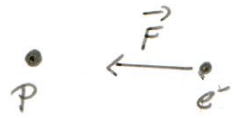
# Physique : DS2

## Partie A : La raie HI de l'hydrogène (Centrale PC – 2018)

Q1) Soit $\vec{F} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow \vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$




Q2) On a $dE_p = -\vec{F}.\overrightarrow{dOM} \Rightarrow E_p = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \underbrace{cste}_{=0}$ avec $\lim_{r\to\infty} E_p = 0$

Q3) Soit $\frac{d\vec{L}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$.

$\Rightarrow \vec{L} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = cste$

$\Rightarrow \vec{v}$ et $\overrightarrow{OM} \in$ au même plan qui est toujours orthogonal à $\vec{L}$

$\Rightarrow$ Le mouvement est plan

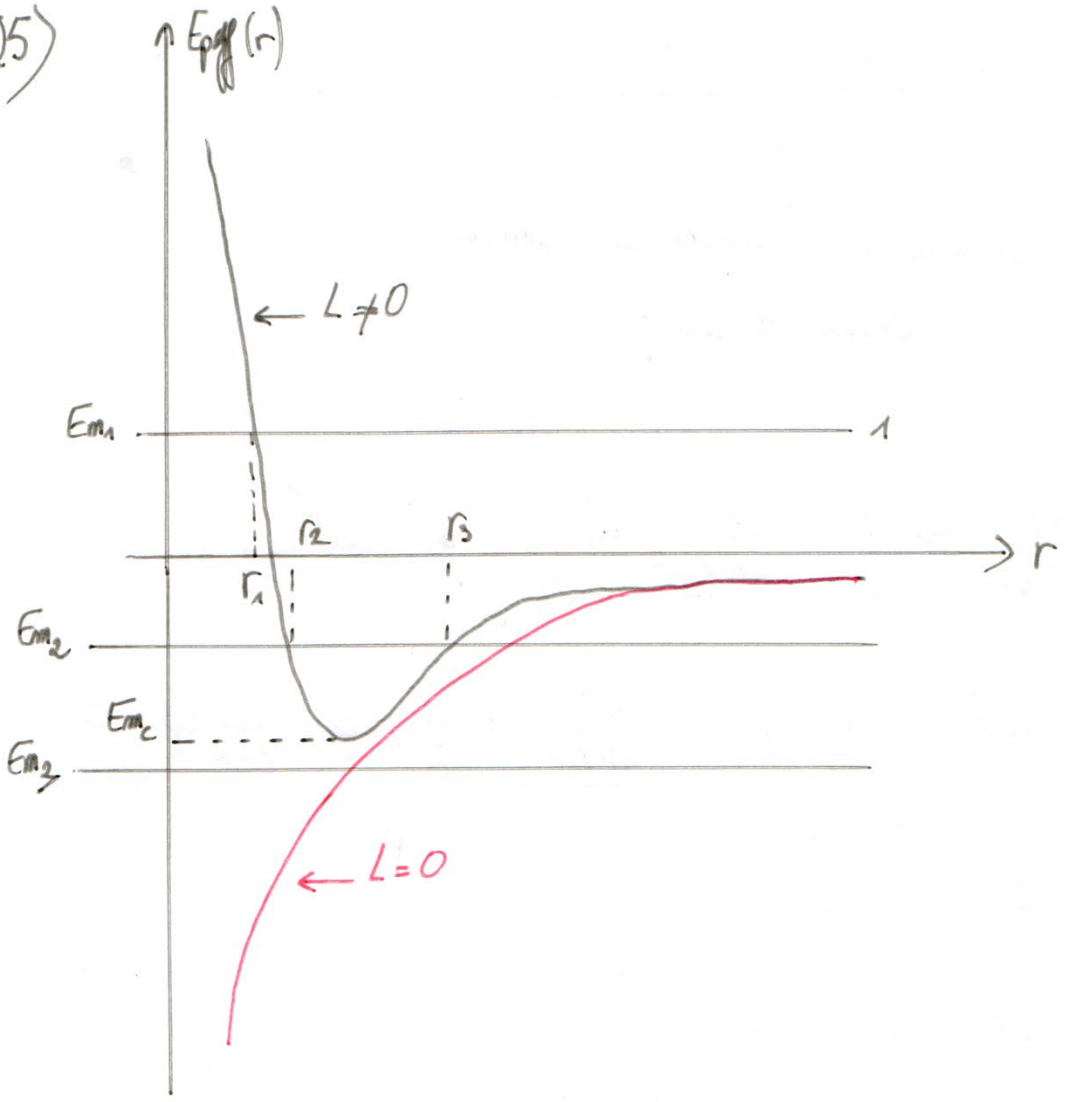
Q4) Soit $E_m = \frac{1}{2}m_e v^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{2}m_e\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right) - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

or $\|\vec{L}\| = m_e r^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\|\vec{L}\|}{m_e r^2} = \frac{L}{m_e r^2}$

d'où $E_m = \frac{1}{2}m_e\dot{r}^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{r^2}{2}\cdot\frac{L^2}{m_e r^4}$

$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2}m_e\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$ où $E_{peff}(r) = \frac{L^2}{2m_e r^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Q5)




1er cas : $L \neq 0$

- Si $E_m = E_{m_1}$, $r \geq r_1$ : état libre (hyperbole)
- Si $E_m = E_{m_2}$, $r_2 \leq r \leq r_3$ : état lié (ellipse)
- Si $E_m = 0$, parabole.
- Si $E_m = E_{m_3}$, états impossibles.

2ème cas : $L = 0$

- Si $E_m > 0$ : états impossibles
- Si $E_m < 0$ : états libres

Q6) Pour avoir une trajectoire circulaire : . $L \neq 0$

. $E_m = E_{m_c} = E_{p,eff,min}$

• Soit $\frac{dE_{p,eff}}{dr} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{L^2}{2m_e} \cdot \left(-\frac{2}{r^3}\right) + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 0$

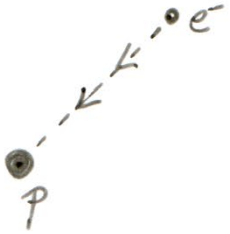
$\Leftrightarrow \frac{L^2}{m_e r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \Leftrightarrow r = \frac{4\pi\varepsilon_0 L^2}{m_e e^2}$ (1)

• Et $E_m = \frac{1}{2} m_e \frac{L^2}{m_e^2 r^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ car $\dot{r} = 0$

$= \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$

$= -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{m_e e^2}{4\pi\varepsilon_0 L^2} \Rightarrow E_m = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2 L^2}$ (2)

Q7) Si $L = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ colinéaires
$\Rightarrow$ trajectoire rectiligne




Q8) Soit : $L = mvr = n\hbar$

(1) $\Rightarrow r = \frac{4\pi\varepsilon_0 (n\hbar)^2}{m_e e^2}$

$\Rightarrow r = n^2 a_0$ où $a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m_e \cdot e^2} = 52{,}9$ pm

Q9) (2) $\Rightarrow E_m = -\frac{m_e \cdot e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2 (n\hbar)^2}$

$\Rightarrow E_m = \frac{E_0}{n^2}$ où $E_0 = -\frac{m_e \cdot e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2} = -13{,}6$ eV

Q10) Soit $\begin{cases} \langle E_c \rangle = \frac{3}{2} k_B T \quad \text{(On tient compte des 3 degrés de liberté de translation)} \\ E_i = -E_0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T = \frac{2}{3} \frac{|E_0|}{k_B} \simeq 10^5 K}}$$

Q11) Soit $|E_m - E_0| = E_0 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

Pour $\begin{cases} n = 2 \text{ on a } |E_2 - E_1| = 10,2 eV \quad \text{cas ①} \\ n \to \infty \text{ on a } |E_m - E_1| = 13,6 eV \quad \text{cas ②} \end{cases}$

d'où : $\begin{cases} \lambda_1 = hc \cdot \frac{1}{|E_2 - E_1|} = 1,22.10^{-7} m \\ \lambda_2 = hc \cdot \frac{1}{|E_m - E_1|} = 9,13.10^{-8} m \end{cases}$