Sujet X-ENS MPI 2026

Réponses aux questions Q01 à Q21

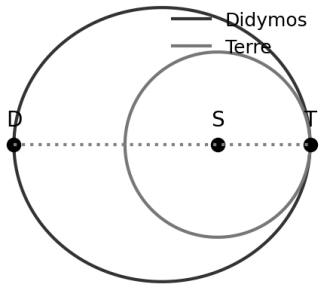
Q01

Le mobile (planète, astéroïde) est soumis à la seule force gravitationnelle du Soleil, qui est une **force centrale**. L'application du théorème du moment cinétique au mobile dans le référentiel héliocentrique assure que **le moment cinétique se conserve**.

Par définition du moment cinétique $\vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$, le vecteur position est perpendiculaire au moment cinétique à tout instant. **Le mouvement a donc lieu dans le plan perpendiculaire au moment cinétique et contenant le centre de force.**

Q02

La figure suivante représente la situation lorsque la Terre et Didymos sont en opposition par rapport au Soleil ; la distance Terre-Didymos est alors maximale.



Il vient alors :

$$DS_{\text{max}} = r_{\text{max}} = DT_{\text{max}} - r_0 \approx DT_{\text{max}} - r_{\text{min}} \quad \text{donc} \quad r_{\text{max}} + r_{\text{min}} \approx DT_{\text{max}}$$

Sur la figure 1, on note $DT_{\text{max}} \approx 3{,}2\, r_0$ et, comme le demi-grand axe de Didymos est donné par $2a = r_{\text{min}} + r_{\text{max}}$, on en déduit :

RESULTAT $a \approx 1{,}6\, r_0$

Q03

La Terre et Didymos étant en rotation autour du Soleil, on applique la troisième loi de Kepler dans sa version historique :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{r_0^3}{T_0^2}$$

RESULTAT $T = T_0 \left(\frac{a}{r_0}\right)^{3/2}$

Application numérique :

$$T = 1 \times 1,6^{3/2} = \sqrt{1,6^3} \approx \sqrt{4}$$

RESULTAT $T \approx 2$ ans

Q04

Partons d'une situation où la Terre et Didymos sont au plus proche autour de l'année 2003 sur la figure 1. Didymos est alors à son périgée ; une année plus tard, la Terre est revenue au même point tandis que Didymos a effectué une demi-révolution et se trouve à son apogée : la distance est alors maximale. Cela apparaît cohérent avec la figure, avec une distance maximale atteinte autour de l'année 2004.

Q05

Dans le cas de l'interaction gravitationnelle avec un centre de force de masse M, on sait que pour un mouvement circulaire de rayon r la vitesse du mobile est donnée par $v^2 = GM/r$. Pour une orbite de rayon r_0 égal à celui de la Terre, la vitesse est nécessairement :

RESULTAT $v_0 = 30\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$

Q06

Avec $\vec{L}_0 = \vec{r} \wedge m\vec{v}$ et $\Delta\vec{v}\ //\ \vec{r}$, **le moment cinétique n'est pas modifié**.

Q07

Avant l'impulsion, l'énergie mécanique est donnée par $E_{m,i} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0}$. À la suite de l'impulsion, il vient :

$$E_{m,f} = \frac{1}{2}m(v_0\vec{e}_\theta + v_1\vec{e}_r)^2 - \frac{GMm}{r_0} = \frac{m}{2}v_0^2 - \frac{GMm}{r_0} + \frac{m}{2}v_1^2 = E_{m,i} + \frac{m}{2}v_1^2$$

En conséquence :

RESULTAT $\Delta E_m = \frac{m}{2}v_1^2$

Pour une trajectoire liée elliptique et une attraction gravitationnelle, on sait que l'énergie mécanique a pour expression $E_m = -\frac{GMm}{2a}$. En conséquence :

$$-\frac{GMm}{2a} = -\frac{GMm}{2r_0} + \frac{mv_1^2}{2} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{r_0} - \frac{v_1^2}{GM} = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0} \times \frac{v_1^2}{GM/r_0} = \frac{1}{r_0}\left(1 - \frac{v_1^2}{v_0^2}\right)$$

Il vient :

RESULTAT $a = \frac{r_0}{1-(v_1/v_0)^2}$

Le demi-grand axe ne varie pas à l'ordre 1 en $|v_1|/v_0$.

Q08

La conservation du moment cinétique permet de définir la constante des aires $C = r^2\dot{\theta} = r_0 v_0$. Il vient alors :

$$E_m = \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right] - \frac{GMm}{r} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{GMm}{r}$$

En conséquence (avec $v_0^2 = GM/r_0$) :

RESULTAT $E_{p,\mathrm{eff}}(r) = \frac{mr_0^2v_0^2}{2r^2} - \frac{GMm}{r} = mv_0^2\left[\frac{r_0^2}{2r^2} - \frac{r_0}{r}\right]$

Q09

La trajectoire circulaire est associée au minimum de l'énergie potentielle effective :

$$E'_{p,\text{eff}}(r) = mv_0^2\left(-\frac{r_0^2}{r^3}+\frac{r_0}{r^2}\right)$$

On note que :

RESULTAT $E'_{p,\text{eff}}(r=r_0)=0$

Q10

L'énergie mécanique étant conservée, sa dérivée temporelle est nulle :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t}=0 \;\Rightarrow\; m\ddot{r}+mv_0^2\left[-\frac{r_0^2}{r^3}+\frac{r_0}{r^2}\right]=0$$

Avec $r(t)=r_0+r_1(t)$, il vient à l'ordre 1 en r_1/r_0 :

$$0=\ddot{r}_1(t)+\frac{v_0^2}{r_0}\left[-\frac{1}{(1+r_1(t)/r_0)^3}+\frac{1}{(1+r_1(t)/r_0)^2}\right]$$
$$\Rightarrow\; 0\approx\ddot{r}_1(t)+\frac{v_0^2}{r_0}\left[-\left(1-3\frac{r_1(t)}{r_0}\right)+\left(1-2\frac{r_1(t)}{r_0}\right)\right]$$

RESULTAT $0=\ddot{r}_1(t)+\left(\frac{v_0}{r_0}\right)^2 r_1(t)$

On obtient l'équation d'un **oscillateur harmonique** de pulsation :

RESULTAT $\omega=\frac{v_0}{r_0}$

La période de cet oscillateur harmonique est donc égale à la période de révolution de la Terre autour du Soleil.

Q11

Avec $r_{\text{min}}=1{,}01\,r_0$, on a bien :

RESULTAT $\frac{r_{\text{min}}-r_0}{r_0}\ll 1$

On se trouve bien dans le cadre de l'approximation $|r_1|/r_0\ll 1$.

Q12

$r_1(t)=r_{10}\cos(\omega t+\varphi)$ avec r_{10} qui doit être choisi tel que l'aphélie de DART r_0+r_{10} soit égal au périhélie de Didymos $r_{\text{min}}=1{,}01\,r_0$; on en déduit donc $r_{10}=0{,}01\,r_0$.

Très généralement, le complément d'énergie fourni à la sonde DART lui permet d'osciller dans le puits harmonique avec une énergie mécanique complémentaire d'expression $E'_m=\frac{1}{2}m\dot{r}_1^2+\frac{1}{2}m\omega^2 r_1^2$. À son aphélie, $\dot{r}_1=0$: le complément d'énergie est entièrement sous forme d'énergie potentielle. En conséquence :

$$\frac{1}{2}m\omega^2 r_{10}^2=\frac{m}{2}v_1^2 \;\Rightarrow\; r_{10}^2=\frac{v_1^2}{\omega^2}$$

RESULTAT $r_{10}=\frac{r_0\,|v_1|}{v_0}$

Avec $r_{10}=0{,}01\,r_0$, on en déduit :

RESULTAT $|v_1|=0{,}01\,v_0$ soit $v_1=0{,}3\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$

Q13

La trajectoire de DART est la combinaison du mouvement circulaire de rotation auquel on ajoute une oscillation radiale de même période (cf. Q10). **La période de révolution de DART est donc celle de la Terre, en accord avec le fait que le demi-grand axe n'est pas modifié au premier ordre en $|v_1|/v_0$.**

Q14

Comme $r_1(t)$ est une fonction sinusoïdale avec $r_1(t=0)=0$, on a nécessairement $r_1(t)=r_{10}\sin(\omega t)$ ou $r_1(t)=-r_{10}\sin(\omega t)$.

En $t=3T/4$: $\omega t=\frac{2\pi}{T}\times\frac{3T}{4}=\frac{3\pi}{2}$. Afin d'obtenir un maximum à cet instant, il faut retenir la solution :

RESULTAT $r_1(t)=-r_{10}\sin(\omega t)$

En particulier :

RESULTAT $\dot{r}_1(t=0)=-\omega r_{10}<0$

ce qui nécessite une **impulsion initiale en direction du Soleil**.

Q15

$\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}-B\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t}=-\frac{GM}{r^2}\vec{e}_r+B\dot{\theta}\vec{e}_r$. Pour assurer $\vec{T}=\overrightarrow{\text{cste}}$, cela impose (avec $L=mr^2\dot{\theta}$ la norme du moment cinétique) :

$$B=\frac{GM}{r^2\dot{\theta}}$$

RESULTAT $B=\frac{GMm}{L}$

Q16

Pour un mouvement circulaire, la vitesse est orthoradiale et $v_0^2=\frac{GM}{r_0}$. En conséquence :

$$B=\frac{GMm}{mr_0v_0}=\frac{GM}{r_0}\times\frac{1}{v_0}=\frac{v_0^2}{v_0}$$

RESULTAT $B=v_0$

$$\vec{T}=v_0\vec{e}_\theta-v_0\vec{e}_\theta$$

RESULTAT $\vec{T}=\vec{0}$

Q17

Le vecteur $\vec{T}$ étant une constante du mouvement, plaçons-nous au périhélie pour le déterminer.

En ce point P, le vecteur vitesse et le vecteur unitaire orthoradial sont perpendiculaires à l'axe principal de l'ellipse, donc **$\vec{T}$ est dans le plan de la trajectoire et perpendiculaire à l'axe principal de l'ellipse**.

D'une part :

$$B=\frac{GMm}{L}=\frac{GMm}{mr_pv_p}=\frac{GM}{r_pv_p}$$

En exprimant l'énergie mécanique au périhélie, il vient :

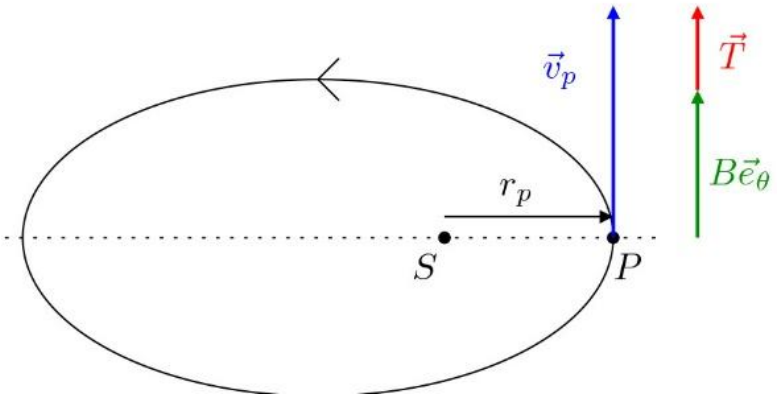
$$\frac{m}{2}v_p^2 - \frac{GMm}{r_p} = -\frac{GMm}{2a} = -\frac{GMm}{r_a + r_p} \Rightarrow v_p^2 = \frac{2GM}{r_p}\left[1 - \frac{1}{1 + r_a/r_p}\right]$$

$$\Rightarrow v_p = 2\frac{GM}{r_p v_p}\left[1 - \frac{1}{1 + r_a/r_p}\right] \Rightarrow v_p = 2\left[1 - \frac{1}{1 + r_a/r_p}\right]B$$

Comme $r_a \geq r_p$, le terme entre crochets est toujours inférieur à 1/2, donc :

RESULTAT $v_p \geq B$

le cas d'égalité étant obtenu pour la trajectoire circulaire, comme on l'a montré à la question Q16. On en déduit ainsi le sens du vecteur $\vec{T}$ et le schéma demandé :



Q18

On sait que $B = \frac{GMm}{L}$. Par ailleurs, le moment cinétique est conservé lors de la manœuvre modifiant la trajectoire de DART ; il est donc celui de la trajectoire circulaire. En conséquence (cf. Q16) :

RESULTAT $B = v_0$

Avec un complément de vitesse par rapport au mouvement circulaire $\Delta\vec{v} = -|v_1|\vec{e}_r$, il vient :

$$\vec{T} = v_0\vec{e}_\theta - |v_1|\vec{e}_r - v_0\vec{e}_\theta$$

RESULTAT $\| \vec{T} \| = |v_1|$

Q19

À l'aphélie et au périhélie, le vecteur vitesse est purement orthoradial et les trois vecteurs $\vec{v}$, $\vec{T}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires. D'après la figure ci-dessus, il vient :

RESULTAT $v_p = v_0 + |v_1|$ et $v_a = v_0 - |v_1|$

Q20

La constante des aires est la même au périhélie et à l'aphélie :

$$r_p(v_0 + |v_1|) = r_a(v_0 - |v_1|)$$

En utilisant $r_p + r_a = 2a$, puis le demi-grand axe obtenu à la question Q7, on trouve :

$$r_a = a(1 + \varepsilon) \quad \text{avec} \quad \varepsilon = |v_1|/v_0$$

$$r_a = r_0(1 + \varepsilon)/(1 - \varepsilon^2) = r_0/(1 - \varepsilon)$$

De même, le rayon au périhélie est $r_p = r_0/(1+\varepsilon)$. Ces deux expressions sont cohérentes avec la conservation du moment cinétique : $r_p v_p = r_a v_a = r_0 v_0$.

Q21

Au premier ordre en ε, $(1-\varepsilon)^{-1} = 1 + \varepsilon + O(\varepsilon^2)$.

$$r_a = r_0(1+\varepsilon) + O(r_0\varepsilon^2)$$

$$r_a - r_0 \simeq r_0|v_1|/v_0 = r_{10}$$

On retrouve l'amplitude de la petite oscillation radiale calculée à la question Q12. L'accord entre le calcul géométrique exact et la dynamique linéarisée confirme la cohérence de l'approximation.