Partie III – Le pendule de Foucault (ENS – 2022 – PC)

Partie III : Pendule de Foucault

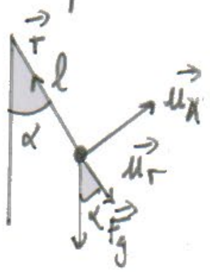
Q1) Comparons $\vec{F_{ie}}$ et $\vec{F_g}$:

$$\begin{cases} \vec{F_g} = -\,G m M_T / R_T^2 \, \vec{e_z} \\ \vec{F_{ie}} = m\Omega^2 \vec{HM} = m\Omega^2 R_T \cos\lambda \, \vec{u} = m\Omega^2 R_T \cos\lambda \left(\cos\lambda \, \vec{u_z} - \sin\lambda \, \vec{u_y}\right) \end{cases}$$

D'où $\left(\dfrac{F_{ie}}{F_g}\right)_{max} = \dfrac{\Omega^2 R_T^3}{G M_T} = 3{,}5.10^{-3}$

$\Rightarrow$ $F_{ie} \ll F_g$ et donc $\vec{F_g} = -mg\,\vec{u_z}$

Q2) Dans cette partie on néglige $\vec{F_{ie}}$ d'où : $m\vec{a} = \vec{F_g} + \vec{T}$



$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} -m\ell\dot{\alpha}^2 = mg\cos\alpha - T \\ m\ell\ddot{\alpha} = -mg\sin\alpha \end{cases}}$$

Q3) Si $\alpha \ll 1$ alors $\sin\alpha \ll 1$ d'où $\boxed{\ddot{\alpha} + g/\ell \, \alpha = 0}$

$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{g/\ell}$ et $\boxed{T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}} = 15\,s$

$= 0{,}38$ rad/s

Q4) Sur l'axe Oz : $\Delta z = \ell - \ell\cos\alpha$

— Ox : $\Delta x = \ell\sin\alpha$

Si $\alpha \ll 1$: $\begin{cases} \Delta z \sim 0 + O(\alpha^2) \\ \Delta x \sim \ell\alpha + O(\alpha^3) \end{cases}$ $\Rightarrow$ le mouvement est horizontal

Q5) Soit $\begin{cases} \Omega = \dfrac{2\pi}{T_T} = 7{,}3.10^{-5}\ \text{rad.s}^{-1} \\ \omega_0 = \sqrt{g/\ell} = 0{,}38\ \text{rad.s}^{-1} \end{cases}$ $\Rightarrow \boxed{\Omega \ll \omega_0}$

Q6) D'après la figure 1 : $\vec{e_3} = \cos\lambda\, \vec{e_y} + \sin\lambda\, \vec{e_z}$

or $\vec{F_{ic}} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$

$$= -2m\Omega \begin{vmatrix} 0 \\ \cos\lambda \\ \sin\lambda \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} = 0 \end{vmatrix}$$ (plan xOy le mvt)

$$= -2m\Omega \begin{vmatrix} -\dot{y}\sin\lambda \\ \dot{x}\sin\lambda \\ -\dot{x}\cos\lambda \end{vmatrix}$$

Or $m\vec{a_r} = \vec{F_{ic}} + \vec{F}$

$$\Leftrightarrow m \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +\dot{y}\sin\lambda \\ -\dot{x}\sin\lambda \end{vmatrix} . 2m\Omega + \begin{vmatrix} -m\omega_0^2 x \\ -m\omega_0^2 y \end{vmatrix}$$

D'où $\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\Omega\sin\lambda\, \dot{y} \quad (1) \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = -2\Omega\sin\lambda\, \dot{x} \quad (2) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\Omega\sin\lambda = \tilde{\Omega}}$

Q7) On pose $\underline{u} = x + iy$ donc (1)+i(2) donne :

$$\ddot{\underline{u}} + \omega_0^2 \underline{u} = 2\tilde{\Omega}(\dot{y} - i\dot{x})$$
$$= 2i\tilde{\Omega}(-\dot{\underline{u}})$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\underline{u}} + 2i\tilde{\Omega}\dot{\underline{u}} + \omega_0^2 \underline{u} = 0}$$

Polynôme caractéristique : $r^2 + 2i\tilde{\Omega} r + \omega_0^2 = 0$

$$\Rightarrow r_\pm = \frac{-2i\tilde{\Omega} \pm i\sqrt{4\tilde{\Omega}^2 + 4\omega_0^2}}{2}$$ car $\Delta < 0$

$$\Rightarrow \boxed{r_\pm = i\left[\pm\sqrt{\tilde{\Omega}^2 + \omega_0^2} - \tilde{\Omega}\right]}$$

D'où $\boxed{\underline{u}(t) = \underline{A}e^{r_+ t} + \underline{B}e^{r_- t}}$

Q8) Soit $\underline{u} = x + iy$ d'où $\begin{cases} \underline{u}(0) = x_0 \\ \dot{\underline{u}}(0) = 0. \end{cases}$

d'où $\begin{cases} A + B = x_0 \\ r_+ A + r_- B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -r_+ A / r_- \\ A\left(1 - \frac{r_+}{r_-}\right) = x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{x_0 r_-}{r_- - r_+} \\ B = -\frac{x_0 r_+}{r_- - r_+} \end{cases}$

Donc $\underline{u} = x_0 \frac{r_- e^{r_+ t} - r_+ e^{r_- t}}{r_- - r_+}$ où $\boxed{\begin{cases} r_- = i\left(-\tilde{\Omega} - \sqrt{\tilde{\Omega}^2 + \omega_0^2}\right) \\ r_+ = i\left(-\tilde{\Omega} + \sqrt{\tilde{\Omega}^2 + \omega_0^2}\right) \\ r_- - r_+ = -i2\sqrt{\tilde{\Omega}^2 + \omega_0^2} \end{cases}}$

Q9) Or $\tilde{\Omega} \ll \omega_0 \Rightarrow \begin{cases} r_\pm = i\left(-\tilde{\Omega} \pm \omega_0\right) \\ r_- - r_+ = -2i\omega_0 \end{cases}$

d'où $\underline{u} = x_0 \cdot i \frac{(-\tilde{\Omega} - \omega_0) e^{i(-\tilde{\Omega} + \omega_0)t} - (-\tilde{\Omega} + \omega_0) e^{i(-\tilde{\Omega} - \omega_0)t}}{-2i\omega_0}$

$\Rightarrow \underline{u} \sim x_0 e^{-i\tilde{\Omega}t} \frac{(-\omega_0)}{-2\omega_0} \left[e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right]$

$\Rightarrow \underline{u} \sim \frac{x_0}{2} e^{-i\tilde{\Omega}t} \left[i \times 2 \cos(\omega_0 t)\right]$

$\Rightarrow \boxed{\underline{u} = x_0 \cos(\omega_0 t) e^{-i\tilde{\Omega}t}}$

d'où $\begin{cases} x = x_0 \cos(\omega_0 t) \cos(\tilde{\Omega} t) \\ y = -x_0 \cos(\omega_0 t) \sin(\tilde{\Omega} t) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OM} = x_0 \cos(\omega_0 t) \underbrace{\left[\cos(\tilde{\Omega} t) \vec{e_x} - \sin(\tilde{\Omega} t) \vec{e_y}\right]}_{\vec{t}}}$

Le vecteur $\vec{t}$ tourne à la vitesse angulaire $\tilde{\Omega}$ par rapport à $\vec{u_z}$. Le pendule oscille donc à la pulsation $\omega_0 \gg \tilde{\Omega}$ dans le sens indirect autour de $\vec{u_z}$ à la vitesse angulaire $\tilde{\Omega}$.

(Remarque Q10, aide à répondre à Q9)

Q10) $\Rightarrow \psi = -\Omega'' T$

$= -\Omega \sin\lambda . T$

$= -2\pi \sin\lambda$

$= -2\pi \sin(49°)$

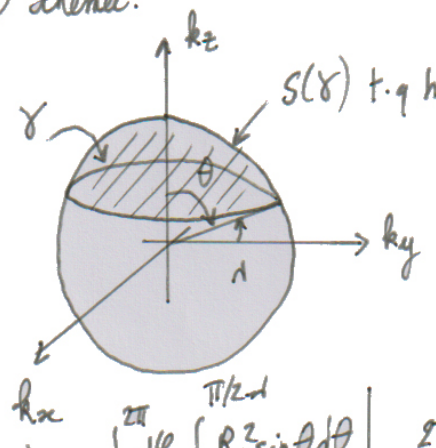
$= \underline{\underline{-272°}}$

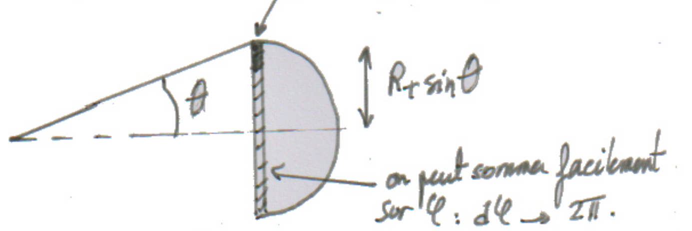
Pour qu'il revienne 24h après à sa position initiale il faut $\psi = 360°$
$\Rightarrow \underline{\underline{\lambda = 0°}}$ (équateur)

Q11) Le but d'avoir une grande longueur l et une forte masse m est de pouvoir minimiser (négliger) les frottements sur l'axe et dans l'air afin que le pendule n'arrête pas d'osciller trop tôt afin d'observer le phénomène

Q12) Avec un pendule si petit, les frottements vont devenir trop importants (inertie trop faible)
$\Rightarrow$ le pendule va trop vite s'arrêter et M. Tournesol ne pourra pas se diriger sur terre avec son pendule.

Q13) Schéma :





On somme de $\theta = 0$ à $\pi/2 - \lambda$, $\varphi = 0$ à 2π

$$\Rightarrow S(\gamma) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2-\lambda} R_T^2 \sin\theta \, d\theta = 2\pi R_T^2 \left[\cos 0 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)\right]$$

$$\Rightarrow h(\gamma) = \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2-\lambda} R_T^2 \sin\theta \, d\theta}{4\pi R_T^2} = \frac{2\pi R_T^2 (1-\sin\lambda)}{4\pi R_T^2} = \frac{1-\sin\lambda}{2} = \frac{X}{4\pi} \Rightarrow \boxed{X = 2\pi(1-\sin\lambda)}$$

$$\text{Or } X = \phi + 2\pi \Rightarrow \phi = -2\pi \sin\lambda = \psi$$ (on retrouve le m̂ résultat)