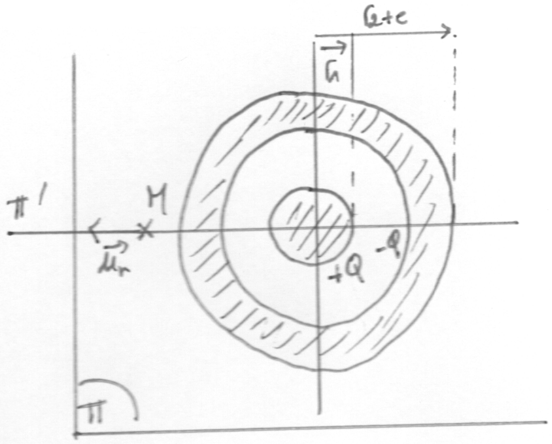
Câble coaxial (Banque PT – 2008)

I.1)



. (π) et (π') sont plans de symétrie donc $\vec{E} = E\vec{u_r}$

. Il y a invariance par $T(z)$ et $R(\theta)$ d'où $\vec{E} = \vec{E}(r)$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = E(r)\vec{u_r}}$

I.2.a) Nous avons affaire à une distribution surfacique, si on prend comme surface de Gauss un cylindre de rayon r et de hauteur l on a :

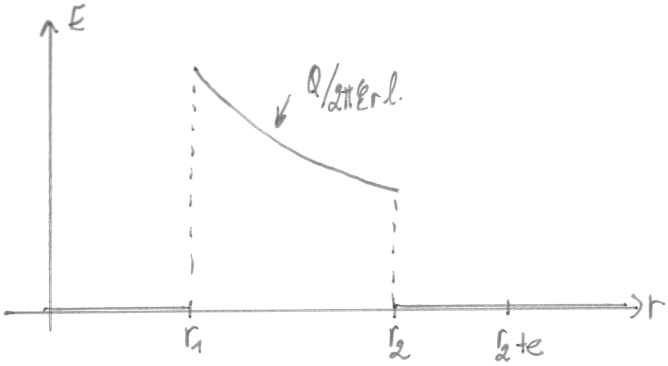
$$\oiint_{\Sigma_g} \vec{E}.d\vec{S} = q_{int}/\varepsilon \iff E.2\pi r l = \frac{q_{int}}{\varepsilon}$$

Donc :

$$\boxed{\begin{cases} \text{si } r<r_1 : q_{int}=0 \Rightarrow \vec{E}(r<r_1)=\vec{0} \\ \text{si } r_1<r<r_2 : q_{int}=Q \Rightarrow \vec{E}(r_1<r<r_2) = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon r l}\vec{u_r} \\ \text{si } r_2<r<r_2+e : q_{int}=Q-Q=0 \Rightarrow \vec{E}(r_2<r<r_2+e)=\vec{0} \end{cases}}$$

I.2.b) De m̂ pour $r>r_2+e$, $q_{int}=Q-Q=0 \Rightarrow \boxed{\vec{E}(r>r_2+e)=\vec{0}}$

I.3.a)



I.3.b) On a discontinuité de $E(r)$ car on traverse des densités surfaciques :

- en r_1 : $\vec{E}(r_1^+) - \vec{E}(r_1^-) = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon l r_1}\vec{u}_r = \dfrac{\sigma_1 \times 2\pi r_1 l}{2\pi\varepsilon l r_1}$

$$\Leftrightarrow \Delta\vec{E} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon}\vec{u}_r$$

- en r_2 : $\vec{E}(r_2^+) - \vec{E}(r_2^-) = \dfrac{-Q}{2\pi\varepsilon l r_2}\vec{u}_r \Rightarrow \Delta\vec{E} = \dfrac{-\sigma_2}{\varepsilon}\vec{u}_r$

I.4) Soit $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ d'où $dV = -E\,dr$

$$\Rightarrow V_1 - V_2 = -\int_{r_2}^{r_1} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_r l}\,dr$$

$$\Rightarrow \boxed{V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

I.5) Soit $Q = CU_{12} \Rightarrow C = \dfrac{2\pi\varepsilon l}{\ln(r_2/r_1)}$

D'où par unité de longueur : $\boxed{C_1 = \dfrac{2\pi\varepsilon}{\ln(r_2/r_1)}}$

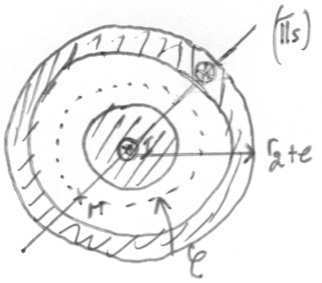
I.6) Soit $W_e = \dfrac{1}{2}CU_{12}^2 = \dfrac{2\pi\varepsilon l}{\ln(r_2/r_1)} \cdot \left(\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon l}\right)^2 \left(\ln\dfrac{r_2}{r_1}\right)^2$

$$\Leftrightarrow \boxed{W_e = \frac{Q^2}{2\pi\varepsilon l}\ln(r_2/r_1)}$$

I.7) On a $\underline{\underline{C_1 = 92,4\,\text{pF.m}^{-1}}}$

I.8) Et : $W_e = \dfrac{1}{2}C_1 l U_{12}^2 = \underline{\underline{4,62\,10^{-9}\,\text{J}}}$

2.1)



. (Π_s) est plan de symétrie donc $\vec{B} = B\vec{u_\theta}$.

. Il y a invariance par $R(\theta)$ et $T(z)$ d'où $B = B(r)$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = B(r)\vec{u_\theta}}$$

2.2) Théorème d'Ampère appliqué à un cercle de rayon r :

$$B(r) \times 2\pi r = \mu_0 I_{int}$$

• Si $r < r_1$: $I_{int} = I\left(\frac{r}{r_1}\right)^2$ car $\begin{cases} I = j_1 \pi r_1^2 \\ I_{int} = j_1 \pi r^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(r<r_1) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi r_1^2}\vec{u_\theta}}$$

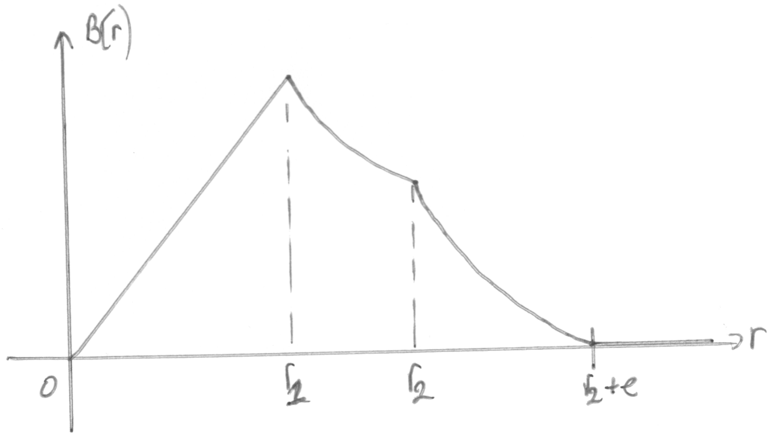
• Si $r_1 < r < r_2$: $I_{int} = I \Rightarrow \vec{B}(r_1<r<r_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u_\theta}$

• Si $r_2 < r < r_2+e$: $I_{int} = I - I\left(\frac{r^2 - r_2^2}{(r_2+e)^2 - r_2^2}\right)$ car $\begin{cases} I = j\pi\left[(r_2+e)^2 - r_2^2\right] \\ I_{int} = j\pi\left(r^2 - r_2^2\right) \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left[1 - \frac{r^2 - r_2^2}{(r_2+e)^2 - r_2^2}\right]\vec{u_\theta}}$$

. Si $r > r_2$: $I_{int} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{B}(r>r_2) = \vec{0}}$

2.3.a)



2.3.b) Pas de discontinuité car distribution volumique, où le résultat était prévisible

2.4.a) On a $w_m = \dfrac{dW_m}{d\tau} = \dfrac{B^2}{2\mu_0}$

2.4.b) Donc $W_m = \iiint \left(\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)^2 \dfrac{d\tau}{2\mu_0}$

$$\Leftrightarrow W_m = \frac{2\pi l}{2\mu_0} \cdot \frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2} \ln\left(r_2/r_1\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{W_m = \frac{l \mu_0 I^2}{4\pi} \ln\left(r_2/r_1\right)}$$

2.5) Or $W_m = \dfrac{1}{2} L I^2$

$$\Rightarrow \boxed{L_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(r_2/r_1\right)}$$

2.6) $\Rightarrow \underline{\underline{L_1 = 2{,}41.10^{-7} H.m^{-1}}}$

2.7) Et $W_m = \dfrac{1}{2} L_1 l I^2 = \underline{\underline{1{,}21.10^{-8} J}}$

3.1) On sait pour un conducteur ohmique que $R = \dfrac{l}{\gamma S}$ d'où ici en série :

$$\boxed{R_1 = \frac{1}{\gamma \pi r_1^2} + \frac{1}{\gamma \pi (r_3^2 - r_2^2)}}$$

3.2) Donc $\underline{\underline{R_1 = 2{,}9.10^{-3} \Omega m^{-1}}}$

3.3) On a $E_G = (R_u + R_1 l) I$ avec $R_1 l \ll R_u$.

$$\Rightarrow \underline{\underline{E_G = 10 V}}$$