Radioactivité et effet tunnel (Mines 2016 – PC)

18) Soit $dP = |\Psi|^2 dx \Rightarrow \boxed{[\Psi] = L^{-1/2}}$

19) On a 100% de chance de trouver l'e⁻ dans l'espace tout entier.

20) Soit $\rho = |\Psi|^2$ représente la densité de probabilité de présence du quanton t.q

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

21) . Particule non relativiste : $v/c \ll 1$

. Soit $\Psi(x,t) = \varphi(x) f(t) = \varphi(x) e^{-iEt/\hbar}$ par conséquent :

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + V\varphi = E\varphi \quad \text{où } \varphi = \varphi(x)}$$

d'où $\boxed{dP = |\Psi|^2 dx = |\varphi|^2 dx}$ car $|f(t)|^2 = 1$

22) On a $V(x) = 0 \Rightarrow \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{k^2}\varphi = 0$

Comme $E = \hbar\omega > 0$ on a alors $\varphi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$

$$\boxed{\Rightarrow \Psi = Ae^{i(kx-\omega t)} + Be^{-i(kx+\omega t)}}$$

OPPH se propageant vers $x>0$. OPPH se propageant vers x négatifs

23) En relation avec le cours sur les ondes :

$$\boxed{\vec{k} = \pm k\vec{u}_x \quad \text{où } k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}}$$

Or $E = E_c = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Rightarrow \boxed{\vec{p} = \hbar\vec{k}}$

24) En mécanique classique, une particule ne peut pas franchir une barrière énergétique plus haute que son énergie de départ. La particule serait donc réfléchie.

25) Vu que $V=0$ on a $\begin{cases} \underline{\varphi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}} \\ \underline{\varphi_{III}(x) = Ce^{ikx} + \cancel{De^{-ikx}}} \end{cases}$ où $D=0$ car l'onde ne revient pas de l'infini.

26) Soit $\dfrac{d^2\varphi}{dx^2} + \dfrac{2m(\mathcal{E}-V_0)}{\hbar^2}\varphi = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi_{II}(x) = De^{qx} + Ee^{-qx}}$ où $q = \sqrt{\dfrac{2m(V_0-\mathcal{E})}{\hbar^2}}$

27) CL : $\boxed{\begin{cases} \varphi(0^-) = \varphi(0^+) \\ \varphi(a^-) = \varphi(a^+) \end{cases}$ et $\begin{cases} \varphi'(0^-) = \varphi'(0^+) \\ \varphi'(a^-) = \varphi'(0^+) \end{cases}}$ et C. normalisation : $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi|^2 dx = 1}$

28) Soit $\vec{j} = \dfrac{i\hbar}{2m}\left[\varphi\dfrac{\partial\varphi^*}{\partial x} - \varphi^*\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right]\vec{u}_x$

<u>Région III</u> : $\varphi_{III} = Ce^{ikx}.e^{-i\omega t} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_{III}}{\partial x} = (ik)\varphi_{III} \\ \varphi_{III}^* = Ce^{-ikx}e^{+i\omega t} \quad \text{et } |\varphi_{III}|^2 = |C|^2 \\ \dfrac{\partial\varphi_{III}^*}{\partial x} = (-ik)\varphi_{III}^* \end{cases}$

d'où $\vec{j}_{III} = \dfrac{i\hbar}{2m}\vec{u}_x\left[(-ik)|\varphi_{III}|^2 - (ik)|\varphi_{III}|^2\right] = \boxed{\dfrac{\hbar k}{m}|C|^2\vec{u}_x = \vec{j}_{III}}$

<u>Région I</u> : $\varphi_I = \underbrace{Ae^{ikx}}_{\varphi_i} + \underbrace{Be^{-ikx}}_{\varphi_r} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_I^* = Ae^{-ikx} + Be^{ikx} = \varphi_i^* + \varphi_r^* \\ \dfrac{\partial\varphi_I}{\partial x} = ik\left[Ae^{ikx} - Be^{-ikx}\right] = ik\left[\varphi_i - \varphi_r\right] \\ \dfrac{\partial\varphi_I^*}{\partial x} = -ik\left[Ae^{-ikx} - Be^{ikx}\right] = (-ik)\left[\varphi_i^* - \varphi_r^*\right] \end{cases}$

D'où $\vec{j}_I = \dfrac{i\hbar}{2m}\vec{u}_x\left[\left(-ik|\varphi_i|^2 + ik|\varphi_r|^2 + \underline{ik\varphi_i\varphi_r^*} - \underline{\underline{ik\varphi_r.\varphi_i^*}}\right) - \left(ik|\varphi_i|^2 - ik|\varphi_r|^2 - \underline{\underline{ik\varphi_i^*\varphi_r}} + \underline{ik\varphi_i\varphi_r^*}\right)\right]$

$= \dfrac{\hbar k}{m}\vec{u}_x\left[|\varphi_i|^2 - |\varphi_r|^2\right] \longrightarrow \boxed{\vec{j}_I = \dfrac{\hbar k}{m}\vec{u}_x\left[|A|^2 - |B|^2\right]}$

<u>Interprétation</u> : . Soit $\vec{j}_I = \vec{j}_i + \vec{j}_r$ où $\begin{cases} \vec{j}_i : \text{probabilité de se déplacer vers } x>0. \\ \vec{j}_r : \text{—— " ——} \quad x<0. \end{cases}$

. Et $\vec{j}_{III}$ traduit la probabilité de franchir la barrière

$\Rightarrow \boxed{R = \dfrac{\|\vec{j}_r\|}{\|\vec{j}_i\|} = \dfrac{|B|^2}{|A|^2}}$ et $\boxed{T = \dfrac{\|\vec{j}_{III}\|}{\|\vec{j}_I\|} = \dfrac{|C|^2}{|A|^2}}$

29) A.N :

a	0,50 mm	1,00 mm	2,00 mm
qa	2,58	5,16	10,3
T	$2{,}27.10^{-2}$	$1{,}32.10^{-4}$	$4{,}38.10^{-9}$

Pour la barrière épaisse : $qa \gg 1$ d'où $T = \dfrac{1}{1 + \dfrac{V_0^2}{4\epsilon(V_0-\epsilon)} sh^2(qa)}$

est t.q $\begin{cases} sh\, qa \sim e^{qa} \\ \text{et} \\ e^{qa} \gg 1 \end{cases}$ d'où $T \sim \dfrac{4\epsilon(V_0-\epsilon)}{V_0^2} \dfrac{1}{\left(\frac{e^{2qa}}{2}\right)^2}$

$$\Rightarrow \boxed{T \sim \underbrace{\frac{16\epsilon(V_0-\epsilon)}{V_0^2}}_{T_0(\epsilon, V_0)} e^{-2qa}} \Rightarrow \ln T \sim \ln T_0 - 2qa.$$

Remarquons que : $\dfrac{\partial T_0}{\partial \epsilon} = \dfrac{16}{V_0^2}(V_0 - 2\epsilon)$ d'où

ϵ	0		$V_0/2$		V_0
$\partial T_0/\partial \epsilon$		+	0	−	
T_0	0	↗	4	↘	0

$\ln 4 \sim 1{,}3.$

A part aux positions extrêmes $|\ln T_0| \ll |-2qa|$ $\Rightarrow$ $\boxed{\ln T \sim -2qa}$

30) . Soit ${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{A-4}_{Z-2}X$ d'où $V = \dfrac{(Z-2)e \cdot 2e}{4\pi\varepsilon_0 x}$

$$\Rightarrow \boxed{k = 2(Z-2)e^2} = 4{,}7.10^{-36}\,C^2$$

donc $\boxed{V_0 = \dfrac{k}{4\pi\varepsilon_0 x_0}} = 1{,}18.10^{-11}\,J = 74{,}4\ MeV$

. Soit $\dfrac{k}{4\pi\varepsilon_0 x_m} = \epsilon \Leftrightarrow \boxed{x_m = \dfrac{k}{4\pi\varepsilon_0 \epsilon}} = 65\ fm$

. Or $q = \sqrt{2m(V_0-\epsilon)}/\hbar = 4.10^{15}\,m^{-1}$ $\Rightarrow q\underbrace{(x_m - x_0)}_{=a} \simeq 250 \gg 1$

$\rightarrow$ la barrière est dite épaisse

31) D'après 29) $\ln T \simeq -2qa \Leftrightarrow T \simeq e^{-2qa}$

$$\text{donc } T(x+dx) = T(x)\, e^{-2q\,dx}$$

$$\Leftrightarrow \ln T(x+dx) = \ln T(x) - 2q\,dx$$

$$\Leftrightarrow d\ln T = -2q\,dx$$

$$\Leftrightarrow d\ln T = -2\sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}}\,dx$$

$$\text{D'où } \boxed{\ln T \simeq -\frac{2}{\hbar}\int_{x_0}^{x_m}\sqrt{2m_\alpha\left(\frac{K}{4\pi\varepsilon_0 x}-E\right)}\,dx}$$ car $\ln T(x_0) \ll \ln T$ d'après 29)

32) D'où $\ln T = -\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m_\alpha E}\int_{x_0}^{x_m}\left(\frac{K}{4\pi\varepsilon_0 x}\cdot\frac{1}{E}-1\right)^{1/2}dx$ où $E = \frac{K}{4\pi\varepsilon_0 x_m}$

$$\Leftrightarrow \ln T = -\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m_\alpha E}\int_{x_0}^{x_m}\sqrt{\frac{x_m}{x}-1}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \ln T \simeq -\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m_\alpha E}\times x_m\left(\frac{\pi}{2}-2\sqrt{\frac{x_0}{x_m}}\right) \text{ d'après l'énoncé.}$$

$$\simeq -\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m_\alpha . E}\cdot\frac{K}{4\pi\varepsilon_0 E}\left(\frac{\pi}{2}-2\sqrt{x_0}\cdot\left(\frac{4\pi\varepsilon_0 E}{K}\right)^{1/2}\right)$$

$$\simeq -\frac{1}{4\hbar\varepsilon_0}\sqrt{\frac{2m_\alpha}{E}}+\frac{2}{\hbar}\sqrt{\frac{2m_\alpha x_0 K}{\pi\varepsilon_0}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ln T = a-\frac{b}{\sqrt{E}} \text{ où } \begin{cases} a = 2/\hbar\sqrt{\frac{2m_\alpha x_0 K}{\pi\varepsilon_0}} \\ b = \frac{K\sqrt{2m_\alpha}}{4\varepsilon_0\hbar}\end{cases}}$$

33) Par définition : $t_m = \frac{2x_0}{v}$ où $E = \frac{1}{2}m_\alpha v^2$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E}{m_\alpha}} \Rightarrow \boxed{t_m = x_0\sqrt{\frac{2m_\alpha}{E}}}$$

Le nombre de rebond par unité de temps est :

$$\boxed{n = \frac{1}{t_m} = \frac{1}{x_0}\sqrt{\frac{E}{2m_\alpha}}}$$

. Pour un unique rebond, la probabilité d'émettre une particule est égale à T, avec $T \ll 1$

. Pour un nombre de rebonds $dN = n\,dt$ on a :

$$dP = dN.T \iff dP = \frac{T}{t_m}dt.$$

. Soit $N(t)$ le nombre de particules à l'instant t.
et dN le nombre de désintégration entre t et dt+t qui vérifie :

$$N(t+dt) - N(t) = dN < 0.$$
$$= -N(t).dP$$
$$= -N(t).\frac{T}{t_m}dt$$

d'où $\frac{dN}{N} = -\frac{T}{t_m}dP \iff N = N(0)\,e^{-T/t_m . t}$

donc à $t_{1/2}$: $\frac{N(0)}{2} = N(0)\,e^{-T/t_m . t_{1/2}}$

$$\iff \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{T}{t_m}.t_{1/2}$$

$$\iff \boxed{t_{1/2} = \frac{t_m}{T}\ln 2}$$

Donc $\ln t_{1/2} = \ln t_m - \ln T + \ln(\ln 2)$ avec $\ln T = a - b/\sqrt{E}$

$$\iff \ln t_{1/2} = \ln t_m - a + \frac{b}{\sqrt{E}} + \ln(\ln 2)$$

or $t_m = cste$ d'où $\boxed{\ln t_{1/2} = cste + \frac{b}{\sqrt{E}}}$

34) Sur le graphe proposé on vérifie bien que $\ln t_{1/2}$ est une loi affine en $\frac{1}{\sqrt{E}}$ avec une origine commune qui dépend de l'élément.