Etude de deux mouvements avec force de frottement du type $-k\vec{v}$ (Mines d'Albi 2004)

I) Mvt d'une bille dans un liquide

I.1) Poussée d'Archimède : $\boxed{\vec{A} = -4/3\,\pi r^3 \rho_0 g\, \vec{e_z}}$ • opposé au poids

• norme = poids du fluide déplacé

I.2) Dans le référentiel du laboratoire (Oxyz) on a :

$$\vec{P}+\vec{A}+\vec{f} = m\vec{a} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \vec{P} = \text{poids de la bille} \\ \vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v}. \end{cases}$$

I.3) Si $\vec{v} = \vec{0}$, $\boxed{\vec{P} = -\vec{A}}$

I.4) PFD : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -6\pi\eta r\vec{v} + m\vec{g} - m_0\vec{g}$

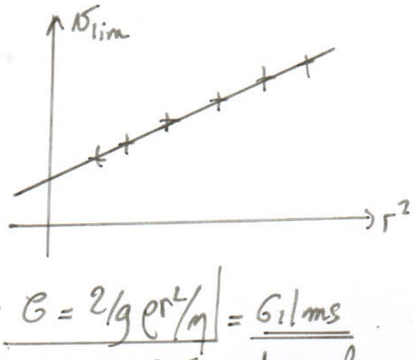
$$\Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{6\pi\eta r\vec{v}}{m} = \vec{g}\left(1-\frac{m_0}{m}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \vec{g}\left(\frac{\rho-\rho_0}{\rho}\right) \quad \text{où } \tau = \frac{2}{9}\rho r^2/\eta} \quad (1)$$

I.5) La solution de (1) s'écrit : $\vec{v} = \vec{A}e^{-t/\tau} + \vec{g}\tau\left(\dfrac{\rho-\rho_0}{\rho}\right)$ où $\tau = \dfrac{2}{9}\rho r^2/\eta$

d'où si $t \to \infty$: $\vec{v} \to \vec{v}_{lim} = \boxed{\dfrac{2}{9}\,\dfrac{\rho-\rho_0}{\eta}\,g r^2}$

I.6) A l'aide d'une régression linéaire $v_{lim} = f(r^2)$ faite sur calculatrice ou ordinateur :



$$v_{lim} = 2{,}01.10^{-3} + \underbrace{22\,318}_{\text{pente}}\, r^2 \quad \text{où } r^2 = 0{,}9998$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta = \frac{2}{9}\,\frac{\rho-\rho_0}{\text{pente}}\cdot g} = 0{,}64 \text{ Pl}$$

ou $0{,}64$ kg m^{-1} s^{-1}

Et $\boxed{\tau = 2/9\,\rho r^2/\eta} = \underline{61\text{ ms}}$. Après 5τ, on peut considérer que $v = 0{,}99\,v_{lim}$ et conclure que le phénomène est facilement observable.

II) Mvt d'un proton dans un liquide

II.1.1) $\begin{cases} \text{Forces de frottement fluide } \vec{f} = -k\vec{v} \\ \text{Force magnétique : } \vec{f_L} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \end{cases}$

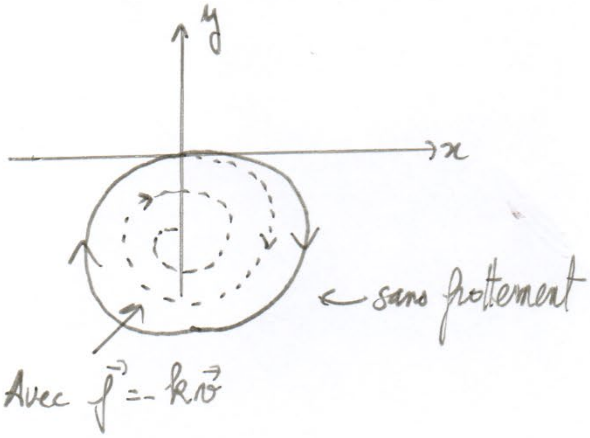
II.1.2) PFD : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -k\vec{v} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}/\tau = \omega \vec{v} \wedge \vec{u} \quad \text{où } \tau = \frac{m}{k}, \ \omega = \frac{eB}{m} \text{ et } \vec{u} = \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|}}$$

II.2.1) • Absence de frottements $\delta W_{nc} = 0$ et la force magnétique ne travaille pas d'où $\boxed{\dfrac{dE_c}{dt} = 0}$

• On va retrouver un <u>mouvement cyclotron</u> càd un mvt plan circulaire et uniforme de rayon : $R = \dfrac{v_0}{\omega}$ et de centre $C(0, -v_0/\omega)$

II.2.2) La force de frottement va abaisser v et donc E_c d'où une diminution de v : c'est une spirale.



II.2.3) II.1.2) $\Rightarrow \dfrac{d\vec{v}}{dt} + \dfrac{\vec{v}}{\tau} = \omega \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega v_y \\ -\omega v_x \\ 0 \end{vmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} dv_x/dt = -v_x/\tau + \omega v_y = a v_y - b v_x \\ dv_y/dt = -v_y/\tau - \omega v_x = -a v_x - b v_y \end{cases}$$

d'où $\boxed{b = 1/\tau, \ a = \omega}$

II.2.4) Soit $\underline{V} = v_x + j v_y$ d'où : $\dfrac{d\underline{V}}{dt} = (aV_y - bV_x) + j(-aV_x - bV_y)$

$\Leftrightarrow \dfrac{d\underline{V}}{dt} = V_y(a - jb) + V_x(-b - ja) = (V_x + jV_y)(-b - ja)$

$\Leftrightarrow \dfrac{d\underline{V}}{dt} + \underline{V}(a + jb) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\underline{V} = Ae^{-(b+ja)t}}$

Or à $t=0$, $\underline{V}(0) = v_0 \Rightarrow \underline{V} = v_0 e^{-(b+ja)t}$

d'où $\boxed{\begin{cases} v_x = \mathrm{Re}(\underline{V}) = v_0 e^{-bt}\cos(at) \\ v_y = \mathrm{Im}(\underline{V}) = -v_0 e^{-bt}\sin(at) \end{cases}}$

II.3.1) Soit $\underline{V} = \dfrac{d\underline{X}}{dt} \Rightarrow \underline{X} = \int \underline{V}\,dt = \int v_0 e^{-(b+ja)t}\,dt$

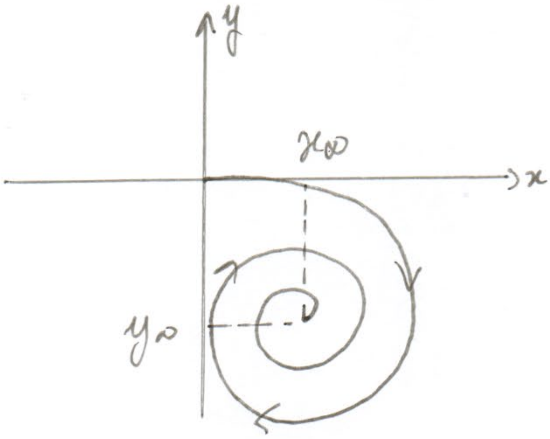
$\Rightarrow \underline{X} = \dfrac{v_0}{-b-ja} e^{-(b+ja)t} + C$

or $\underline{X}(0) = 0 \Rightarrow \boxed{\underline{X} = \dfrac{v_0}{b+ja}\left(1 - e^{-(b+ja)t}\right)}$

II.3.2) Lorsque $t \to \infty$: $\underline{X}_\infty = \dfrac{v_0}{b+ja} = x_\infty + j y_\infty = \dfrac{v_0}{\sqrt{a^2+b^2}}(b - ja)$

d'où $\boxed{x_\infty = \dfrac{b v_0}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ et } y_\infty = -\dfrac{a v_0}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

II.3.3)



- Le centre de la spirale se déplace sur la droite d'après mes calculs par rapport au cas sans frottement
- On appelle cette spirale, une spirale logarithmique.