Aspects de la propulsion spatiale (Mines 2015 – PC)

1) Généralités

I.A) Aspect cinétique - lois de vitesse

1°) Pour la fusée : $\begin{cases} \vec{p_F}(t) = m(t)v(t)\,\vec{u_z} \\ \vec{p_F}(t+dt) = (m(t) - D_m\,dt)(v(t)+dv)\,\vec{u_z} \end{cases}$ (1)

Pour les gaz éjectés : $\vec{p_g}(t+dt) = D_m\,dt\,[\vec{u}+\vec{v}] = D_m\,dt\,(v-u)\,\vec{u_z}$ (2)

2°) Soit le système {fusée + gaz} :

$$\frac{D\vec{p}}{Dt} = \frac{\vec{p_F}(t+dt) + \vec{p_g}(t+dt) - \vec{p_F}(t)}{dt} = m(t)\,\vec{g}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u_z}\left(\frac{\cancel{m(t)v} + m(t)\,dv - \cancel{D_m\,dt\,v(t)} - \underbrace{D_m\,dt\,dv}_{\text{ordre 2 négligé}} + \cancel{D_m\,dt\,v} - D_m\,dt\,u - \cancel{m(t)v}}{dt}\right) = m\vec{g}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u_z}\left(\frac{m(t)\,dv - D_m\,dt\,u}{dt}\right) = -mg\,\vec{u_z}$$

$$\Leftrightarrow m(t)\frac{dv}{dt} = D_m u - mg \quad (3)$$

3°) La force de poussée $\vec{F} = D_m u\,\vec{u_z}$ (4)

Pour que la fusée décolle, il faut que $D_m u > mg$.

$$\Rightarrow D_m u > m_0 g \quad (5)$$

4°) La définition de I_s entraîne : $\begin{cases} I_s = \dfrac{m}{D_m} \Leftrightarrow D_m = \dfrac{m}{I_s} \\ \text{et} \\ m = \dfrac{D_m u}{g} \end{cases}$

$$\Rightarrow D_m I_s = D_m \frac{u}{g} \Rightarrow I_s = \frac{u}{g}$$

5°) On résout l'équation ③ : $\frac{dv}{dt} = \frac{D_m}{m} u - g$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{m}\frac{u}{dt} - g.$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{d\ln m}{dt} . u - g.$$

$$\Leftrightarrow v = -u \ln m - gt + cste.$$

Or à $t=0$, $\begin{cases} v(0)=0 \\ m(0)=m_0 \end{cases} \Rightarrow 0 = -u \ln m_0 + cste$

Donc : $\boxed{v = u \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) - gt}$ (6)

6°) En dehors du champ de gravitation terrestre $\vec{g} = \vec{0}$ d'où :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\ln m}{dt} . u$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta v = -u \ln \frac{m_f}{m_i}} \quad (7)$$

7°) __Premier étage__ : $\Delta v_{21} = -u \ln\left(\frac{34}{134}\right) = 5{,}49\,km\,s^{-1}$

__Second étage__ : $\Delta v_{32} = -u \ln\left(\frac{4}{24}\right) = 7{,}17\,km\,s^{-1}$

$\Rightarrow \Delta v = 12{,}7\,km\,s^{-1}$

__Fusée à un seul étage__ : $\Delta v = -u \ln\left(\frac{14}{134}\right) = 9{,}04\,km\,s^{-1}$

8°) (7) peut s'écrire : $\frac{m_f}{m_i} = e^{-\Delta v/u} \Leftrightarrow \frac{m_u}{m_u + m_c} = e^{-\Delta v/u}$

$$\Leftrightarrow 1 + m_c/m_u = e^{+\Delta v/u}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m_c = m_u \left[e^{\Delta v/u} - 1\right]} \quad (8)$$

Pour $\begin{cases} u_1 = 4{,}00\,km/s \Rightarrow m_{c1} = 1250\,kg \\ u_2 = 20{,}0\,km/s \Rightarrow m_{c2} = 142\,kg. \end{cases}$

I.B) Aspect énergétique

9°) • Soit $\delta E_c = \frac{1}{2} \delta m (u - v)^2$

$$\Rightarrow \boxed{P_{jet} = \frac{\delta E_c}{dt} = \frac{1}{2} D_m (u - v)^2} \quad (9)$$

• Et $P_{poussée} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

$$\Leftrightarrow \boxed{P_{poussée} = D_m \cdot u v} \quad (10)$$

10°) Soit : $\eta = \frac{P_F}{P_{jet} + P_F}$

$$\Leftrightarrow \eta = \frac{D_m u v}{D_m u v + \frac{1}{2} D_m (u - v)^2}$$

$$\Leftrightarrow \eta = \frac{2uv}{2uv + u^2 + v^2 - 2uv}$$

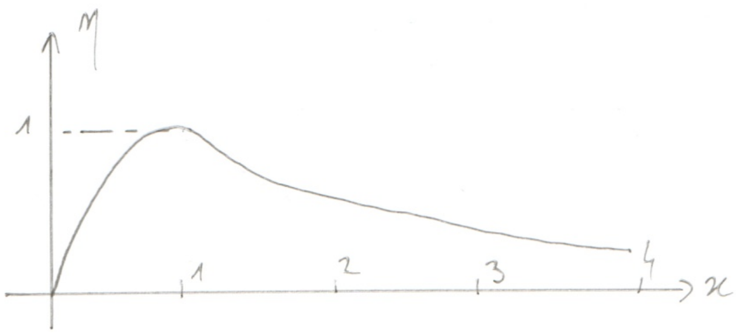
$$\Leftrightarrow \eta = \frac{2uv}{u^2 + v^2}$$

$$\Leftrightarrow \eta = \frac{2 u/v}{1 + (u/v)^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\eta = \frac{2x}{1 + x^2} \quad \text{si } x = u/v \text{ ou } v/u} \quad (11)$$

11°) Lorsque $\begin{cases} x \to 0 : \eta \to 0 \\ x \to \infty : \eta \to 0 \end{cases}$

Et : $\frac{d\eta}{dx} = \frac{2(1+x^2) - 2x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2 + 2x^2 - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow \underline{x_r = 1}$

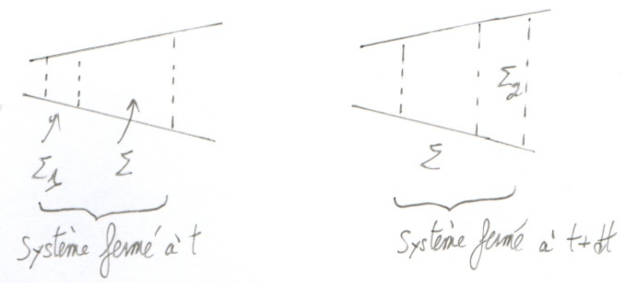


On remarque que $\eta \to 0$:

* si $x = 0 \Leftrightarrow u = 0$: pas de force de poussée
* si $x \to \infty \Leftrightarrow v = 0$: fusée immobile

II) Limites de la propulsion chimique

12°) Le 1PP en système fermé s'écrit : $\Delta(U + E_c + E_{pext}) = W_p + W' + Q$ (1)



D'où (1) s'écrit : $D_m dt \left[\overbrace{e_{c2} + u_2 + e_{p2}}^{u_2} - \overbrace{e_{c1} - u_1 - e_{p1}}^{u_1}\right] + \Delta U_\Sigma = W_p + W' + Q$

En régime permanent : $D_m dt \left[u_2 - u_1\right] = \frac{P_1}{\mu_1} - \frac{P_2}{\mu_2} + W' + Q$

$\Leftrightarrow D_m dt \left[h_2 - h_1\right] = W' + Q$

$\Leftrightarrow \boxed{D_m dt \left[(h_2 + e_{c2} + e_{p2}) - (h_1 + e_{c1} + e_{p1})\right] = W' + Q}$ (12)

Δ noter plutôt $\delta W'$, δQ.

13°) Ici : $\delta W' = 0$, $\delta Q = 0 \Rightarrow e_c + e_p + h = cste$

En négligeant les variations d'altitude : $e_c + h = cste$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}v^2 + c_p T = cste$.

$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{2}v^2 + \frac{\gamma R}{M(\gamma - 1)} T = cste}$ (13)

D'où : $0 + \frac{\gamma R}{M(\gamma-1)} T_c = \frac{1}{2}u_{max}^2 + 0$ car on néglige T_{sortie} face à T_c.

$\Rightarrow \boxed{u_{max} = \sqrt{\frac{2\gamma R T_c}{(\gamma - 1) M}}}$

14°) A.N : • $u_{max} = 3{,}11\ km.s^{-1}$

• $I_s = \frac{u_{max}}{g} = 317 s$.