

Millénium Bridge (Mines-Ponts PC 2016)

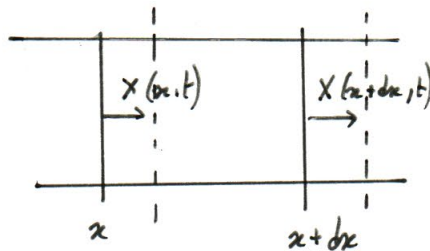
② Système élastique continu

10) Le module d'Young vérifié : $F = ES \cdot \frac{\Delta L}{L}$

$$\begin{aligned} \text{d'où } [E] &= [F]/[S] \\ &= \frac{MLT^{-2}}{L^2} \end{aligned}$$

Donc E s'exprime en Pa ou $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$

11)



Appliquons le PFD à la massonnette de largeur dx :

$$\text{Som } \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = F(x+dx, t) - F(x, t) \quad \text{①}$$

$$\text{or } F(x, t) = ES \frac{\Delta L_x}{L}$$

$$= ES \frac{X(x+dx, t) - X(x, t)}{dx} = ES \cdot \frac{\partial X}{\partial x}$$

$$\text{d'où ① s'écrit: } \rho S dx \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = ES \left[\frac{\partial X}{\partial x} \Big|_{x+dx} - \frac{\partial X}{\partial x} \Big|_x \right]$$

$$\Leftrightarrow \rho S \cancel{dx} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = ES \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \cdot \cancel{dx}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} : \text{équation de d'Alembert}$$

12) Pour le modèle de la corde :

$$\mu dl \vec{a} = \vec{T}(x+dx, t) - \vec{T}(x, t)$$

On projette sur Ox : $0 = T_x(x+dx, t) - T_x(x, t)$ car les mouvements sont uniquement verticaux.

$$\Leftrightarrow T(x+dx, t) \cos \alpha(x+dx, t) - T(x, t) \cos \alpha(x, t) = 0$$

Or $\alpha \ll 1 \Rightarrow \underline{T(x+dx, t) \simeq T(x, t) = T_0} \Rightarrow \underline{\text{la norme est indépendante de } x}$

13) Sur Oy : $\mu dl \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 [\sin \alpha(x+dx, t) - \sin \alpha(x, t)]$

$$\text{or } \left\{ \begin{array}{l} dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \simeq dx \\ \text{et} \\ \frac{dy}{dx} = \tan \alpha \simeq \sin \alpha \end{array} \right.$$

$$\text{d'où } \mu dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \left[\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x+dx} - \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_x \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{c^2}{l} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \text{ où } c_l = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}}$$

III) Modèle de la poutre élastique

14) Si $y(x,t) = f(x) \cdot g(t)$ alors il s'agit d'ondes stationnaires. Ce type d'onde apparaît lorsqu'une onde réfléchie se superpose à une onde incidente après réflexion sur un obstacle. C'est les conditions aux limites (comme la corde vibrante par exemple) qui imposent de telles ondes.

$$15) \text{ Soit } \rho S \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^4} = 0$$

$$\text{d'où: } \rho S \cdot \ddot{g} + EI \cdot f^4 \cdot g = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\ddot{g}}{g}}_{F(t)} = - \underbrace{\frac{EI}{\rho S} \cdot \frac{f^4}{f}}_{G(x)} = C$$

Comme $F(t) = G(x) \forall (x,t)$ on peut dire que les deux termes sont égaux à une constante C .

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{g} - Cg = 0 \\ f^4 + \frac{\rho S \cdot C}{EI} = 0 \end{cases}$$

Par hypothèse on s'intéresse à des mouvements bornés donc on pose $C = -\omega^2$

$$\Rightarrow g(t) = A \cos(\omega t + \phi) : \text{fonction périodique de pulsation } \omega$$

• d'équation différentielle vérifiée par f : $\frac{d^4 f}{dx^4} - \frac{\rho S \omega^2}{IE} f = 0$ est de quatrième ordre \Rightarrow on a 4 constantes à déterminer.

• Pour g on a deux constantes à déterminer.

$$\text{D'où } y(x,t) = A \cos(\omega t + \phi) [A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t) + A_3 f_3(t) + A_4 f_4(t)]$$

On peut poser $A=1$ et ainsi il reste 5 constantes à déterminer.

16) Soit : $\frac{d^4 f}{dx^4} - \frac{\rho S \omega^2}{IE} f = 0$ d'où le polynôme caractéristique :

$$\Rightarrow r^4 - \alpha = 0$$

$$\Rightarrow r^4 = \alpha \quad \Rightarrow \begin{cases} r^2 = \sqrt{\alpha} \\ r^2 = -\sqrt{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \alpha^{1/4} \\ r_2 = -\alpha^{1/4} \\ r_3 = j \cdot \alpha^{1/4} \\ r_4 = -j \cdot \alpha^{1/4} \end{cases}$$

$$\text{D'où la solution : } f = \underbrace{A e^{r_1 x}}_{f_1} + \underbrace{B e^{r_2 x}}_{f_2} + \underbrace{C e^{r_3 x}}_{f_3} + \underbrace{D e^{r_4 x}}_{f_4}$$

f_1 et f_2 peuvent s'écrire à l'aide fonctions hyperboliques
 f_3 et f_4 — " — " — sinusoïdales

$$\Rightarrow f(x) = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) + C \operatorname{ch}(\beta x) + D \operatorname{sh}(\beta x)$$

$$\text{où } \beta = \left(\frac{\rho S \omega^2}{IE} \right)^{1/4}$$

17) des conditions aux limites :

$$\cdot y(0,t) = 0 \text{ impose } f(0) = 0 \Rightarrow A + C = 0$$

$$\cdot y''(0,t) = 0 \text{ impose } f''(0) = 0 \Rightarrow -\beta A + \beta C = 0 \Rightarrow A - C = 0$$

$$\text{D'où } \underline{A = 0 \text{ et } C = 0}$$

$$\cdot y(L,t) = 0 \Rightarrow f(L) = 0 \rightarrow B \sin(\beta L) + D \operatorname{sh}(\beta L) = 0 \quad (3)$$

$$\cdot y''(L,t) = 0 \Rightarrow f''(L) = 0 \Rightarrow -\beta B \sin(\beta L) + \beta D \operatorname{sh}(\beta L) = 0 \quad (4)$$

$$\text{D'où } \left\{ \begin{array}{l} (3) + \frac{(4)}{\beta} \Rightarrow 2D \operatorname{sh}(\beta L) = 0 \Rightarrow D = 0 \\ (3) - \frac{(4)}{\beta} \Rightarrow 2B \sin(\beta L) = 0 \Rightarrow \begin{cases} B = 0 \text{ (} \Rightarrow f = 0 \text{ impossible)} \\ \underline{\beta L = m\pi} \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\text{d'où } \beta_m L = m\pi$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\rho S}{IE} \right)^{1/4} \omega_m^{1/2} L = m\pi$$

$$\Leftrightarrow \underline{\omega_m = \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{IE}{\rho S}}}$$

18) On a vu que : $y_m(z,t) = A_m \cos(\omega_m t + \varphi_m) \sin(\beta_m z)$ donc l'amplitude A_m ne dépend pas de z par exemple c'est le cas du mode (a) :



mais pas des modes (b), (c), (d), (e) dont y dépend de z .

→ des modes à conserver sont : a, c, e, f.

Le mode : a) possède 2 nœuds aux extrémités en $x=0$ et $x=L$.

: c) — " — " — " et un nœud en $x = \frac{L}{2}$

: e) ————— et deux nœuds en $x = \frac{L}{3}$ et $\frac{2L}{3}$

: f) ————— et trois nœuds en $\frac{L}{4}, \frac{L}{2}, \frac{3L}{4}$

D'où les valeurs de n :

a	c	e	f
1	2	3	4

13) Calculons les fréquences des quatre modes obtenus.

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{IE}{\rho S}} \quad \text{ou} \quad I = \frac{bh^3}{12}$$

Avec les valeurs proposées on obtient : $f_n = \frac{m^2}{L^2} \cdot 9,17 \cdot 10^3$ d'où le tableau avec f en Hz :

L (m)	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
$L_1 = 70$	0,50	2,0	4,5	8,0
$L_2 = 144$	0,12	0,47	1,1	1,9
$L_3 = 108$	0,21	0,84	1,9	3,4

Si on considère la marche des piétons à $f = 2\text{Hz}$ alors 3 modes peuvent être excités :

$$n = \{2, 3, 4\}$$

On remplace I' par I en inversant les rôles de b et h d'où $I' = \frac{1}{12} b^3 h$

$$\Leftrightarrow I' = \frac{b^2}{h^2} I = 16 I$$

D'où les nouvelles fréquences multipliées par 4 environ.

L (m)	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
$L_1 = 76$	1,9	7,5	17	30
$L_2 = 144$	0,44	1,8	4,6	7,2
$L_3 = 168$	<u>0,79</u>	3,1	7,1	12,4

Cependant l'oscillation du Millénum sur cet axe est due à l'action latérale des pieds avec une alternance pied gauche et pied droit. Il faut donc comparer à $f = 1,0 \text{ Hz}$ cette fois.

Le mode qui pose problème à cette fréquence est le mode 1 avec $f_1(L_3) = 0,79 \text{ Hz} \neq 1,0 \text{ Hz}$. C'est ce mode qui a posé problème dans la construction du Millénum Bridge.