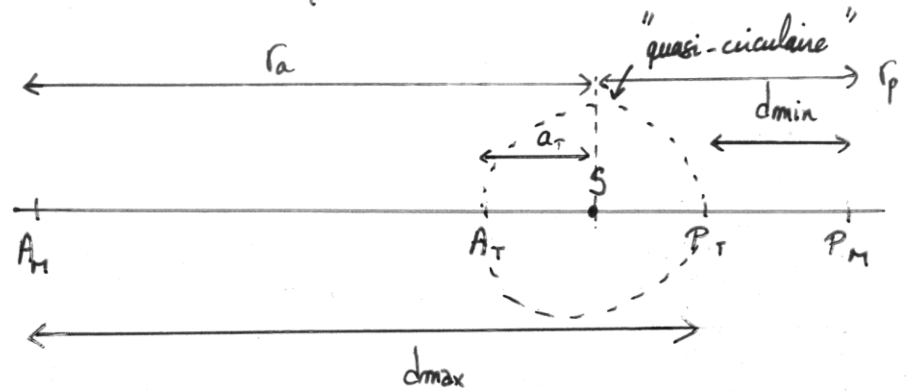
Seul sur Mars (Centrale – PSI – 2019)

Partie I : La planète Mars

Q1) D'après l'article les signaux mettent de $t_1 = 5\,min$ à $t_2 = 22\,min$ pour se propager entre les 2 planètes.

On a comme données : $\begin{cases} a_T = 150.10^6\,km \\ R_T = 6380\,km \\ R_M = 3390\,km \end{cases}$



Donc $2a_m = d_{min} + d_{max}$ et $\boxed{\begin{cases} r_a = d_{max} - a_T = 246.10^6\,km \\ r_p = d_{min} + a_T = 240.10^6\,km \end{cases}}$

$\Leftrightarrow 2a_m = c\,(t_1 + t_2)$

$\Leftrightarrow \boxed{a_m = \frac{c}{2}.(t_1+t_2)} = 2{,}43.10^{11}\,m \Rightarrow \underline{\underline{a_m = 243.10^6\,km}}$

Q2) D'après la troisième loi de Képler : $\frac{a_M^3}{T_M^2} = \frac{a_T^3}{T_T^2} = cste$ Choix de $T_T = 365{,}25\,jour$

$$\Rightarrow \boxed{a_M = a_T \left(\frac{T_M}{T_T}\right)^{2/3}} = \underline{\underline{228.10^6\,km}}$$

Or $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_S}{4\pi^2} \Rightarrow \boxed{M_S = \frac{4\pi^2}{G}\frac{a^3}{T^2}} = \underline{\underline{2{,}00.10^{30}\,kg}}$

Q3) Le champ de pesanteur s'il se limite au champ de gravitation :

$$g_M = \frac{GM_M}{R_M^2} = \frac{G.\ 4/3\pi R_M^3 \cdot \rho_M}{R_M^2} \quad \text{(astre sphérique homogène)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{g_M = \frac{4}{3}\pi G \rho_M R_M} = \underline{\underline{3{,}69\ ms^{-2}}}$$

II Tempête sur Mars

II.A L'atmosphère martienne

Q4) • D'après les données
$$\begin{cases} 1\,psi = 0{,}0689\,bar \\ p = 4{,}75\,psi \\ x(\text{Oxygène}) = 21{,}01\,\%. \end{cases}$$

Donc $p(O_2) = x(O_2).p = 0{,}0688\,bar$

• Or sur terre on a $p(O_2) \simeq 0{,}2\,bar$. De plus on admet que pour respirer il faut que $p(O_2) \geqslant 0{,}16\,bar$.

$\Rightarrow$ La pression partielle en oxygène est trop faible

Q5) Si on assimile l'atmosphère à un gaz parfait on a : $pV = nRT$

$$\Leftrightarrow p = \frac{mRT}{MV}$$

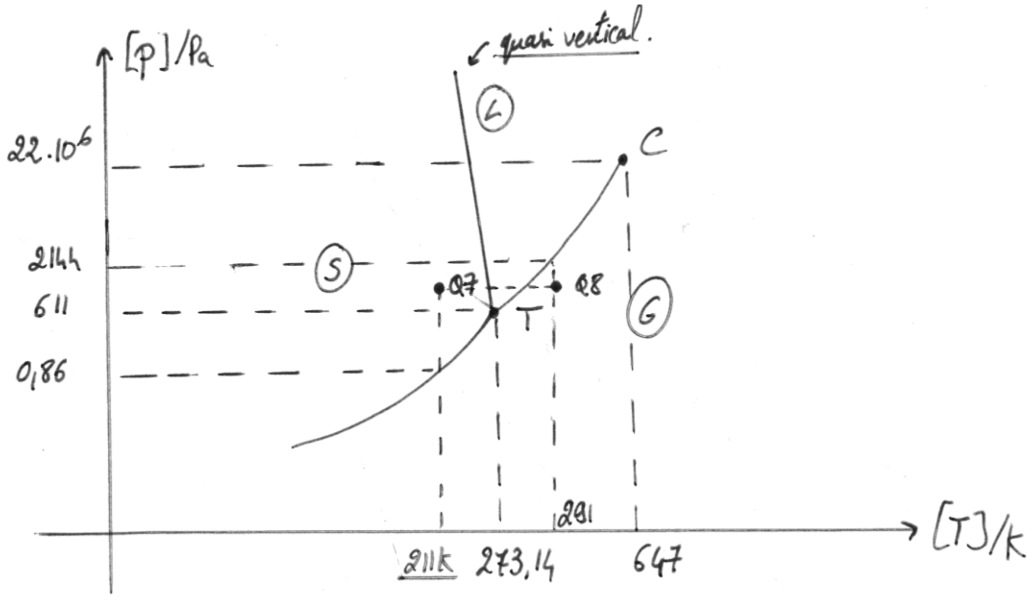
$$\Leftrightarrow p = \rho\frac{RT}{M}$$

Vu la composition incomplète de Mars on prend $M = 43{,}5\,g.mol^{-1}$ (97% CO_2, 3% N_2)

d'où : $\rho = \dfrac{pM}{RT} = 0{,}0187\ kg.m^{-3}$

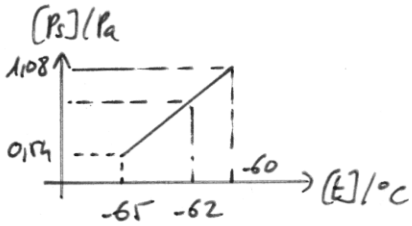
Sur terre : $\rho = 1{,}3\,kg.m^{-3}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{\rho_{mars}}{\rho_{terre}} = 0{,}014}$

Q6)



- Le pt triple est le point où les 3 phases sont en équilibre
- Au delà du point critique, il y a continuité de l'état fluide. Avant on distingue les 2 phases : (L) et (V).

Q7) D'après l'annexe pour $t = -62°C$ on a : $P_S = \frac{1{,}08 - 0{,}54}{5} \times 3 + 0{,}54$



$\Rightarrow$ $\underline{P_S = 0{,}864 \text{ Pa}}$ et $T = 211K$. Or $P_{Mars} = 758$ Pa, donc le point représentatif est obtenu dans la phase solide.

Q8) . Pour $t = 18{,}46°C$ on a $p_S = \frac{2338{,}8 - 1705{,}6}{5} \times 3{,}46 + 1705{,}6 = 2144$ Pa

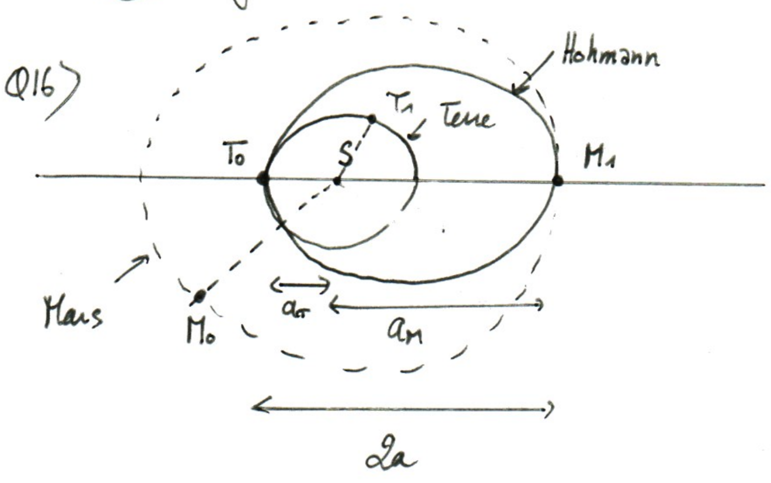
$\Rightarrow$ $P_{Mars} < P_S$: on est dans la phase gazeuse.

- Le corps étant formé principalement d'eau, il va se mettre à bouillir. De plus il n'aura plus assez d'O_2 pour respirer car $p(O_2) = \underline{1{,}06 \text{ Pa}}$

IV) Sauvetage de Mark Watney

IV.A) Trajectoire du vaisseau Hermès

Q16)



D'après la figure 6 : $2a = a_T + a_M \Rightarrow \boxed{a = \frac{a_T + a_M}{2}} = \underline{\underline{189.10^6\,km}}$

Q17) • Soit τ la durée du transfert t.q $\tau = \frac{T}{2}$

or $\frac{a^3}{T^2} = \frac{a_T^3}{T_T^2} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{1}{2} \cdot T_t \left(\frac{a}{a_T}\right)^{3/2}} = \underline{\underline{258,3\,jours}}$

• Positions de Mars au moment du lancement sur terre.

Pendant la durée τ : $\begin{cases} T_0 \rightarrow T_1 \\ M_0 \rightarrow M_1 \quad t.q \quad (\widehat{SM_0, SM_1}) = \alpha \\ N_0 \rightarrow N_1 \quad (\text{navette}) \end{cases}$

• Donc pendant $\begin{cases} \tau \quad \text{Mars parcourt } \alpha \\ \frac{T_M}{2} \quad \text{— " —} \quad \pi \end{cases} \Rightarrow \alpha/\pi = \frac{\tau}{T_M/2}$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = 2\pi \frac{\tau}{T_M}} = \underline{\underline{2,36\,rad = 135°}}$

• De même pour la terre $\frac{\beta}{\pi} = \frac{\tau}{T_T/2}$ où $\beta = (\widehat{ST_0, ST_1})$

$\Rightarrow \boxed{\beta = 2\pi\,\tau/T_T} = 4,44\,rad = \underline{\underline{254,5°}}$

Q18). Un nouveau tir peut avoir lieu lorsque α reprend la valeur de 135°.

Or $\begin{cases} \theta_T = \omega_T . t . \\ \theta_M = \omega_M t + \theta_0 \quad \text{où } \theta_0 = \pi - \alpha = 44{,}6° \end{cases}$

$\Rightarrow$ On pourra à nouveau lancer ssi $\theta_M - \theta_T = (\omega_M - \omega_T) t + \theta_0 = \theta_0 + 2\pi n$.

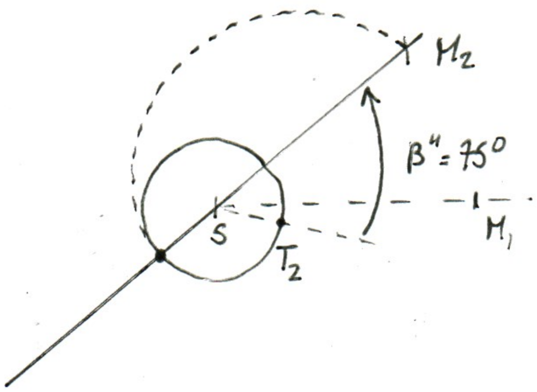
$$\Leftrightarrow (\omega_M - \omega_T) t = 2\pi n$$

$$\Leftrightarrow t = n . \frac{2\pi}{\omega_M - \omega_T} = n . \frac{1}{\frac{1}{T_M} - \frac{1}{T_T}}$$

$$\Leftrightarrow t = n . \frac{T_M T_T}{\underbrace{T_T - T_M}_{<0}}$$

Si $n = -1$ on obtient : $t = 779{,}9$ jour $\Rightarrow$ $\boxed{T_{sym} = 780 \text{ jour}}$

Q19) Pour envisager une hohmann de sortie il faut que la terre soit positionner $\beta' = 255°$ avant le périgée c'est-à-dire que $\widehat{ST_2, SM_2} = \beta'' = 75°$



Soit $\begin{cases} \theta_t = \omega_T t + \beta'' \\ \theta_m = \omega_M t \end{cases}$

Or $\theta_m - \theta_t = \beta'' + 2n'\pi$ $\Rightarrow (\omega_M - \omega_t) t - \beta'' = \beta'' + 2n'\pi$

D'où $(\omega_M - \omega_T)t = 2\beta'' + 2n'\pi$

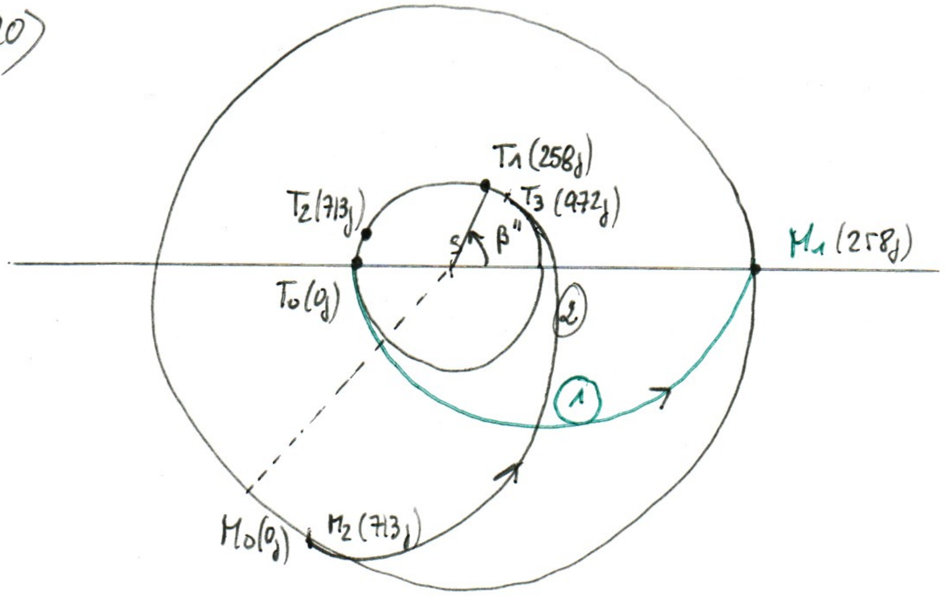
$$\Rightarrow 2\pi\left(\frac{1}{T_M} - \frac{1}{T_T}\right)t = 2\beta'' + 2n'\pi$$

$$\Rightarrow 2\pi \underbrace{\left(\frac{T_M - T_T}{T_M . T_T}\right)}_{<0} t = 2\pi\left(n' + \frac{\beta''}{\pi}\right) \Leftrightarrow -2\pi \frac{t}{T_{syn}} = 2\pi\left(n' + \frac{\beta''}{\pi}\right)$$

Prenons $n' = -1$, première valeur acceptable d'où :

$$\Rightarrow \boxed{\tau' = T_{syn}\left[1 - \frac{\beta''}{\pi}\right]} = 455 \text{ jours}$$

Q20)



Q21) Dans le cas "parfait" : $\underline{\text{Durée du transfert} = 2\tau + \tau'} = \underline{\underline{972 \text{ jours}}}$ CQFD

Le vaisseau hermès dispose d'une propulsion nucléaire d'où le temps de trajet moins important.