } v = v(r) \text{ car } \begin{cases} \text{invariance par rotation autour de } (Ox) \Rightarrow v(r, x) \\ \text{incompressible : } \text{div } \vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow v = v(r) \end{cases}$$

donc $v_2 = v_1$ et :

$$\begin{aligned} (p_e - p_s) \pi r^2 + \eta \frac{\partial v}{\partial r} (2\pi r L) &= 0 \Leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{p_s - p_e}{2\eta L} r \\ \Rightarrow v(r) &= \frac{p_s - p_e}{4\eta L} r^2 + B \\ \text{Or } v(R) = 0 &\Rightarrow v(r) = \frac{p_s - p_e}{4\eta L} (r^2 - R^2) \end{aligned}$$

b) Pour un écoulement stationnaire, incompressible et parfait, démontrer l'expression du bilan d'énergie mécanique. On effectue un bilan d'énergie cinétique sur le système fermé suivant :



$$\begin{cases} E_c(t) = E_{c_{\Sigma_0}}(t) + \frac{1}{2} \delta m_e v_e^2 \\ E_c(t + dt) = E_{c_{\Sigma_0}}(t + dt) + \frac{1}{2} \delta m_s v_s^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{dE_c}{dt} = \frac{dE_{c_{\Sigma_0}}}{dt} + \frac{1}{2} D_{ms} v_s^2 - \frac{1}{2} D_{me} v_e^2 = P_{int} + P_{ext}$$

Or :

$$\begin{cases} \text{Pour un écoulement stationnaire : } \frac{dE_{c_{\Sigma_0}}}{dt} = 0 \text{ et } D_m = D_{me} = D_{ms} \\ \text{Pour un écoulement parfait et incompressible : } P_{int} = 0 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\frac{D_m}{2} (v_s^2 - v_e^2) = P_{poids} + P_{pression} + P_{autre}$$

Intéressons-nous à P_{poids} :

$$\begin{aligned} P_{poids} &= \frac{\delta W}{dt} = - \frac{dE_p}{dt} \\ \text{Or } \begin{cases} E_p(t) = E_{p_{\Sigma_0}}(t) + \delta m_e g z_e \\ E_p(t + dt) = E_{p_{\Sigma_0}}(t + dt) + \delta m_s g z_s \end{cases} \\ \Rightarrow \frac{dE_p}{dt} dt &= \delta m_s g z_s - \delta m_e g z_e \\ \Rightarrow \frac{dE_p}{dt} &= D_{ms} g z_s - D_{me} g z_e \end{aligned}$$

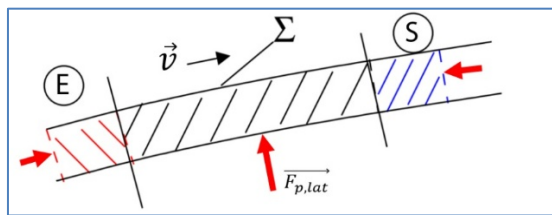
Donc :

$$D_m \left[\underbrace{\left(\frac{v_s^2}{2} + g z_s \right)}_{e_{ms}} - \underbrace{\left(\frac{v_e^2}{2} + g z_e \right)}_{e_{me}} \right] = P_{pression} + P_{autre}$$

c) À l'aide d'un bilan d'énergie mécanique, retrouver l'équation de Bernoulli à l'aide d'un bilan énergétique. Intéressons-nous, à un écoulement stationnaire, incompressible, parfait on a le bilan d'énergie mécanique :

$$D_m \left(\frac{v_s^2}{2} + g z_s \right) - D_m \left(\frac{v_e^2}{2} + g z_e \right) = P_{pression} + P_{autre}$$

Appliquons un bilan d'énergie à un tube de courant :



Ainsi $P_{press} = P_e + P_s + P_{lat}$ mais $\vec{F}_{p,lat} \perp \vec{v}$ d'où $P_{lat} = 0$

$$\Rightarrow D_m \left(\frac{v_s^2}{2} + g z_s \right) - D_m \left(\frac{v_e^2}{2} + g z_e \right) = D_m (-p_s v_s + p_e v_e) + P_{autre}$$

Pour un fluide homogène : $\mu = \frac{1}{v_e} = \frac{1}{v_s} \Rightarrow D_m \Delta \left(\frac{p}{\mu} + \frac{v^2}{2} + g z \right) = P_{autre}$

Pour un écoulement stationnaire, parfait, incompressible d'un fluide homogène, le long d'une ligne de courant, le bilan d'énergie mécanique nous permet de retrouver l'équation de Bernoulli si (Oz) ascendant :

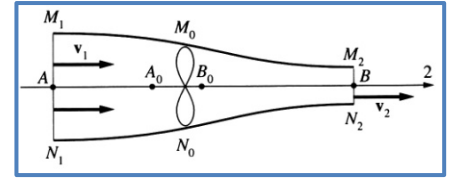
$$D_m \Delta \left(\frac{p}{\mu} + \frac{v^2}{2} + g z \right) = P_{autre}$$

Si $P_{autre} = 0$:

$$\frac{v_s^2}{2} + g z_s + \frac{p_s}{\mu} = \frac{v_e^2}{2} + g z_e + \frac{p_e}{\mu}$$

d) Dans le cas d'une éolienne, démontrer que la puissance maximale récupérable est de l'ordre de 60%.

Afin de retrouver la limite de Betz on va devoir effectuer plusieurs bilans sur une système fermé pour un écoulement stationnaire, parfait, incompressible en des points éloignés A et B de l'hélice (autour de l'hélice l'écoulement a tendance à être tourbillonnaire) :



- Bilan de quantité de mouvement :

$$\frac{D\vec{p}}{Dt} = D_{m2}\vec{v}_2 - D_{m1}\vec{v}_1 = D_m(v_2 - v_1)\vec{u}_x = \mu D_v(v_2 - v_1)\vec{u}_x = \vec{F}_{hélice \rightarrow fluide} + \vec{F}_p$$

Or la pression extérieure est uniforme donc $\vec{F}_p = \vec{0}$

$$\Rightarrow P_{hélice} = \vec{F}_{hélice \rightarrow fluide} \cdot \vec{v} = \mu D_v(v_2 - v_1)v$$

- Bilan d'énergie :

$$\frac{DE_m}{Dt} = D_{m2}e_2 - D_{m1}e_1 = D_m(e_2 - e_1) = \frac{D_m(v_2^2 - v_1^2)}{2} = P_{hélice} + P_{pression} + P_{int}$$

Or : $\begin{cases} P_{int} = 0 \text{ absence de viscosité} \\ P_{pression} = 0 \text{ même pression autour du système étudié} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{D_m(v_2^2 - v_1^2)}{2} = P_{hélice}$$

On égalise nos deux expressions de la puissance :

$$P_{hélice} = \mu D_v \frac{(v_2^2 - v_1^2)}{2} = \mu D_v(v_2 - v_1)v \Rightarrow v = \frac{(v_2 + v_1)}{2}$$

$$\Rightarrow P_{hélice} = \mu v^2 S(v_2 - v_1) = \mu S(v_2 - v_1) \frac{(v_2 + v_1)^2}{4}$$

Finalement :

$$\begin{cases} P_{incident} = \frac{1}{2} \mu S v_1^3 \\ P_{extraite} = -P = -\mu S(v_2 - v_1) \frac{(v_2 + v_1)^2}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow r = \frac{\mu S(v_1 - v_2) \frac{(v_2 + v_1)^2}{4}}{\frac{1}{2} \mu S v_1^3} = \frac{1}{2} (1-x)(x+1)^2 \text{ où } x = \frac{v_2}{v_1}$$

On cherche la valeur de x qui maximise le rendement :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow -(x+1)^2 + 2(x+1)(1-x) = 0$$

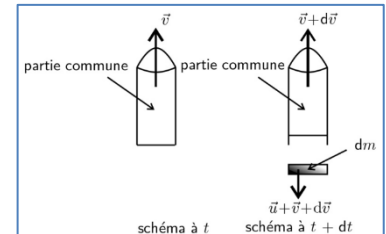
$$\Leftrightarrow (x+1)(-x-1+2-2x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow r_{max} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{27}$$

Ce résultat forme la limite de Betz qui indique que la puissance théorique maximale développée par un capteur éolien est égale à 16/27 (60%) de la puissance incidente du vent qui traverse l'éolienne.

e) Dans le cas d'un système type fusée, démontrer que la force d'éjection des gaz peut s'écrire : $-D_m \vec{u}$ où \vec{u} est la vitesse des gaz par rapport à la fusée.

On va effectuer un bilan de quantité de mouvement sur le système fermé formé de la fusée (carénage) et de ses gaz. Cependant, ici le système est non stationnaire car il n'y a pas d'entrée de gaz. (Ici on simplifie le calcul en ne tenant pas compte dans le système des gaz échappés à t que l'on retrouvera à t+dt).



$$\begin{cases} \vec{p}_{\Sigma_f}(t) = [m_f + m_g(t)]\vec{v}(t) \\ \vec{p}_{\Sigma_f}(t + dt) = [m_f + m_g(t + dt)]\vec{v}(t + dt) + dm(\vec{u} + \vec{v}(t + dt)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{\Sigma_f}(t + dt) - \vec{p}_{\Sigma_f}(t) = [m_f + m_g(t) - D_m dt](\vec{v} + d\vec{v}) + D_m dt(\vec{u} + \vec{v} + d\vec{v}) - [m_f + m_g(t)]\vec{v}$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{\Sigma_f}(t + dt) - \vec{p}_{\Sigma_f}(t) = (m_f + m_g(t)) d\vec{v} + D_m dt \vec{u}$$

$$\Rightarrow \frac{D\vec{p}}{Dt} = (m_f + m_g(t)) \frac{d\vec{v}}{dt} + D_m \vec{u} = \vec{F}_{ext} = [m_f + m_g(t)]\vec{g}$$

Que l'on réécrit sous la forme suivante :

$$(m_f + m_g(t)) \frac{d\vec{v}}{dt} = -D_m \vec{u} + [m_f + m_g(t)]\vec{g}$$

Ainsi on peut interpréter ce résultat au PFD appliqué au système fermé de masse $m_f + m_g(t)$ (ici variable) soumis aux forces de pesanteur et de poussée : $-D_m \vec{u}$