Partie I – Le millénium Bridge (Mines-Ponts PC 2016)

(I) Oscillateur simple

1°) PFD : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha \dot{x}\,\hat{u}_x - mg\,\hat{u}_x - k(\ell-\ell_0)\,\hat{u}_x$

Sur $\hat{u}_x$: $m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - mg - k(x-\ell_0)$ car $\ell = OG = x(t)$.

$\Leftrightarrow \ddot{x} + \dfrac{\alpha}{m}\dot{x} + \dfrac{k}{m}(x-\ell_0) = -g.$

Notons $\tilde{x} = x_{eq}$ d'où $\dfrac{k}{m}(\tilde{x}-\ell_0) = -g \Rightarrow \ddot{x} + \dfrac{\alpha}{m}\dot{x} + \dfrac{k}{m}(x-\tilde{x}) = 0$

Si $X = x - \tilde{x}$ alors : $\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$ (1)

où $\begin{cases} \boxed{\omega_0^2 = k/m} \\ 2\xi\omega_0 = \dfrac{\alpha}{m} \Leftrightarrow \xi = \dfrac{\alpha}{2m\omega_0} = \dfrac{\alpha}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}} \Leftrightarrow \boxed{\xi = \dfrac{\alpha}{2\sqrt{mk}}} \end{cases}$

- ω_0 est la pulsation propre, c'est la pulsation naturelle de l'oscillateur en l'absence d'amortissement
- ξ est le facteur d'amortissement, il croît proportionnellement à α.

2°) 1er cas $\xi = 0$

Dans ce cas (1) s'écrit $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0 \Rightarrow X = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

Or $\begin{cases} X(0) = X_0 = A \\ \dot{X}(0) = V_0 = B\omega_0 \end{cases} \Rightarrow X = X_0\cos(\omega_0 t) + \dfrac{V_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

2ème cas : $0 < \xi < 1$

Dans ce cas le polynôme caractéristique s'écrit : $r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$

t.q $\Delta = 4\xi^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(\xi^2-1) < 0$

Les solutions sont du type : $X = \left[A\cos(\omega_a t) + B\sin(\omega_a t)\right]e^{-\xi\omega_0 t}$ où $\omega_a = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$

Or $\begin{cases} X(0) = X_0 = A \\ \dot{X}(0) = V_0 = -\xi\omega_0 A + B\omega_a. \end{cases}$

car $\dot{X} = -\xi\omega_0\left[A\cos(\omega_a t) + B\sin(\omega_a t)\right]e^{-\xi\omega_0 t} + \omega_a\left[-A\sin(\omega_a t) + B\cos(\omega_a t)\right]e^{-\xi\omega_0 t}$

Donc $V_0 = -\xi\omega_0 X_0 + B\omega_a$

$$\Leftrightarrow B = \frac{V_0 + \xi\omega_0 X_0}{\omega_a}$$

Donc $\boxed{X(t) = \left(X_0\cos(\omega_a t) + \frac{1}{\omega_a}(V_0 + \xi\omega_0 X_0)\sin\omega_a t\right)e^{-\xi\omega_0 t}}$

On observe des pseudo-oscillations.

- L'ajout d'une force due au vent revient à changer α en $\alpha - \beta$ car $\vec{F_v} = +\beta\dot{x}\,\vec{u_x}$

$$\Rightarrow \xi = \frac{\alpha - \beta}{2m\omega_0}$$

- Si $\beta > \alpha$, l'oscillateur devient instable. Sous l'effet du vent, l'oscillateur peut se mettre à osciller spontanément.

3°). ① s'écrit avec l'ajout de cette force $\vec{F} = \vec{F_0} + \vec{F_1}\cos(\omega t)$

$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = -\frac{F_0}{m} - \frac{F_1}{m}\cos(\omega t)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2\left[X + \frac{F_0}{m\omega_0^2}\right] = -\frac{F_1}{m}\cos(\omega t)$$

or $Y = X + \frac{F_0}{m\omega_0^2} \Rightarrow \ddot{Y} + 2\xi\omega_0\dot{Y} + \omega_0^2 Y = -\frac{F_1}{m}\cos(\omega t)$

- On pose $\underline{Y} = Y_m e^{i\omega t}$ et $\underline{F_1} = F_{1m}e^{i(\omega t)}$

$$\Rightarrow \underline{Y}\left(-\omega^2 + 2\xi\omega_0(i\omega) + \omega_0^2\right) = -\frac{\underline{F_1}}{m} = -\underline{\epsilon}$$

D'où $\underline{Y} = \dfrac{-\underline{\epsilon}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i(2\xi\omega_0\omega)} = \dfrac{-\underline{\epsilon}/\omega_0^2}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + i\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)}$

Donc $\boxed{\underline{H} = \dfrac{1/\omega_0^2}{1-\Omega^2+2i\xi\Omega}}$

4°) Une résonance se produit si $|\underline{H}|$ présente un maximum au voisinage d'une pulsation propre de l'oscillateur.

Soit $|\underline{H}| = \dfrac{1/\omega_0^2}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2+4\Omega^2\xi^2}}$

t.q $\dfrac{dH}{d\Omega} = 0 \Leftrightarrow -4\Omega(1-\Omega^2) + 8\Omega\xi^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega = 0 \text{ (cas non intéressant car minimum)} \\ (1-\Omega^2) = 2\xi^2 \end{cases}$

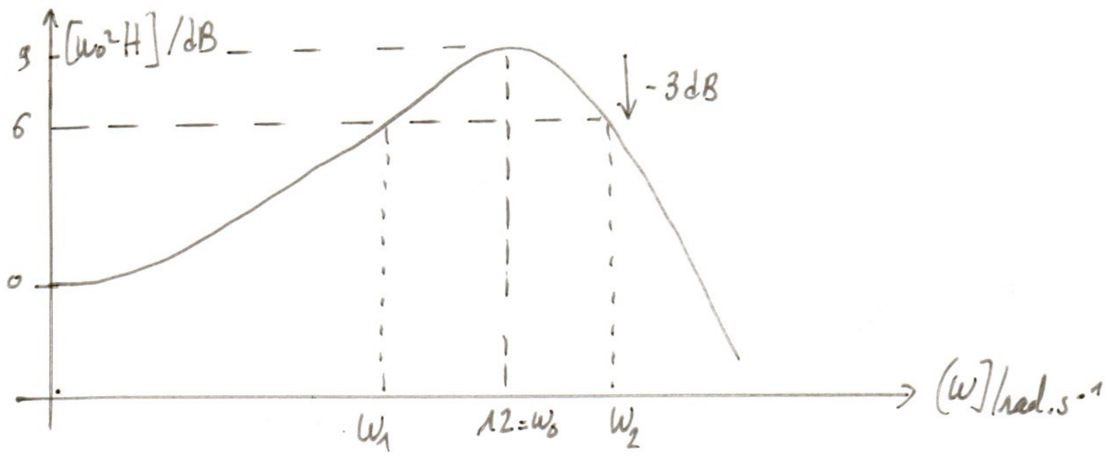
D'où $\Omega^2 = 1-2\xi^2 \Rightarrow \boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}}$

A la résonance : $|\underline{H}(\omega_r)| = \dfrac{1/\omega_0^2}{\sqrt{4\xi^4+(1-2\xi^2)\cdot 4\cdot\xi^2}}$

$\Leftrightarrow |\underline{H}(\omega_r)| = \dfrac{1/\omega_0^2}{\sqrt{4\xi^2-\underbrace{4\xi^4}_{\ll 4\xi^2}}}$

Vu que $\xi^2 \ll 1 \Rightarrow \boxed{|\underline{H}(\omega_r)| = \dfrac{1}{2\omega_0^2\xi}}$

5°)



. Pour $\xi^2 \ll 1$ on a $\omega_r = \omega_0 \simeq 12\,rad.s^{-1}$

. Or on sait que la bande passante est t.q : $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q} = 2\xi$

Avec $\Delta\omega = 14{,}2 - 9{,}5 = 4{,}7\,rad.s^{-1}$

$$\Rightarrow \xi = \frac{\Delta\omega}{2\omega_0} = \frac{4{,}7}{2\times 12} = \underline{\underline{0{,}2}}$$

6°) Il est important de connaître les fréquences de résonance d'une structure pour éviter qu'elle ne soit excitée à leur voisinage. Exciter sur une résonance un pont ou une tour peuvent être détruites : <u>pont de Tacoma à Washington</u>

7°) On peut fixer sur la structure des accéléromètres.

8°) . Pour chaque spectre on peut calculer la fréquence d'acquisition des mesures : la fréquence d'échantillonage des mesures :

$$f_e = \frac{N}{t_{max} - t_{min}}$$

On obtient ainsi : ① : $f_{e1} = 1{,}68\,Hz$, ② $f_{e2} = 11{,}5\,Hz$, ③ $f_{e3} = 3{,}37\,Hz$, ④ $f_{e4} = 33{,}3\,Hz$.

. Or le signal proposé a une fréquence de 2Hz (période de 0,5s)

D'après le critère de Shannon - Nyquist $f_{max} < \frac{f_e}{2}$.

. Ainsi le graphe 4 nous permet de mieux caractériser le signal :

. Signal de valeur moyenne non nulle.
. Signal dont le fondamental vaut 2Hz.
avec des harmoniques à amplitude décroissante à 4, 6, 8, 10, 12Hz

. Les autres graphes sont sensibles au repliement de spectre. Par exemple dans le cas du graphe ②, le pic à 3,5Hz est en fait le pic à 8Hz car $3{,}5 = 11{,}5 - 8$.

. On peut donc conclure que la fréquence de la marche est de 1Hz car les 2 pieds jouent un rôle symétrique. La fréquence de la force subie par le pont est de 2Hz.

9°) La fréquence de résonance du pont correspond à la fréquence de la force subie, ainsi le pont va rentrer en résonance. Le système d'amortisseur va abaisser la réponse en amplitude (-2dB au maximum) et placer une anti-résonance sur la fréquence de la force subie par le pont.