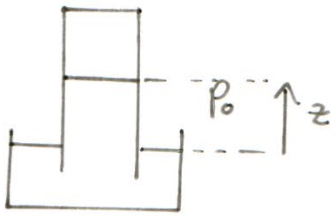
Physique du cavitron (Mines Ponts PC 2019)

I.A Pressions négatives

1°) • Statique des fluides : $\frac{dp}{dz} = -\rho_e g$.



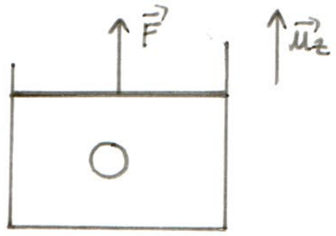
$\Rightarrow p(z) = p_0 - \rho_e g z$

Donc $p<0 \Leftrightarrow p_0 - \rho_e g z < 0$

$\Leftrightarrow \boxed{z > \frac{p_0}{\rho_e g} = z_m} \Rightarrow z_m = \frac{10^5}{10^3 \times 10} = \underline{\underline{10\,m}}$

• Pour des arbres de hauteur supérieure à 10m, la pression de l'eau est "négative" $\Rightarrow$ l'eau liquide sera dans un état métastable ou des bulles de vapeur apparaîtront.

2°)



Si on applique le PFD au piston de masse nulle on a :

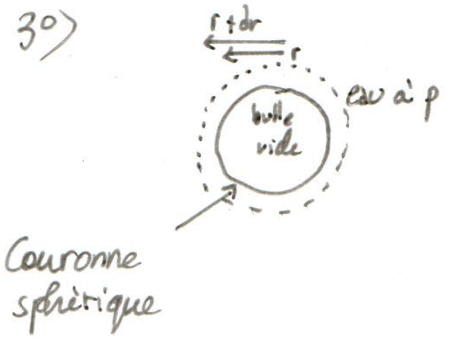
$m\vec{a} = \Sigma \vec{F} \Leftrightarrow \vec{0} = \Sigma \vec{F}$

$\Leftrightarrow \vec{0} = \underbrace{\vec{F}}_{F\vec{u_z}} + p_{eau} . S\vec{u_z}$

D'où $\boxed{p = -\frac{F}{S} < 0}$

La pression de l'eau est négative et la nucléation de bulles de vapeur est possible.

3°)



Soit $\delta W_p = -p\,dV$

$\Leftrightarrow \boxed{\delta W_p = -p\, 4\pi r^2 dr}$

$$\Leftrightarrow \delta W_p = -d\left(\frac{4}{3}\pi r^3 . p\right) = -p\,4\pi r^2 .\, dr.$$

Ce travail peut s'écrire sous la forme $\delta W_p = -dE_p' = \vec{F}' . dr\vec{u_r}$.

Si on choisit $E_p'(0) = 0$ alors : $\boxed{\begin{cases} \vec{F}' = -p\,4\pi r^2 \vec{u_r}. \\ E_p' = \frac{4}{3}\pi r^3 . p \end{cases}}$

4°) D'après l'énoncé $E_p = E_p' + \gamma_e \Sigma$

$$\Leftrightarrow E_p = \frac{4}{3}\pi r^3 p + 4\pi r^2 . \gamma_e.$$

$$\text{t.q } \frac{dE_p}{dr} = 0 \Leftrightarrow pr^2 + 2r\gamma_e = 0$$

$$\Leftrightarrow r = 0 \text{ ou } -\frac{2\gamma_e}{p} = r_c.$$

La valeur $r=0$ correspond à un minimum local nul de E_p : $E_p(0) = 0$.

—— $r = r_c$ ——— maximum de E_p : $E_a = E_p(r_c)$ t.q

$$E_p(r_c) = \frac{4}{3}\pi p . (-1) . \frac{8\gamma_e^3}{p^3} + 4\pi\gamma_e . \frac{4\gamma_e^2}{p^2}$$

$$\Leftrightarrow E_a = \frac{4\pi\gamma_e^3}{p^2}\left(4 - 8/3\right) \quad \Leftrightarrow \boxed{E_a = \frac{16\pi\gamma_e^3}{3p^2}}$$

Si $p = -2{,}0$ MPa alors : $\boxed{\begin{cases} E_a = 1{,}4 . 10^{-18}\,\text{J} \\ r_c = 70\,\text{nm} \end{cases}}$

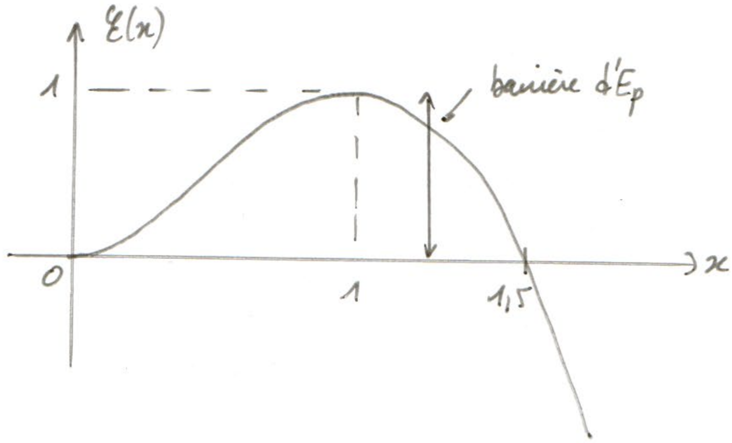
Soit $\mathcal{E}(x) = \frac{E_p(x)}{E_a} = 4\pi\left(r^2\gamma_e + \frac{pr^3}{3}\right) \Big/ \left(\frac{16\pi\gamma_e^3}{3p^2}\right)$

$$= \frac{3r^2p^2}{4\gamma_e^2} + \frac{p^3r^3}{4\gamma_e^3} = 3r^2 . \left(\frac{-p}{2\gamma_e}\right)^2 + (-2) . \left(\frac{p^3}{8\gamma_e^3}\right) . r^3$$

$$\rightarrow \boxed{\mathcal{E}(x) = 3x^2 - 2x^3 = x^2(3 - 2x)}$$

D'où $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} \mathcal{E}(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to \infty} \mathcal{E}(x) = -\infty \end{cases}$

De plus $\begin{cases} \mathcal{E}'(x) = 6x(1-x) \text{ t.q } \mathcal{E}'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \\ \mathcal{E}(x) = \begin{cases} 0 \text{ en } x = 0 \\ 1 \text{ en } x = 1 \\ 0 \text{ en } x = 3/2 \end{cases} \end{cases}$



5). L'état d'équilibre de la bulle correspond à une bulle de rayon nul. Cet état est stable mais $E_p(\infty) < E_p(0)$.

. Pour aller vers l'état d'énergie minimale il faut donc franchir la barrière d'E_p présente en $r = r_c$. Ainsi le rayon de la bulle tend à devenir infiniment grand : le liquide se vaporise entièrement.

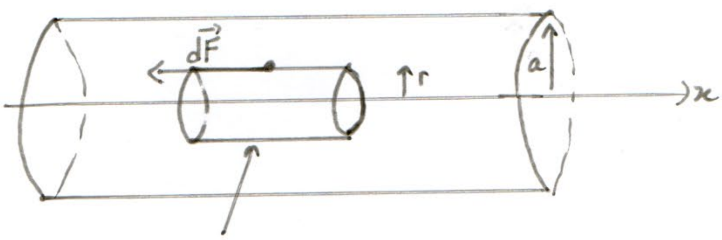
. A $p = -2{,}0$ MPa : $E_a = 1{,}4 \cdot 10^{-15}$ J. Or $k_B T \sim 5 \cdot 10^{-21}$ J à température ordinaire. Sans apport d'énergie extérieure l'état liquide sans bulle est un état stable.

I.B) Conductance hydraulique

6) Soit $\vec{v} = v(r,x)\,\vec{u}_x$ or l'écoulement est incompressible d'où :

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0 \iff \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \rightarrow \boxed{\vec{v} = v(r)\,\vec{u}_x}$$

7)



- Le cylindre de volume $d\tau$ subit une force de cisaillement du type : $\vec{dF} = -\eta_c\, dS \dfrac{\partial v}{\partial r}\vec{u}_x$

$$\iff \boxed{\vec{dF} = +\eta_c\, 2\pi r\, dx\, \underbrace{\frac{\partial v}{\partial r}}_{<0}\,\vec{u}_x}$$

- De plus le cylindre subit des forces de pression en face d'entrée et de sortie : $\begin{cases} \vec{dF_e} = p(x)\,\pi r^2\,\vec{u}_x \\ \vec{dF_s} = -p(x+dx)\,\pi r^2\,\vec{u}_x \end{cases}$

Or $\dfrac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{0}$ car $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ (stationnaire) et $(\vec{v}\cdot\vec{\operatorname{grad}})\vec{v} = \vec{0}$ car $\vec{v}(r)$.

d'où $\vec{dF} + \vec{dF_e} + \vec{dF_s} = \vec{0}$

$$\iff +\eta_c\, 2\pi r\, dx \frac{\partial v}{\partial r} + p(x)\,\pi r^2 - p(x+dx)\,\pi r^2 = 0$$

$$\iff +\eta_c \cdot 2\frac{\partial v}{\partial r}\, dx - \frac{\partial p}{\partial x}\, r\, dx = 0$$

$$\iff \boxed{\frac{dp}{dx} = \frac{2\eta_c}{r}\frac{\partial v}{\partial r}} \quad (1)$$

D'où $F(x) = G(r)$ avec x et r deux variables d'espace indépendantes

par conséquent $\frac{dp}{dx} = \frac{2\eta_e}{r}\frac{dv}{dr} = K = cste.$

$$\Rightarrow p(x) = Kx + B \quad \text{avec} \begin{cases} p(-R) = p_1 = -KR + B \\ p(R) = p_2 = KR + B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1 - p_2 = -2KR. \\ p_1 + p_2 = 2B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = \frac{p_2 - p_1}{2R} \\ B = \frac{p_1 + p_2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{p(x) = \frac{p_2 - p_1}{2R}x + \frac{p_1 + p_2}{2}}$$

8). L'équation ① s'écrit : $\frac{2\eta_e}{r}\frac{\partial v}{\partial r} = K = \frac{p_2 - p_1}{2R}$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{p_2 - p_1}{2R} \cdot \frac{r}{2\eta_e}$$

$$\Rightarrow v(r) = \frac{p_2 - p_1}{8R\eta_e} r^2 + C.$$

or $v(a) = 0$ d'où $\boxed{v(r) = \frac{p_1 - p_2}{8\eta_e R}(a^2 - r^2)}$

. Le débit volumique s'en déduit : $D_v = \int_0^{2\pi}\int_0^a v(r) . r dr d\theta$

$$\Leftrightarrow D_v = \frac{p_1 - p_2}{8\eta_e R} . 2\pi \underbrace{\left[\frac{a^2r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^a}_{a^4/4}$$

$$\Rightarrow D_v = \frac{\pi a^4}{16\eta_e R}(p_1 - p_2) \Rightarrow \boxed{G_H = \frac{D_v}{p_1 - p_2} = \frac{\pi a^4}{16\eta_e . R}}$$

9°) . Soit $v = \frac{D_v}{\pi a^2} \Leftrightarrow \boxed{v = \frac{(p_1 - p_2)a^2}{16 \eta_e R}}$

. Pour une tranche de fluide située entre x et $x + dx$ et de rayon a on a :

$$\vec{dF} = \eta_e . \left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=a} dS\, \vec{u}_x = \eta_e . \frac{p_2 - p_1}{4 \eta_e R}\, a . 2\pi a\, dx\, \vec{u}_x$$

$$\Leftrightarrow \vec{dF} = \eta_e . \frac{p_2 - p_1}{16 \eta_e R}\, a^2 . 8\pi\, dx\, \vec{u}_x$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{dF} = -8\pi\, v\, \eta_e\, dx\, \vec{u}_x}$$

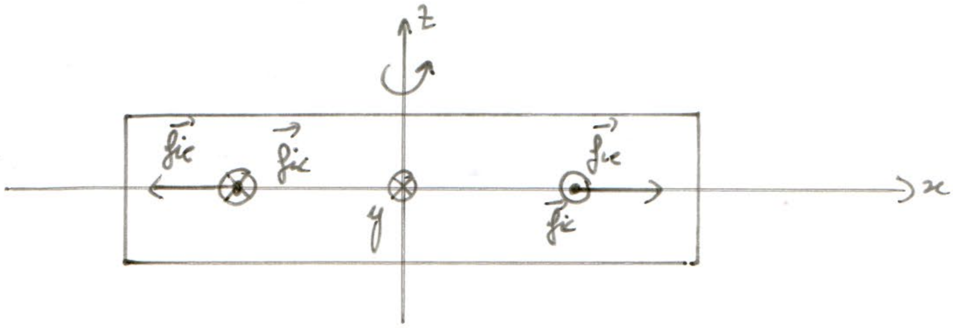
10°) Soit $\boxed{Re = \frac{\rho_e . v . (2a)}{\eta_e}}$ avec $\begin{cases} v = 6\,mm.s^{-1},\ a = 0{,}02\,mm,\ p_1 - p_2 = 10^5\,Pa \\ R = 0{,}4\,m,\ \eta_e = 10^{-3}\,Pl,\ \rho_e = 10^3\,kg.m^{-3} \end{cases}$

$= \underline{\underline{0{,}3}}$

Comme $Re \ll 2000$, le régime d'écoulement de la sève est laminaire.

I.e) La cavition

11) Les forces d'inertie ont pour expression : $\boxed{\begin{cases} \vec{f_{ie}} = \rho_e \omega^2 x\, \vec{u}_x \\ \vec{f_{ic}} = -2\rho_e\, \vec{\omega} \wedge \vec{v} \end{cases}}$



12) Au bilan précédent, il faut ajouter les forces d'inertie pour la zone $x > 0$:

$$d\vec{F}_{ie} = \rho_e \omega^2 x \,.\, \pi a^2 dx\, \vec{u}_x$$

$$d\vec{F}_{ic} = -2\rho_e . \omega \bar{v}\, \pi a^2 dx\, \vec{u}_y \quad \text{et une force normale } d\vec{N} = dN\,\vec{u}_y$$

On projette sur Ox

$$0 = -8\pi \eta_e \bar{v}\, dx \quad - \frac{\partial p}{\partial x} dx\, \pi a^2 + \rho_e \omega^2 x\, \pi a^2 dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{dp}{dx} = \rho_e \omega^2 x - \frac{8\eta_e \bar{v}}{a^2}$$

Si $x > 0$ alors : $\displaystyle\int_{p(x)}^{p(R)} dp = \int_x^R \left(\rho_e \omega^2 x - \frac{8\eta_e \bar{v}}{a^2}\right) dx$

$$\Leftrightarrow p_2 - p(x) = \rho_e \frac{\omega^2 (R^2 - x^2)}{2} - \frac{8\eta_e \bar{v}}{a^2}(R - x)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{p(x) = p_2 - \rho_e \frac{\omega^2 (R^2 - x^2)}{2} - \frac{8\eta_e \bar{v}}{a^2}(x - R)}$$

13) • La pression est continue en $x = 0$ d'où :

$$\begin{cases} p(0^+) = p_2 - \rho_e \dfrac{\omega^2}{2} R^2 + \dfrac{8\eta_e \bar{v}}{a^2} R \\ \text{et} \\ p(0^-) = p_1 - \rho_e \dfrac{\omega^2 R^2}{2} - \dfrac{8\eta_e \bar{v} R}{a^2} \end{cases}$$

$$\text{D'où } \boxed{p(0) = \frac{p(0^-) + p(0^+)}{2} = \frac{p_1 + p_2}{2} - \rho_e \frac{\omega^2 R^2}{2}}$$

• Et si on soustrait les 2 expressions : $0 = p_2 - p_1 + 16\eta_e \bar{v} R / a^2$

$$\Leftrightarrow \boxed{\bar{v} = \frac{(p_1 - p_2) a^2}{16 \eta_e R}}$$

• Vu qu'on retrouve l'expression de la vitesse moyenne établie précédemment, la conductance hydraulique reste inchangée.

14) Sur la surface du cylindre de la figure 2.b il n'y a pas de forces de cisaillement d'où le bilan des forces : $\frac{dp}{dx} = \rho_e \omega^2 x \iff dp = \rho_e \omega^2 x \, dx$.

. On intègre entre x et $d-L$ d'où :

$$p(d-L) - p(x) = \rho_e \frac{\omega^2}{2}\left[(d-L)^2 - x^2\right]$$

$$\iff p(x) = p(d-L) + \frac{\rho_e \omega^2}{2}\left[x^2 - (d-L)^2\right]$$

. En $x = -R$ on a donc : $\underline{p_1 = \underbrace{p(d-L)}_{= p_0} + \frac{\rho_e \omega^2}{2}\left[R^2 - (d-L)^2\right]}$

. De m̂ si on intègre entre R et L on obtient :

$$\underline{p_2 = \underbrace{p(L)}_{p_0} + \frac{\rho_e \omega^2}{2}\left[R^2 - L^2\right]}$$

D'où $p_1 - p_2 = \frac{\rho_e \omega^2}{2}\left[L^2 - (d-L)^2\right] = \frac{\rho_e \omega^2}{2}\left[2Ld - d^2\right]$

Si $d \ll L$ alors : $p_1 - p_2 \sim \frac{\rho_e \omega^2}{2} \times 2Ld$

$$\iff \underline{p_1 - p_2 = \rho_e \omega^2 L d}$$

15) . Pour $S_G = +50\%$, on a grâce au graphique $\Delta p = -\rho_e \omega^2 L^2 = -3\,\mathrm{MPa}$

$$\Rightarrow \underline{\omega = \sqrt{\frac{-\Delta p}{\rho_e L^2}}} = 2.10^2\,\mathrm{rad.s^{-1}} = \underline{30\ \mathrm{tours}/s = \omega}$$

. D'où $\underline{p_1 - p_2} = \rho_e \underline{\omega^2 L . d = 0{,}1\,\mathrm{MPa}}$

Lorsque les bulles de gaz se forment et obstruent les canaux, le débit volumique de la sève décroît, ce qui réduit la conductance hydraulique.