Vol d'une balle de Golf (Centrale PC – 2012)

II.A) . Ecoulement stationnaire $\vec{v}$ ne dépend pas de t.

. Invariance par translation selon Oz : $\vec{v}$ ne dépend pas de z.

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{v}(r,\theta)}$$

II.B) Quand $r \to \infty$: $\boxed{\vec{v} = \vec{v_0}}$

Quand $r = R$: $\boxed{v_r = 0}$ par continuité du fluide parfait

II.C) Ecoulement irrotationnel : $\vec{rot}\,\vec{v} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{v} = \vec{grad}\,\phi$

II.D) Soit $\vec{v} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{array}{l} \left(-v_0 + \dfrac{P}{2\pi r^2}\right)\cos\theta = v_r \\ \left(v_0 + \dfrac{P}{2\pi r^2}\right)\sin\theta + \dfrac{R^2\Omega}{r} = v_\theta \end{array}} \\ 0 = v_z . \end{vmatrix}$

II.E) Soit $\lim\limits_{r\to\infty} \vec{v} = \vec{v_0} \iff -v_0\cos\theta\,\vec{u_r} + v_0\sin\theta\,\vec{u_\theta} = v_0\,\vec{u_x}$

$\Rightarrow \vec{u_x} = -\cos\theta\,\vec{u_r} + \sin\theta\,\vec{u_\theta}$ ce qui est vraie

De plus $v_r(R) = 0 \iff \boxed{P = 2\pi R^2 v_0}$

II.F) Ecoulement parfait, stationnaire, incompressible et irrotationnel

$\rightarrow$ Théorème de Bernoulli t.q :

$$\frac{p(r)}{\mu} + \frac{v^2(r)}{2} = \frac{p_0}{\mu} + \frac{v_0^2}{2}$$

Si on se place en $r = R$:

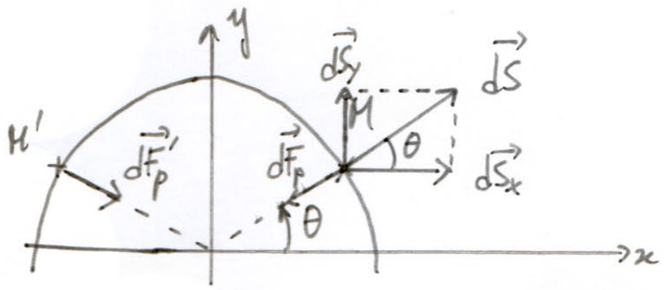
$$p(R,\theta) = p_0 + \rho\left(\frac{v_0^2}{2} - \frac{v^2(R)}{2}\right)$$

$$= p_0 + \frac{\rho}{2}\left(v_0^2 - \left[v_0\left(1+\frac{R^2}{R^2}\right)\sin\theta + \frac{R^2}{R}\Omega\right]^2\right)$$

$$= p_0 + \frac{\rho}{2}v_0\left(v_0 - 4\sin^2\theta\, v_0 - \frac{(R\Omega)^2}{v_0} - 4\sin\theta R\Omega\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{p(R,\theta) = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 - \left(2\rho v_0^2\sin^2\theta + 2\rho v_0 R\Omega\sin\theta + \rho\frac{R^2\Omega^2}{2}\right)}$$

II.G) Soit $\vec{F_p} = \iint d\vec{F_p} = -\iint_S p(R,\theta)\,\vec{dS}$



Or $\vec{dF'_{px}} + \vec{dF_{px}} = \vec{0}$ car $P(M) = P(M')$ vu que $p(\theta)$ est impair.

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F_p} \text{ n'a pas de composante selon } Ox}$$

II.H) <u>Calculons F_{py}</u> : $F_{py} = +\iint dF_{py} = -\iint p(R,\theta)\cdot dS_y$

$$\Leftrightarrow F_{py} = -\iint p(R,\theta)\,R\,dz\,d\theta\,\sin\theta \quad \text{où on note } p(R,\theta) = A + B\sin\theta + C\sin^2\theta$$

$$= -Rh\left[\int_0^{2\pi} A\sin\theta\,d\theta + \int_0^{2\pi} B\sin^2\theta\,d\theta + \int_0^{2\pi} C\sin^3\theta\,d\theta\right]$$

or $\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta = 0$, $\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta = \pi$, $\int_0^{2\pi}\sin^3\theta\,d\theta = -\int_0^{2\pi}(1-\cos^2\theta)\,d(\cos\theta)$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \sin^3\theta \, d\theta = -\left[\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{2\pi} = 0$$

donc $F_{py} = -Rh\beta\pi$

$$\Rightarrow F_{py} = +Rh\pi \,.\, 2\rho v_0 R\Omega$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F_p} = 2\rho v_0 \pi R^2 h \Omega \vec{u_y}}$$

Or $\vec{v_0} \wedge \vec{\Omega} = -v_0 \vec{u_x} \wedge \Omega \vec{u_z} = v_0 \Omega \vec{u_y}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F_p} = \alpha \vec{v_0} \wedge \vec{\Omega} \text{ où } \alpha = 2\rho \pi R^2 h}$$

II.I.1) Si $\Omega > 0$, la portance est dirigée vers "le haut" et va aller plus loin
Si $\Omega < 0$ ——— " ——— "le bas" et va aller moins loin.

II.I.2) On obtient $\begin{cases} F_p = 0{,}4\,N \\ P = 0{,}45\,N \end{cases}$ $\Rightarrow$ la force de Magnus compense pratiquement le poids.

II.I.3) Si $\vec{\Omega} \neq \Omega \vec{u_z}$ il va y avoir des composantes de $\vec{F_p}$ suivant Ox et Oz et la balle va être déviée de la trajectoire désirée.

II.I.4) Il faut tenir compte de la viscosité de l'air. La balle va être freinée et elle tournera moins vite