Océans, atmosphère et communications (Centrale PC – 2018)

I) Particules chargées dans l'atmosphère

Q1) Soit $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v}\wedge\vec{B}_0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \partial v_x/\partial t \\ \partial v_y/\partial t \\ \partial v_z/\partial t \end{vmatrix} = \dfrac{q}{m}\begin{vmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{vmatrix} = \dfrac{q}{m}\begin{vmatrix} V_y B_0 \\ -V_x B_0 \\ 0 \end{vmatrix}$

. D'où $\boxed{dv_x/dt = \dfrac{qB_0}{m}V_y \ , \quad \dfrac{dV_y}{dt} = -\dfrac{qB_0}{m}V_z \quad \text{et} \quad \dfrac{dV_z}{dt} = 0}$

. D'où $\boxed{v_z = cste}$

. De plus $P = \vec{F_L}\cdot\vec{v} = 0 = \dfrac{dE_c}{dt} \Rightarrow \boxed{v^2 = cste}$

Q2) Soit $\vec{v} = \vec{w} + \vec{v}_{/\!/}$ où $\vec{v}_{/\!/} = v_z\vec{e_z}$

Comme $\begin{cases} \dfrac{dv_z}{dt} = 0 \\ \vec{V_z}\wedge\vec{B_0} = \vec{0} \end{cases}$ on a : $\boxed{m\dfrac{d\vec{w}}{dt} = q\vec{w}\wedge\vec{B_0}}$

Q3) Posons $\vec{\Omega_c} = \dfrac{(-q)}{m}\vec{B_0} \Rightarrow \dfrac{d\vec{w}}{dt} = \vec{w}\wedge\vec{\Omega_c} \Rightarrow \begin{vmatrix} \dfrac{dw_x}{dt} \\ dw_y/dt \\ dw_z/dt \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_c \end{vmatrix}$

$\Leftrightarrow w_z = cste$ et $\begin{cases} dw_x/dt = w_y\Omega_c & (1) \\ dw_y/dt = -w_x\Omega_c & (2) \end{cases}$

On intègre d'où : $\begin{cases} w_x = \Omega_c y + C_1 \\ w_y = -\Omega_c x + C_2 \end{cases}$

Prenons comme CI : $\underbrace{\begin{cases} w_x(0) = v_1 \\ w_y(0) = 0 \end{cases}}_{\text{Choix d'un bon système d'axes}}$ et $\overbrace{\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}}^{\text{Choix le plus simple}} \Rightarrow \begin{cases} w_x = \Omega_c y + v_1 & (1') \\ w_y = -\Omega_c x & (2') \end{cases}$

(1) s'écrit alors : $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\Omega_c^2 x \\ (2)\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\Omega_c^2 y - \Omega_c v_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = A\cos(\Omega_c t) + B\sin(\Omega_c t) \\ y = A'\cos(\Omega_c t) + B'\sin(\Omega_c t) + v_1/\Omega_c \end{cases}$

les CI donnent : $\begin{cases} A = 0 \text{ et } B = v_1/\Omega_c \\ A' = -\dfrac{v_1}{\Omega_c} \text{ et } B' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{v_1}{\Omega_c}\sin(\Omega_c t) \\ y - \dfrac{v_1}{\Omega_c} = -\dfrac{v_1}{\Omega_c}\cos(\Omega_c t) \end{cases}$

Donc $x^2 + \left(y - \dfrac{v_1}{\Omega_c}\right)^2 = \left(\dfrac{v_1}{\Omega_c}\right)^2$

Equation d'un cercle de rayon $\boxed{\rho_c = \left|\dfrac{v_1}{\Omega_c}\right| \text{ où } \Omega_c = -\dfrac{q}{m} B_0}$

Q.4) L'ordre de grandeur B_0 est $10^{-5} \to 10^{-4}$ T $\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \Omega_c \simeq 10^7 \text{ rad.s}^{-1} \text{ pour } e^- \\ \Omega_c \simeq 10^4 \text{ rad.s}^{-1} \text{ pour } p^+ \end{cases}}$

Q5) Soit $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E}_1 + \vec{v} \wedge \vec{B}_0) \Leftrightarrow \boxed{\begin{vmatrix} \dfrac{dv_x}{dt} \\ \dfrac{dv_y}{dt} \\ \dfrac{dv_z}{dt} \end{vmatrix} = \dfrac{q}{m} \begin{vmatrix} v_y B_0 + E_1 \\ -v_x B_0 \\ 0 \end{vmatrix}}$

Q6) On cherche une solution de la forme $\vec{v} = \vec{V_d} = V_{dx}\vec{e_x} + V_{dy}\vec{e_y}$

$\Rightarrow \begin{cases} 0 = q/m\,(V_{dy} B_0 + E_1) \\ 0 = \dfrac{q}{m}(-V_{dx} B_0) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{V_d} = -\dfrac{E_1}{B_0}\vec{e_y}}$ Solution unique

Q.7) Soit $\vec{u} = \vec{v} - \vec{V_d}$

d'où $\dfrac{d\vec{u}}{dt} = \dfrac{q}{m}\left(\vec{E_1} + (\vec{u} + \vec{V_d}) \wedge \vec{B_0}\right)$

or d'après Q6 : $\dfrac{q}{m}\left[\vec{E_1} + \vec{V_d} \wedge \vec{B_0}\right] = \vec{0} \Rightarrow \dfrac{d\vec{u}}{dt} = \dfrac{q}{m}(\vec{u} \wedge \vec{B_0})$

Donc $\vec{v} = \vec{u} + \vec{V_d}$ se décompose par deux termes :

$\begin{cases} \vec{u} \text{ responsable d'un mvt circulaire dans le plan } (xOy) \\ \vec{V_d} \text{ ——— d'un mvt rectiligne suivant } \vec{u_y} \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{L'ensemble forme une trajectoire cycloïdale}}$