Des objets astronomiques, de Mars à Sirius (Mines–Ponts 2024 /MPI)

I-A) Les lois de Képler et l'u.a

Q1) . On peut considérer A comme fixe si $\boxed{m_A \gg m_P}$ (sinon on traite le problème à 2 corps)

. Force gravitationnelle de A sur P : $\boxed{\vec{F}_{A\to P} = -\dfrac{G m_A m_P}{r^2}\vec{u}_r}$

Q2) Si A devient sphérique, on peut ramener toute la masse au centre A et les formules restent inchangées.

Justification : théorème de Gauss

. Symétrie sphérique

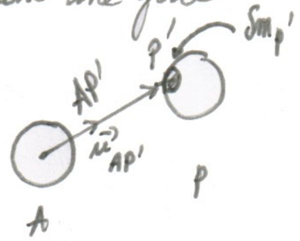
. Surface de Gauss : sphère de rayon $r > R_A$

d'où $\oiint \vec{g}_A \cdot \vec{dS} = -4\pi G m_{int} \Leftrightarrow 4\pi r^2 g_A = -4\pi G M_A \Rightarrow \vec{g}_A = -\dfrac{G m_A}{r^2}\vec{u}_r$

d'où $\vec{F}_{A\to P} = -\dfrac{G m_A m_P}{r^2}\vec{u}_r$

Q3) Chaque point de P va subir un champ de gravitation différent et donc une force différente. Ainsi on peut écrire :

$$\vec{F}_{A\to P} = -G m_A \iiint_{P' \in \text{Astre } P} \delta m_{P'} \frac{\vec{u}_{AP'}}{AP'^2}$$



Q4) TMC appliqué à P dans R galiléen par rapport à A fixe :

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{AP}\wedge\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_A = \vec{cste}$$

or $\vec{L}_A \cdot \vec{AP} = (\vec{AP}\wedge m\vec{v})\cdot\vec{AP} = 0$ d'où $\vec{L}_A \perp \vec{AP}$

$\Rightarrow$ le mvt est plan dans un plan orthogonal à $\vec{L}_A$.

En coordonnées cylindriques. $\vec{L}_A = \vec{AP}\wedge m_P\vec{v}(P)$
$= m_P r^2\dot{\theta}\,\vec{u}_z = m_P C\vec{u}_z$ d'où $\boxed{C = r^2\dot{\theta} = cste}$

Q5) Calculons $\dfrac{d\vec{v}}{d\theta}$:

* $\dfrac{d\vec{v}}{d\theta} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}\cdot\dfrac{dt}{d\theta} = \vec{a}\cdot\dfrac{1}{\dot\theta} = \dfrac{\vec{F}}{m_P\,\dot\theta} = -\dfrac{Gm_A}{r^2\dot\theta}\,\vec{u}_r = -\dfrac{Gm_A}{C}\,\vec{u}_r$

or $\vec{u}_r = -\dfrac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} \Rightarrow \dfrac{d\vec{v}}{d\theta} = \dfrac{Gm_A}{C}\,\dfrac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}$

d'où $\vec{v} = \dfrac{Gm_A}{C}\,\vec{u}_\theta + \overrightarrow{cste}$

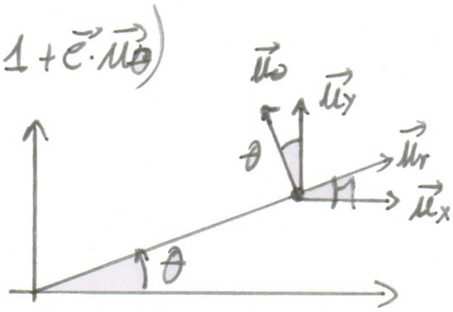
or $\vec{v}(\theta) = C\,\dfrac{\vec{u}_\theta + \vec{e}}{p}$ donc : $\begin{cases} \dfrac{Gm_A}{C} = \dfrac{C}{p} \\ \dfrac{C}{p}\,\vec{e} = cste \end{cases} \Rightarrow p = \dfrac{C^2}{Gm_A}$

* $\vec{e}$ a la m̂ dimension que $\vec{u}_\theta$: il est donc sans dimension
* $\vec{e} = \dfrac{p\,\vec{v}(\theta)}{C} - \vec{u}_\theta$. les deux entités appartiennent à (Axy) donc $\vec{e}$ appartient à (Axy).

Q6) * Or $r\dot\theta = \vec{v}\cdot\vec{u}_\theta = \dfrac{C}{p}(\vec{u}_\theta + \vec{e})\cdot\vec{u}_\theta = \dfrac{C}{p}(1 + \vec{e}\cdot\vec{u}_\theta)$

$= \dfrac{C}{p}(1 + e\,\vec{u}_y\cdot\vec{u}_\theta)$

$\Leftrightarrow \boxed{r\dot\theta = \dfrac{C}{p}(1 + e\cos\theta)}$



* Et $\dot r = \vec{v}\cdot\vec{u}_r = \dfrac{C}{p}(\vec{u}_\theta + e\vec{u}_y)\,\vec{u}_r = \boxed{\dfrac{Ce}{p}\sin\theta = \dot r}$

* On a démontré : $\begin{cases} r^2\dot\theta = C \\ \text{et} \\ r\dot\theta = \dfrac{C}{p}(1+e\cos\theta) \end{cases}$ d'où $r = \dfrac{C}{\dfrac{C}{p}(1+e\cos\theta)}$

D'où $\boxed{r = \dfrac{p}{1+e\cos\theta}}$

Donc si $0 \leq e < 1$ alors : $\frac{p}{1+e} < r < \frac{p}{1-e}$: mouvement borné

Dans ce cas on a affaire à un mouvement elliptique.

I.B Période du mouvement

Q7) Loi des aires : $C = r^2\dot\theta = r^2 \frac{d\theta}{dt} \Leftrightarrow dt = \frac{r^2}{C} d\theta$.

$$\Leftrightarrow T = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{C} d\theta \qquad (\text{Attention } r = r(\theta))$$

$$\text{d'où } T = \int_0^{2\pi} \frac{p^2}{(1+e\cos\theta)^2 C} \cdot d\theta = \frac{p^2}{C} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

$$= \frac{p^2}{C} \mathcal{L} \text{ où } \mathcal{L} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

$$\text{or } p = \frac{C^2}{Gm_A} \Rightarrow C = \sqrt{pGm_A}$$

$$\text{d'où } T = \frac{p^2}{\sqrt{p}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Gm_A}} \cdot \mathcal{L} \Leftrightarrow \boxed{T = \frac{\mathcal{L}\, p^{3/2}}{\sqrt{Gm_A}}}$$

Q8) Si $e = 0$: $\begin{cases} r_{min} = \frac{p}{1+e} = p \\ r_{max} = \frac{p}{1-e} = p \end{cases} \Rightarrow r_{min} = r_{max} \Rightarrow$ traj. circulaire

$$\text{et } T = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{Gm_A}} \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \frac{p^{3/2}}{\sqrt{Gm_A}} = 2\pi \frac{r^{3/2}}{\sqrt{Gm_A}} \text{ car } r = p.$$

$$\text{d'où } \boxed{\frac{r^3}{T^2} = \frac{Gm_A}{4\pi^2}}$$

Enoncé historique : " Le carré de la période sur le cube du demi-grand axe de l'ellipse est une constante indépendante de la masse de la planète pour toutes les planètes du système solaire "

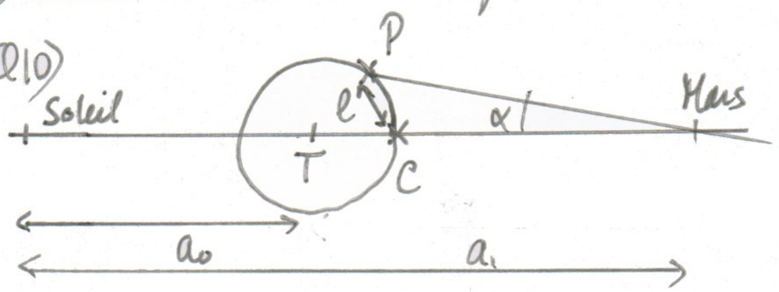
Q9)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.integrate

e = np.linspace(0,0.5,10)   # On prépare les valeurs de calcul de 𝓛
T = []     # on crée notre liste
def function(theta):
    y = 1/(1+x*np.cos(theta))**2
    return y.
for x in e:
    res, err = scipy.integrate.quad(fonction, 0, 2np.pi)  # dans res on récupère nos valeurs.
    T.append(res)
plt.figure()
plt.plot(e,T,'o')
plt.xlabel('paramètre e')
plt.ylabel('intégrale')
plt.show()
```

I.C Mesure de l'unité astronomique

Q10)



Q11) 3ème loi de Kepler : $\frac{T_0^2}{a_0^3} = \frac{T_1^2}{a_1^3} \Rightarrow a_0^3 = a_1^3 . (T_0/T_1)^2$

Or $\tan\alpha \sim \frac{\ell}{PM} \Rightarrow \alpha \sim \frac{\ell}{a_1 - a_0}$ (vraie car α est petit et $R_T \ll a_0$)

Donc $a_1 - a_0 \sim \ell/\alpha \iff a_1 \sim a_0 + \ell/\alpha$

$$\text{d'où : } a_0^3 = \left(a_0 + \frac{\ell}{\alpha}\right)^3 \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^2$$

$$\iff a_0 = \left(a_0 + \frac{\ell}{\alpha}\right)\left(T_0/T_1\right)^{2/3}$$

$$\iff a_0\left(1 - \left(T_0/T_1\right)^{2/3}\right) = \ell/\alpha \left(T_0/T_1\right)^{2/3}$$

$$\iff \boxed{a_0 = \frac{(\ell/\alpha).\left(T_0/T_1\right)^{2/3}}{1-\left(T_0/T_1\right)^{2/3}}}$$

Q12) Avec les données numériques de l'énoncé :

$$a_0 = \frac{\left(7070.10^3/(14\times 4{,}85.10^{-6})\right).\left(365/687\right)^{2/3}}{1-\left(365/687\right)^{2/3}}$$

$$= \underline{1{,}9.10^{11}\,m}$$

On vérifie l'ordre de grandeur de $1{,}5.10^{11}$ m

Q13) . Soit $\delta W_g = \vec{F}_{op}.\vec{dOM} = -\vec{F}_g.\vec{dOM}$ car $\vec{F}_{op} + \vec{F}_g = \vec{0}$

$$= -F_g.\vec{u_r}.(dr\,\vec{u_r} + \dots) = -F_g.dr$$

Vu que $F_g < 0$ et $dr < 0$, on a donc $\delta W_g < 0 \Rightarrow \boxed{W_g < 0}$

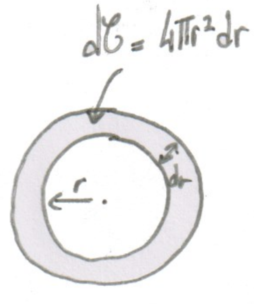
. Cette force permet de rendre cohérent (consistant) la sphère de rayon R. Ainsi il faudra fournir l'énergie opposée pour "casser" la structure d'où :

$$E_\ell = -W_g = \text{énergie de liaison.}$$

Q14) . Masse volumique : $\rho = \dfrac{M}{4/3\pi R^3} = \dfrac{3M}{4\pi R^3}$

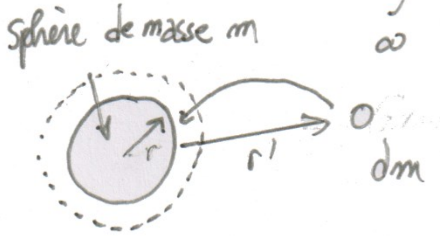
. masse $m(r)$: $m(r) = \rho.\,4/3\,\pi r^3 = \dfrac{4\rho\pi r^3}{3}$

. Et la masse dm : $dm = \rho.\,4\pi r^2 dr$



Q15) C'est un calcul classique que l'on retrouvera dans EM5 :

$$dW_g = +\int_{\infty}^{r} \vec{F}_{op}\cdot\vec{dOM} = \int_{\infty}^{r} -\vec{F}_g\cdot\vec{dOM}$$



variable muette

$$\Rightarrow dW_g = +G\int_{\infty}^{r}\frac{m\,dm}{r'^2}\,dr' = -G\left[\frac{m\,dm}{r'}\right]_{\infty}^{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{dW_g = -\frac{Gm\,dm}{r}}$$

Il reste à intégrer de 0 à R pour que la sphère se forme totalement :

$$W_g = \int_0^R -\frac{Gm\,dm}{r} = -\int_0^R G.\frac{\rho 4\pi r^3}{3r}\cdot\rho 4\pi r^2\,dr$$

$$= -\int_0^R G.\frac{16\pi^2 r^4}{3}\left(\frac{3M}{4\pi R^3}\right)^2 dr.$$

$$= -G.\frac{\cancel{16\pi^2}\times 3^{\cancel{2}}}{\cancel{16}\times\cancel{3}\cancel{\pi^2}}\cdot\frac{R^5}{5}\cdot\frac{M^2}{R^6}$$

$$\Rightarrow \boxed{W_G = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}}$$

Fin de la partie mécanique