Partie II : Tunnel du Fréjus (Mines PC – 2016)

1°) Par définition $\begin{cases} T_{moy} = \theta_0 \\ T_{max} = \theta_0 + T_0 \\ T_{min} = \theta_0 - T_0 \end{cases}$

On peut choisir $\underline{T_0 = 15°C}$

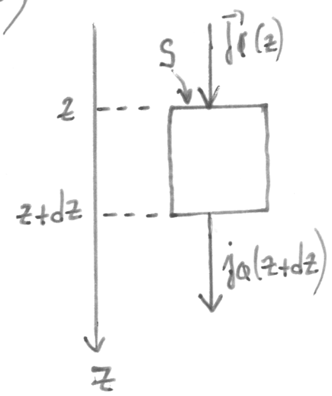
2°) On a : $\boxed{d\Phi_Q = \vec{j_Q} \cdot \vec{dS}}$ où $[j_Q] = \underline{W m^{-2}}$

où $\vec{j_Q}$ est la densité du flux thermique homogène à une puissance surfacique.

3°) Loi de Fourier : $\boxed{\vec{j_Q} = -K\, \overrightarrow{grad}\, T}$ valable dans un milieu isotrope avec des variations de température peu rapides.

D'où $[K] = \dfrac{W m^{-2}}{K m^{-1}} = \underline{W m^{-1} K^{-1}}$

4°)



Soit $\delta Q = \left[j_Q(z) - j_Q(z+dz) \right] S dt$

$\Leftrightarrow \boxed{\delta Q = -\dfrac{\partial j_Q}{\partial z} \underbrace{dz S}_{d\tau} dt}$

5°) . Le système doit contenir un assez grand nombre de particules pour introduire la notion de température.

. Le système doit être assez petit pour tenir compte de l'inhomogénéité de la température à grand volume.

6°) En appliquant le premier principe : $dU = \delta Q \Rightarrow \boxed{dU = -\frac{\partial j_Q}{\partial z} S\,dz\,dt}$

or $dU = [u(t+dt) - u(t)]\rho_s\, d\tau$

$= \frac{\partial u}{\partial t}\rho_s\, d\tau\, dt$

$\Rightarrow \boxed{dU = c_s \rho_s \frac{\partial T}{\partial t} d\tau\, dt \quad \text{où } d\tau = S\,dz}$

7°) Donc $\frac{\partial T}{\partial t} c_s \rho_s = -\frac{\partial j_Q}{\partial z}$

or $j_Q = -K\frac{\partial T}{\partial z} \Longrightarrow \rho_s c_s \frac{\partial T}{\partial t} = K\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \underbrace{\frac{K}{\rho_s c_s}}_{D}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}$ 1

t.q $\underline{[D] = m^2 s^{-1}}$

8°) La forme de solution : $\underline{T} = \theta_0 + T_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)}$ est ondulatoire, la variation de température au sommet se propage dans la roche.

1 s'écrit $(-i\underline{k})^2 D = i\omega$

$\Longleftrightarrow \underline{k}^2 = -\frac{i\omega}{D} = e^{-i\pi/2}\,\omega/D.$

$\Longleftrightarrow \underline{k} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{D}}\, e^{-i\pi/4} \Longleftrightarrow \underline{k} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{D}}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = k' + ik''$

Pour tenir compte d'une absorption $k'' < 0$

$\Longrightarrow \boxed{\underline{k} = k' + ik'' \text{ où } \begin{cases} k' = \sqrt{\frac{\omega}{2D}} & \text{propagation} \\ k'' = -i\sqrt{\frac{\omega}{2D}} & \text{atténuation} \end{cases}}$

$$\boxed{\text{Donc } T(z,t) = \theta_0 + T_0 \cos(\omega t - k'z)\, e^{-k'z} \text{ où } k' = \sqrt{\frac{\omega}{2D}}}$$

9°) Soit z_e t.q : $T_0 e^{-k' z_e} = \frac{T_0}{100}$

$$\Leftrightarrow -k' z_e = \ln\left(1/100\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z_e = \frac{\ln 100}{k'} = \ln 100 \sqrt{\frac{2K}{C_s \rho_s \omega}}} \simeq 5{,}3\,m$$

D'où $z_e \ll$ altitude du Fréjus $\Rightarrow$ les variations annuelles de température n'affectent pas la température des roches environnantes.

10°) . Pour $\omega = 7{,}2 \cdot 10^{-5}$ rad.s^{-1} on a z_e encore plus petit, $z_e = 0{,}3\,m$, les variations journalières sont encore moins ressenties en profondeur.

. les variations de basse fréquence se propagent plus facilement : c'est un passe bas

11°) En régime stationnaire : $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ d'où $dU = 0$

$$\Leftrightarrow \delta Q_e + \delta Q_c = 0$$

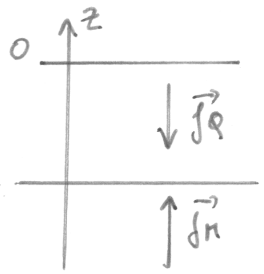
$$\Leftrightarrow \left[-\frac{\partial j_Q}{\partial z} dz\right] S\,dt + P\,d\tau\,dt = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\partial j_Q}{\partial z} + P = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial j_Q}{\partial z} = P_0 e^{-z/H}}$$

12°) Donc $j_Q = -P_0 H e^{-z/H} + cste.$

Or en $z = L_c$, $j_Q = -j_m$



Donc $-P_0 H e^{-L_c/H} + cste = -j_M$

$\Rightarrow cste = -j_M + P_0 H e^{-L_c/H}$

Donc $\boxed{j_Q = P_0 H\left[e^{-L_c/H} - e^{-z/H}\right] - j_M}$ (1)

De plus : $j_Q = -K\dfrac{dT}{dz} \Leftrightarrow dT = \left\{\dfrac{P_0 H}{K}\left[e^{-z/H} - e^{-L_c/H}\right] + \dfrac{j_M}{K}\right\} dz.$

$\Rightarrow T(z) = \dfrac{P_0 H}{K}\left[-He^{-z/H} - ze^{-L_c/H}\right] + \dfrac{j_M z}{K} + cste.$

or $T(0) = \theta_0 \Rightarrow \dfrac{P_0 H}{K}\left[-H\right] + cste = \theta_0$ d'où $cste = \theta_0 + \dfrac{P_0 H^2}{K}$

Donc $\boxed{T(z) = \theta_0 + \dfrac{P_0 H}{K}\left[H\left(1 - e^{-z/H}\right) - ze^{-L_c/H}\right] + j_M z/K}$ (2)

13) • On a $j_S = j_Q(z=0)$

d'où $j_S = P_0 H\left[e^{-L_c/H} - 1\right] - j_M$

14) • Comparons : j_M/K et $\dfrac{P_0 H}{K} e^{-L_c/H}$

càd : $\begin{cases} j_M = 0{,}035\,Wm^{-2} \\ P_0 H e^{-L_c/H} = 1{,}11.10^{-5}\,Wm^{-2} \end{cases}$

Donc $\boxed{T(z) \simeq \theta_0 + \dfrac{P_0 H^2}{K}\left(1 - e^{-z/H}\right) + \dfrac{j_M z}{K}}$

$\Rightarrow \underline{\underline{T(z=1{,}7\,km) \simeq 33°C}}$ (qui est proche des 30°C de l'énoncé)

Et $\underline{\underline{j_S = -60\ mWm^{-2}}}$

15) L'équation de diffusion en régime stationnaire devient : $\Delta T = 0$

- $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$

- En posant $T(x,z) = C_1 + f(x)g(z)$

$$\Rightarrow f''g + g''f = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{g''(z)}{g(z)} = cste.$$

Or on veut une solution oscillante en x d'où : $f'' + k^2 f = 0$

$$\Rightarrow f = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$

et $g = Ce^{-kz} + De^{kz} = Ce^{-kz}$ afin que la solution reste bornée

Or $T(x,z) = T_S + T_1 \cos\left(\dfrac{2\pi x}{\lambda}\right) = C_1 + \left(A'\cos kx + B'\sin kx\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = T_S \\ B' = 0 \\ A' = T_1 \end{cases} \text{ et } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \boxed{T(x,z) = T_S + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-2\pi z/\lambda} \quad \text{avec } \frac{2\pi}{\lambda} = k.}$$

- On remarque que le relief a une part importante dans les variations de la température en fonction de x et aussi de z.
- Vu que $\lambda = 10$ km cet effet est plus important que les précédents m̂ pour une profondeur de l'ordre du km.

16) L'équation de chaleur étant linéaire on peut sommer les deux termes d'où :

$$\boxed{T(x,z) = T_S + \frac{J_M z}{K} + \frac{P_0 H^2}{K}\left(1 - e^{-z/H}\right) + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-2\pi z/\lambda}} \quad (3)$$

17) A l'ordre 1 en h on peut écrire :

$$T(x, z=h) = T(x, z=0) + h \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0}$$

$$\Rightarrow T(x, z=0) = T(x, z=h) - h \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0}$$

Or en surface : $J_S = -K \left.\dfrac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0}$

d'où $T(x, z=0) = T(x, z=h) + \dfrac{J_S}{K} h.$

$$= T_S + \frac{J_S}{K} h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$$= \theta_0 + \beta z + \frac{J_S h_0}{K} \cos\left(2\pi x/\lambda\right)$$

or d'après (3) $T(x,0) = T_S + T_1 \cos\left(\dfrac{2\pi x}{\lambda}\right) \Rightarrow \begin{cases} T_S = \theta_0 + \beta z \\ T_1 = \dfrac{J_S h_0}{K} \end{cases}$

Donc : $$T(x,z) = \theta_0 + z\underbrace{\left(\frac{J_M}{K} + \beta\right)}_{C_1} + \underbrace{\frac{P_0 H^2}{K}}_{C_2}\left(1 - e^{-z/H}\right) + \frac{h_0 J_S}{K} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-2\pi z/\lambda}$$

$$\boxed{\Rightarrow \begin{cases} C_1 = J_M/K + \beta \\ C_2 = P_0 H^2/K \\ C_3 = J_S/K \end{cases} \quad \text{et } \delta = \frac{\lambda}{2\pi}}$$