Etude de deux mouvements avec force de frottement

A -Mouvement d'une bille dans un liquide

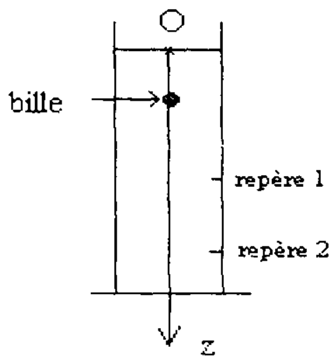
Dans tout le problème, le référentiel du laboratoire sera considéré comme galiléen. Dans cette partie, on étudie le mouvement de translation d'une bille d'acier de rayon **r** et de masse m dans de la glycérine de viscosité η.

On admettra que les actions de frottement exercées par le liquide sur la bille en mouvement sont modélisables par une force : $\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v}$ où $\vec{v}$ représente le vecteur vitesse de la bille.

Données pour ce problème :

- masse volumique de l'acier: ρ=7800 kg.m^{-3}
- masse volumique de la glycérine ρ_0 = 1260 kg.m^{-3}
- g=9,8m.s^{-2}

On dépose la bille en 0 sans vitesse initiale dans la glycérine contenue dans une grande éprouvette.



I-1) Donner les caractéristiques de la poussée d'Archimède exercée sur la bille plongeant dans la glycérine.

I-2) Faire le bilan des forces exercées sur la bille plongeant dans la glycérine en précisant le référentiel de travail.

I-3) Si l'on applique le principe des actions réciproques (appelé aussi principe de l'action et de la réaction), quelle est la force réciproque du poids de la bille ?

I-4) Etablir l'équation différentielle que vérifie la valeur de la vitesse $\vec{v}$ du centre d'inertie de la bille.

I-5) Montrer que la vitesse de la bille tend vers une vitesse limite $\overrightarrow{v_{lim}}$ telle que :

$$\|\overrightarrow{v_{lim}}\| = \frac{2(\rho - \rho_0)}{9\eta} g r^2$$

Donner l'expression de la constante de temps τ caractéristique du mouvement.

I-6) On mesure cette vitesse limite pour différents rayons de la bille ; la vitesse limite est mesurée entre les deux repères notés sur la figure.

[r]/mm	1,50	1,60	1,75	2,00	2,25
[v_{lim}]/cm.s^{-1}	5,2	5,9	7,1	9,1	11,5

En déduire la viscosité η de la glycérine (la méthode utilisée sera présentée et on précisera l'unité de la viscosité).

Calculer la constante de temps pour r=1,5 mm et conclure sur le caractère observable du phénomène.

B - Mouvement d'un proton dans un liquide

On étudie le mouvement horizontal d'un proton dans un liquide sursaturant (des bulles de gaz se créent au passage du proton et matérialisent sa trajectoire).

II-1) Un proton de masse m & de charge e, considéré comme un point matériel, a une vitesse initiale v_0 en un point fixe 0 ; il est dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B}$; le liquide exerce sur ce proton une force de frottement fluide $\vec{f} = -k\vec{v}$ où k est une constante positive et v est la vitesse du proton à l'instant de date t.

Par la suite, on posera : $\omega = \frac{eB}{m}$ & $\tau = \frac{m}{k}$

II-1-1 Faire le bilan des forces exercées sur le proton se déplaçant dans le liquide (on négligera le poids du proton et la poussée d'Archimède).

II-1-2 Etablir l'équation différentielle du mouvement du proton.

II-2) On désigne par Oxyz un trièdre orthogonal direct lié au référentiel Galiléen et par $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ la base de vecteurs unitaires associés.

On choisit : $\vec{B} = B\,\overrightarrow{u_z}$ & $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{u_x}$

II-2-1 Si la force de frottement était négligeable, quelle serait la variation d'énergie cinétique du proton ?

Rappeler, avec un minimum de calculs, quelle serait alors la trajectoire du proton (on donnera les caractéristiques de cette trajectoire).

II-2-2 - Qualitativement, quelles sont les modifications apportées par la force de frottement fluide sur cette trajectoire ?

II-2-3 Montrer que l'équation différentielle du II-1-2 peut se mettre sous la forme de deux équations différentielles :

$$\frac{dv_x}{dt} = av_y - bv_x \ (1) \quad et \quad \frac{dv_y}{dt} = -av_x - bv_y \ (2)$$

Déterminer a et b.

II-2-4 On pose j le nombre complexe tel que $j^2=-1$ pour résoudre le système d'équations différentielles, on introduit le complexe $\underline{V} = v_x + j\,v_y$.

Montrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes à une équation différentielle dont la solution est:

$$\underline{V} = v_0 e^{-(b+ja)t}$$

En déduire v_x et v_y.

II-3)

II-3-1 Déduire de $\underline{V}$ l'expression de $\underline{X} = x + j\,y$ en fonction de a, b, v_0 et t.

II-3-2 Déterminer la limite, notée $\underline{X}_\infty$, de $\underline{X}$ lorsque t tend vers l'infini.

En déduire la position limite $M_\infty\,(x_\infty, y_\infty)$ en fonction de a, b et v_0.

II-3-3 Donner l'allure de la trajectoire.