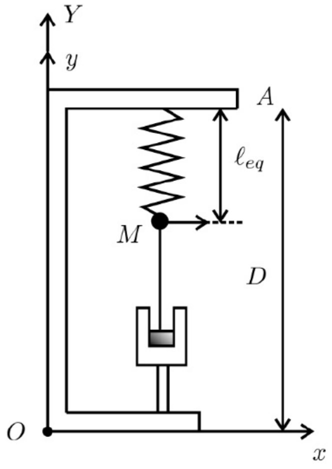
MC3 – Dynamique en référentiel non galiléen

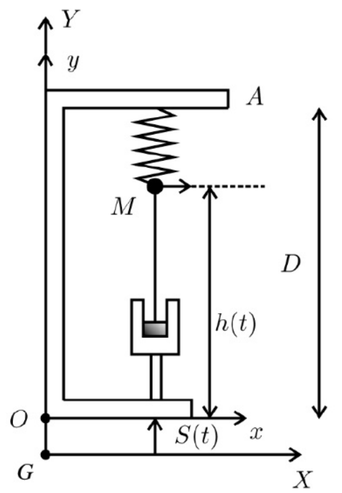
A – Travaux dirigés

MC31 – Sismographe

1.



au repos



tremblement de terre

a) Système : Point matériel M de masse m

b) Référentiels : Le référentiel terrestre $\Re_0 = (G; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ est galiléen. Le référentiel lié au bâti $\Re = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ est non galiléen. $\Re$ est en translation par rapport à $\Re_0$, donc $\vec{\omega}_{\Re/\Re_0} = \vec{0}$.

c) Bilan des forces :

- Force exercée par le ressort :

$$\vec{F} = k\left((D-h) - \ell_0\right)\vec{u}_y$$

- Poids : $\vec{P} = m\vec{g}$
- Force d'inertie d'entraînement : $\vec{f}_{ie}(M) = -m\vec{a}_e(M) = -m\left(\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{GO}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\Re_0}$

Or $\overrightarrow{GO} = S(t)\,\vec{u}_y = S_0\cos(\omega t)\,\vec{u}_y$, d'où :

$$\vec{f}_{ie}(M) = m\omega^2 S_0\cos(\omega t)\,\vec{u}_y$$

- Force d'inertie de Coriolis : $\vec{f}_{ic}(M) = \vec{0}$ puisque $\vec{\omega}_{\Re/\Re_0} = \vec{0}$.

d) PFD dans le référentiel non galiléen :

$$m\vec{a}(M)_{\Re} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{f}_{ie}(M) + \vec{f}_{ic}(M)$$

En projection sur $\vec{u}_y$, on obtient :

$$m\ddot{h} = -mg + k(D - h - \ell_0) - \lambda\dot{h} - m\ddot{S}$$

À l'équilibre sans tremblement de terre :

$$0 = -mg + k\left(D - h_{eq} - \ell_0\right)$$

On fait la différence et on pose : $H = h - h_{eq}$. On en déduit :

$$m\ddot{H} = -kH - \lambda\dot{H} + m\omega^2 S_0\cos(\omega t)$$

On pose : $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ et $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{\lambda}{m}$.

L'équation différentielle s'écrit sous forme canonique :

$$\ddot{H} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{H} + \omega_0^2 H = \omega^2 S_0 \cos(\omega t)$$

Q est le facteur de qualité. ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur.
Pour un système très faiblement amorti ($Q \gg 1$), la pseudo-pulsation des oscillations est très proche de la pulsation propre.

2. On note le second membre : $e(t) = \omega^2 S_0 \cos(\omega t)$. La représentation complexe s'écrit :

$$\underline{e} = \omega^2 S_0 \exp(i\omega t)$$

En régime sinusoïdal forcé, on cherche $H(t)$ sous la forme :

$$H(t) = H_m \cos(\omega t + \psi).$$

La représentation complexe s'écrit :

$$\underline{H}(t) = H_m \exp(i(\omega t + \psi))$$

On en déduit alors :

$$-\omega^2 \underline{H} + \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{H} + \omega_0^2 \underline{H} = \omega^2 S_0 \exp(i\omega t)$$

Soit :

$$\underline{H} = \frac{\omega^2 S_0 \exp(i\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{j\omega_0\omega}{Q}}$$

Le graphe donné dans l'énoncé représente $20\log\left|\frac{\underline{H}}{\underline{S}}\right|$ en fonction ω. Pour avoir une réponse uniforme de l'appareil, il faut avoir une courbe la plus plate possible.

On peut choisir $Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ et se placer à une pulsation telle que $\omega \gg \omega_0$. Les périodes vont de 1 à 10 s, ce qui correspond à des pulsations entre 0,63 et 6,3 rad.s^{-1}. Il faut donc avoir $\omega_{\min} \gg \omega_0$, soit

$$\omega_0 \ll 0{,}63\ \mathrm{rad.s^{-1}}$$

Dans ce cas, toutes les composantes spectrales sont amplifiées de la même façon avec un facteur d'amplification égal à 1.
L'inconvénient majeur est que ce facteur d'amplification vaut 1. C'est donc difficile d'enregistrer des vibrations de faibles amplitudes.

Comme $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, il faut donc une masse m élevée pour avoir ω_0 faible.

MC32 – Circonférence en rotation

1. Système : Point matériel M de masse m

Référentiels : $\Re = \left(O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t\right)$ référentiel terrestre galiléen et $\Re' = \left(O'; \vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_z, t\right)$ référentiel lié au cercle non galiléen avec $\vec{\omega}_{\Re'/\Re} = \omega \vec{u}_z$.

Bilan des forces :

- Poids : $\vec{P} = m\vec{g}$
- Réaction du support : $\vec{R}$. Il n'y a pas de frottement, donc $\vec{R} \perp \overrightarrow{\mathrm{d}l'}$, c'est-à-dire

$$\vec{R} \perp \vec{u}_\theta$$

- Force d'inertie d'entraînement : $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 \overrightarrow{HM}$ avec H projeté orthogonal de M sur l'axe Oz. Le point coïncidant avec M à l'instant t a une trajectoire circulaire uniforme de centre H et de vitesse angulaire ω. On a $\overrightarrow{HM} = HM\, \vec{u}_{x'} = (a + a \sin\theta)\, \vec{u}_{x'} = a\,(1 + \sin\theta)\, \vec{u}_{x'}$, d'où :

$$\vec{F}_{ie} = m\omega^2 a\,(1 + \sin\theta)\, \vec{u}_{x'}$$

- Force d'inertie de Coriolis : $\vec{F}_{ic} = -2m\omega \vec{u}_z \wedge \vec{v}_r$. La vitesse relative de M vaut : $\vec{v}_r = a\dot{\theta}\vec{u}_\theta$. On en déduit que $\vec{F}_{ic} \perp \vec{u}_z$ et $\vec{F}_{ic} \perp \vec{u}_\theta$, donc $\vec{F}_{ic} // \vec{u}_{y'}$. On a alors :

$$\vec{F}_{ic} = -2m\omega v_r \cos\theta \vec{u}_{y'}$$

Principe fondamental de la dynamique dans $\Re'$:

$$m\vec{a}' = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$$

Le mouvement relatif de M est circulaire. L'accélération relative est donc :

$$\vec{a}_r = -a\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + a\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$$

La projection du PFD sur $\vec{u}_\theta$ donne :

$$m\left(a\ddot{\theta}\right) = -mg \sin\theta + m\omega^2 a\,(1 + \sin\theta)\cos\theta$$

2. L'énergie potentielle de la force centrifuge vaut :

$$E_{p1} = -\frac{1}{2} m\omega^2 HM^2 + cte = -\frac{1}{2} m\omega^2 x'^2 + cte \text{ avec } x' = a\,(1 + \sin\theta).$$

On choisit $E_{p1}\,(\theta = 0) = -\frac{1}{2}m\omega^2 a^2 + cte = 0$, d'où $cte = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2$.
On a donc $E_{p1} = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 \left(1 - (1 + \sin\theta)^2\right)$, soit :

$$E_{p1} = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2 \left(-2\sin\theta - \sin^2\theta\right)$$

L'énergie potentielle de pesanteur est :

$$E_{p2} = mgz' + cte' = -mga\cos\theta + cte'.$$

On choisit $E_{p2}(\theta = 0) = 0$. D'où :

$$E_{p2} = mga\,(1 - \cos\theta)$$

Il n'y a pas de frottement, donc la réaction du support $\vec{R}$ est orthogonale au petit déplacement : $\delta W = \vec{R} \perp \overrightarrow{\mathrm{d}l'} = 0$ avec $\overrightarrow{\mathrm{d}l'} = a\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta$. La réaction du support ne travaille pas.

La puissance de la force de Coriolis est nulle : $P = \vec{F}_{ic} \cdot \vec{v}_r = -\left(2m\vec{\omega}_{\mathfrak{R}'/\mathfrak{R}} \wedge \vec{v}_r\right) \cdot \vec{v}_r = 0$ puisque la force est orthogonale à la vitesse relative. La force de Coriolis ne travaille pas.

Le poids et la force d'inertie d'entraînement sont des forces conservatives car elles dérivent d'une énergie potentielle.

Le système est donc conservatif. On a conservation de l'énergie mécanique dans le référentiel $\mathfrak{R}'$:

$$E'_m = E'_c + E_{p1} + E_{p2} = cte$$

On a donc :

$$E'_m = \frac{1}{2}m\left(a\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2a^2\left(-2\sin\theta - \sin^2\theta\right) + mga\,(1 - \cos\theta)$$

Soit :

$$\frac{\mathrm{d}E'_m}{\mathrm{d}t} = 0 = ma^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{1}{2}m\omega^2a^2\dot{\theta}\,(-2\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta) + mga\dot{\theta}\,(\sin\theta)$$

Si on divise par $\dot{\theta}$, on obtient :

$$ma^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}m\omega^2a^2\,(-2\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta) + mga\,(\sin\theta) = 0$$

On retrouve bien la même équation différentielle que dans la question 1.

3. Le point M est en équilibre relatif pour $\ddot{\theta} = 0$, soit $a\omega^2\,(1 + \sin\theta) = g\tan\theta$.

On a alors :

$$\omega = \sqrt{\frac{g\tan\theta}{a\,(1 + \sin\theta)}} = 4{,}35\ \mathrm{rad.s^{-1}}$$

MC33 – Pesanteur artificielle

1. Soit :

$$a_e = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

Or :

$$\begin{cases} R\omega^2 = g \\ (R-h)\omega^2 = 0{,}9g = g' \end{cases} \Rightarrow \frac{R-h}{R} = a = 0{,}9$$

$$\Rightarrow R - h = aR \Rightarrow R(1-a) = h$$

$$\Rightarrow R = \frac{h}{1-a} = \frac{1{,}8}{0{,}1} = 18m$$

Et :

$$\omega = \sqrt{\frac{a_e}{R}} = \sqrt{\frac{9{,}8}{18}} = 0{,}738\,\frac{rad}{s} = 7{,}05\ trs/min$$

2. La force de Coriolis intervient quand $v_r \neq 0$.

Ainsi :

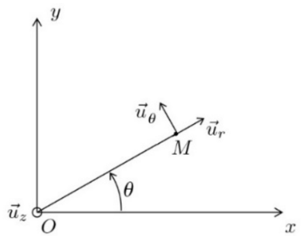
$$\overrightarrow{f_{ic}} = -2m\,\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{v_r} = 2m\Omega v_r\,\vec{u} \text{ où } \begin{cases} \vec{u}\ vers\ l'extérieur\ si\ le\ jogger\ tourne \\ dans\ le\ même\ sens\ que\ la\ roue. \end{cases}$$

3. Le sens est important car dans un cas on se sent allégé, dans l'autre on se sent alourdi.

B – Exercices supplémentaires

MC34 – Bille dans un tube

1.



a) Système : bille de masse m

b) Référentiels : $\Re_0 = \left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, t\right)$ galiléen et $\Re = \left(O; \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k}, t\right)$ non galiléen. Le vecteur rotation instantané de $\Re$ par rapport à $\Re_0$ vaut : $\vec{\omega}_{\Re/\Re_0} = \omega\vec{k}$.

Le mouvement relatif dans $\Re$ s'écrit : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$; $\vec{v}\,(M)_\Re = \dot{r}\,\vec{u}_r$ et $\vec{a}\,(M)_\Re = \ddot{r}\,\vec{u}_r$.

Le vecteur unitaire $\vec{u}_r$ est fixe dans $\Re$. La dérivée par rapport au temps de $r\,\vec{u}_r$ dans $\Re$ donne bien $\dot{r}\,\vec{u}_r$.

c) Bilan des forces :

- Le mouvement se fait sans frottement, la réaction du support est donc orthogonale au petit déplacement de la bille par rapport au tube. La réaction du support a donc une composante nulle sur $\vec{u}_r$. La réaction du support est donc $\vec{R} = R_1\vec{u}_\theta + R_2\vec{k}$
- Le poids de la masse m est : $\vec{P} = m\vec{g}$
- La force d'inertie d'entraînement est : $\vec{f}_{ie}\,(M) = m\omega^2\overrightarrow{OM}$
  car le point coïncidant avec M à un instant t a une trajectoire circulaire uniforme de centre O.
- La force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{f}_{ic}\,(M) = -2m\vec{\omega}_{\Re/\Re_0} \wedge \vec{v}\,(M)_\Re = -2m\omega\dot{r}\,\vec{u}_\theta$$

d) Principe fondamental de la dynamique (PFD) dans le référentiel non galiléen :

$$m\vec{a}\,(M)_\Re = \vec{R} + \vec{P} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$$

La projection dans la base $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k}\right)$ donne :

$$\left|\begin{array}{l} m\ddot{r} = m\omega^2 r \\ 0 = R_1 - 2m\omega\dot{r} \\ 0 = R_2 - mg \end{array}\right.$$

L'équation différentielle du mouvement s'obtient à partir de la première projection du PFD :

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0$$

2. L'équation caractéristique s'écrit : $x^2 - \omega^2 = 0$. On en déduit alors

$$x = \pm\omega$$

La solution de l'équation différentielle s'écrit donc :

$$r = A\exp(\omega t) + B\exp(-\omega t)$$

La dérivée de r par rapport au temps est :

$$\dot{r} = A\omega\exp(\omega t) - B\omega\exp(-\omega t).$$

À $t = 0$, $r(0) = r_0$ et $\dot{r}(0) = v_0$.
On a deux équations pour déterminer les constantes d'intégration A et B :

$$\left| \begin{array}{l} A + B = r_0 \text{ (éq.1)} \\ A\omega - B\omega = v_0 \text{ (éq.2)} \end{array} \right.$$

On fait les combinaisons linéaires suivantes : $(1)\omega + (2)$ et $(1)\omega - (2)$.

On a alors : $\left| \begin{array}{l} 2A\omega = r_0\omega + v_0 \\ 2B\omega = r_0\omega - v_0 \end{array} \right.$. D'où :

$$\left| \begin{array}{l} A = \dfrac{r_0\omega + v_0}{2\omega} \\ B = \dfrac{r_0\omega - v_0}{2\omega} \end{array} \right.$$

La bille quitte le tube pour $r = \ell$. Soit :

$$\frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{v_0}{\omega}\right)\exp(\omega t) + \frac{1}{2}\left(r_0 - \frac{v_0}{\omega}\right)\exp(-\omega t) = \ell$$

On pose : $x = \exp(\omega t)$. En multipliant par $\exp(\omega t)$, on est ramené à une équation du second degré :

$$\frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{v_0}{\omega}\right)x^2 + \frac{1}{2}\left(r_0 - \frac{v_0}{\omega}\right) = \ell\, x$$

La résolution numérique donne : $x = 19{,}95$ et $\tau = 1{,}5$ s.

3. L'équation différentielle s'écrit :

$$m\ddot{r} = m\omega^2 r - k(r - 2r_0)$$

Elle se met sous la forme :

$$\ddot{r} - \left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right)r = 2\frac{kr_0}{m}$$

- Si $\omega \geq \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, le système diverge.
- Si $\omega < \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, on a l'équation d'un oscillateur harmonique.

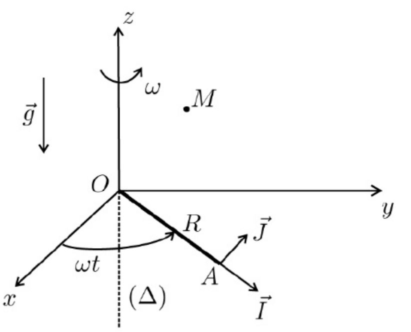
Ces deux résultat sont prévisibles physiquement. Si la constante de raideur est très petite, alors la force d'inertie d'entraînement l'emporte devant la force exercée par le ressort. Comme $\vec{f_{ie}}$ est centrifuge, on prévoit bien un système qui diverge.

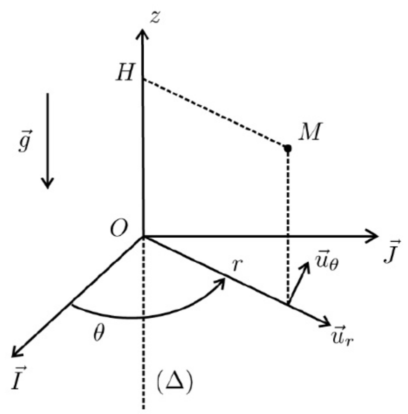
MC35 – Equilibre d'un fluide dans un RNG

1. Soit A un point de la surface extérieure du cylindre situé en $z = 0$. Ce point décrit un cercle de centre O à la vitesse $R\omega\vec{J}$ dans le référentiel $\Re_G = \left(O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t\right)$ autour de l'axe $(\Delta) = (Oz)$.

Système : Particule de fluide de volume $\mathrm{d}\tau$ située au point M.

Référentiels : $\Re_G = \left(O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t\right)$ référentiel terrestre galiléen. $\Re = \left(O; \vec{I}, \vec{J}, \vec{u}_z, t\right)$ référentiel lié au cylindre non galiléen. Le vecteur rotation instantané de $\Re$ par rapport à $\Re_G$ est $\vec{\omega}_{\Re/\Re_G} = \omega\vec{u}_z$. Pour repérer la position de M par rapport au cylindre, on utilise les coordonnées cylindriques. Soit $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$. La vitesse relative et l'accélération relative sont nulles puisque l'eau est en équilibre par rapport au cylindre.





Bilan des forces :

- Poids : $\vec{P} = (\mathrm{dm})\,\vec{g} = -\left(\rho\mathrm{d}\tau\right) g\vec{u}_z$ en appelant ρ la masse volumique de l'eau.
- La résultante des forces de pression qui s'exercent sur les 6 faces du volume $\mathrm{d}\tau$ est $-\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}p\right)\mathrm{d}\tau$.
- Force d'inertie d'entraînement : $\vec{f}_{ie} = (\mathrm{d}m)\,\omega^2\overrightarrow{HM} = (\rho\mathrm{d}\tau)\,\omega^2\overrightarrow{HM}$ puisque le point coïncidant avec M à l'instant t a une trajectoire circulaire uniforme autour de H projeté orthogonal de M sur l'axe Oz. Comme $\overrightarrow{HM} = r\vec{u}_r$, on a $\vec{f}_{ie} = (\rho\mathrm{d}\tau)\,\omega^2 r\vec{u}_r$.
- Force d'inertie de Coriolis : $\vec{f}_{ie} = -2\,(\mathrm{d}m)\,\vec{\omega}_{\Re/\Re_G} \wedge \vec{v}_r\,(M) = \vec{0}$ car la vitesse relative de M est nulle.

Principe fondamental de la dynamique dans le référentiel $\Re$:

La masse M est en équilibre par rapport au cylindre. On a donc :

$$m\vec{a}_r\,(M) = \vec{0} = (\rho\mathrm{d}\tau)\,\vec{g} - \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}p\right)\mathrm{d}\tau + (\rho\mathrm{d}\tau)\,\omega^2 r\vec{u}_r$$

soit :

$$\vec{0} = \rho\vec{g} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}p + \rho\omega^2 r\vec{u}_r$$

On projette cette équation dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$:

$$\left|\begin{aligned} &0 = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho\omega^2 r \\ &0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} \\ &0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \end{aligned}\right.$$

Comme $\dfrac{\partial p}{\partial \theta} = 0$, la pression ne dépend que de r et de z.

La différentielle s'écrit : $\mathrm{d}p = \dfrac{\partial p}{\partial r}\mathrm{d}r + \dfrac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z$.

D'après les équations précédentes, on a : $\mathrm{d}p = \rho\omega^2 r\mathrm{d}r - \rho g\mathrm{d}z$.

On peut intégrer cette équation : $p = \rho\omega^2\dfrac{r^2}{2} - \rho g z + A$ avec A une constante d'intégration.

2. En tout point de la surface libre, la pression de l'eau est égale à la pression atmosphérique : $p = p_0$. On a alors $p_0 = \rho\omega^2\dfrac{r^2}{2} - \rho g z + A$, soit :

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + B$$

avec B une constante. On obtient l'équation d'une parabole.

3. Or il y a conservation du volume donc :

$$V = \pi R^2 h = \int_0^R 2\pi r z dr$$
$$\Leftrightarrow R^2 h = \int_0^R 2r\left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} + B\right)dr$$
$$\Leftrightarrow R^2 h = \int_0^R 2r\left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} + B\right)dr$$
$$\Leftrightarrow R^2 h = \frac{\omega^2}{g}\frac{R^4}{4} + BR^2 \Leftrightarrow B = h - \frac{\omega^2}{g}\frac{R^2}{4}$$
$$Donc : z = h + \frac{\omega^2}{2g}\left(r^2 - \frac{R^2}{2}\right)$$

MC36 – Déviation vers l'est

1) L'équation du mouvement de chute libre est simplement :

$m\vec{a} = m\vec{g} = -mg\vec{e_z}$, donc :

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \frac{dz}{dt} = -gt \quad \text{et} \quad z = h - \frac{1}{2}gt^2.$$

Le temps de chute est :

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad A.N. : \Delta t = 5{,}53 \text{ s}.$$

2) La vitesse maximale est $g\Delta t = \sqrt{2gh} \approx 54{,}2 \text{ m . s}^{-1}$.

Le rapport de la force de Coriolis au poids est au plus de l'ordre de :

$$\frac{2\overrightarrow{\omega_T} \,.\, g\Delta t}{g} \approx 8 \,.\, 10^{-4}.$$

La force de Coriolis est bien un terme correctif (il sera sans doute plus difficile de négliger les frottements de l'air lors de la chute).

Son expression générale est :

$$\overrightarrow{F_{i_c}} = -2m\overrightarrow{\omega_T} \wedge \vec{v}$$
$$= 2m\omega_T[(-\cos\lambda\dot{z} + \sin\lambda\dot{y})\vec{e_x} + (-\sin\lambda\dot{x})\vec{e_y} + (\cos\lambda\dot{x})\vec{e_x}]$$

dont le terme prépondérant est :

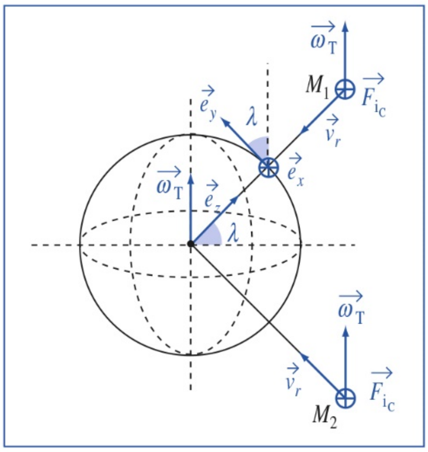
$$\overrightarrow{F_{i_c}}' = -2m\omega_T\cos\lambda\dot{z}\,\vec{e_x}$$

puisque le mouvement principal est vertical.

3) Le mouvement est légèrement perturbé suivant x : $\ddot{x} \approx -2\omega_T\cos\lambda\dot{z}$, où nous pouvons remplacer $\dot{z}$ par son expression approchée $-gt$.

Il vient alors : $\ddot{x} = 2\omega_T\cos\lambda gt$, soit $x = \frac{1}{3}g\omega_T\cos\lambda\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{2}{3}}$ au point de chute.

L'application numérique donne : $x = 2{,}6$ cm au point de chute, ce qui est très inférieur à h.



Chute libre et déviation vers l'est. $\overrightarrow{F_{i_c}}$ *est orientée suivant* $\vec{e_x}$ *(vers l'est) pour les deux points* M_1 *et* M_2 *située dans le plan de la figure.*

$$\overrightarrow{\omega_T} = \omega_T(\vec{e_y}\cos\lambda + \vec{e_z}\sin\lambda).$$

L'expérience a été réalisée historiquement dans un point de mine.

En fait, la valeur expérimentale est légèrement inférieure à la valeur prévue, compte tenu des frottements dans l'air.

À l'ordre deux, en poursuivant la méthode, on constate une très faible déviation vers le sud (terme en ω_T^2 ...).

MC37 – Fusée de Tryphon

1. Le référentiel $\mathscr{R}_F$ lié à la fusée est en translation par rapport au référentiel géocentrique avec une accélération $\vec{a}$. Dans ce référentiel, un passager P de masse m est soumis à l'attraction gravitationnelle de la Terre $\vec{A}_T(P)$, à la réaction $\vec{R}$ du sol de la fusée et à la force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}$.
La loi de la quantité de mouvement appliquée à un passager P de la fusée s'écrit :

$$m\vec{a}(P)_{/\mathscr{R}_F} = \vec{f}_{ie} + \vec{A}_T(P) + \vec{R} = -ma\vec{u}_z - \frac{GmM_T}{(R_T+h)^2}\vec{u}_z + \vec{R}\,.$$

où $\vec{u}_z$ est le vecteur unitaire orienté dans le sens de déplacement de la fusée, de la Terre vers la Lune.
Si les passagers ressentent la même attraction qu'à la surface de la Terre, cette équation s'écrit aussi :

$$m\vec{a}(P)_{/\mathscr{R}_F} = -\frac{GmM_T}{R_T^2}\vec{u}_z + \vec{R}\,,$$

On en déduit :

$$\vec{a} = GM_T\left(\frac{1}{R_T^2} - \frac{1}{(R_T+h)^2}\right)\vec{u}_z\,.$$

On remarque que la relation est valable quelle que soit la masse du passager. Au départ, l'accélération doit être nulle ce qui est normal mais la fusée ne pourrait bien sûr pas décoller ! Pendant le trajet, la relation précédente nous indique que $\vec{a}$ dépend de la distance à la surface de la Terre ; il faut donc sans cesse ajuster la valeur de $\vec{a}$ ce qui semble difficile.

2. En procédant de la même façon, on obtient :

$$\vec{a} = G\left(\frac{M_T}{R_T^2} + \frac{M_L}{(R_L+h)^2}\right)\vec{u}_z\,,$$

où h est l'altitude par rapport à la surface lunaire.

MC38 – Lanceur de ball-trap

1. Soit :

$$m\overrightarrow{a_r} = \vec{P} + \vec{N} + \overrightarrow{f_{ie}} + \overrightarrow{f_{ic}}$$

Dans le plan horizontal on a donc :

$$\begin{cases} m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = f_{ie} = m\omega^2 r \\ m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) = f_{ic} + R_\theta = 0 \end{cases}$$

D'où :

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0$$
$$\Rightarrow r = A\, ch(\omega t) + B\, sh(\omega t)$$

Or à t=0 :

$$\begin{cases} \frac{L}{4} = A \\ 0 = \omega B \end{cases} \Rightarrow r = \frac{L}{4} ch(\omega t)$$

2. Lorsque r=L le pigeon d'argile quitte le bras d'où :

$$L = \frac{L}{4}\, ch(\omega t) \Rightarrow \omega t = Arcosh(4)$$
$$\Rightarrow t = \frac{1}{\omega} Arcosh(4) \sim \frac{2{,}06}{\omega} = 0{,}164 s$$

Si $\omega = 2\ tours.s^{-1} = 4\ Pi\ rad.s^{-1}$

3. Après la perte de contact, si on néglige la rotation sur lui-même du palet, le palet sera soumis principalement au poids, il suivra un mouvement parabolique tel que.

$$m\,\vec{a} = \vec{P} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v_0 t + L \\ z = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

On prend comme origine le point O du bras.

$$\begin{cases} t = \frac{(x - L)}{v_0} \\ z = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x - L}{v_0}\right)^2 \end{cases}$$

MC39 – Le manège « Rotor »

1. C'est la composante tangentielle de la force de frottement « solide » qui va compenser le poids.
- Les vêtements des passages doivent avoir un coefficient de frottement assez élevé avec la paroi du manège : ils ne doivent pas être trop lisses mais bien rugueux.
- La force d'inertie va rappeler le bras vers la paroi. Pour soulever son bras il faudra faire un effort important.

2. Dans le référentiel tournant :

$$\vec{0} = m\,\vec{g} + \vec{R} + \overrightarrow{f_{ie}} \Rightarrow \begin{cases} 0 = -mg + R_T \\ 0 = -R_N + m\omega^2 a \end{cases}$$

Tant que le passager est en équilibre $R_T \leq \mu\, R_N \Leftrightarrow mg \leq \mu\, m\omega^2 a$

$$\Leftrightarrow \omega \geq \omega_c = \sqrt{\frac{g}{\mu a}}$$

3. $A.N:\ \omega_c = \sqrt{\frac{g}{\mu a}} = 2{,}47\ rad\ s^{-1} = \ 0{,}4\ tours\ s^{-1} = 24\ tours\ min^{-1}$