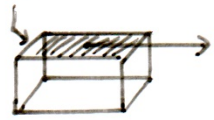
# Etude de la couche limite (Centrale PC – 2011)

## I) Préliminaires

**I.A)** . On suppose que $\vec{v} = v_x(y,t)\,\vec{u}_x$ d'où la force :

$$\boxed{\vec{dF} = \eta \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_y dS\,\vec{u}_x}$$

en Pl ou Pa.s




$\vec{dF}$ si $\frac{\partial v}{\partial y} > 0$.

. Les particules situées en $y+dy$ passent en $y$ et amènent leur quantité de mouvement transverse : $m v_x(y+dy)\,\vec{u}_x$ d'où le transport convectif.

. Le brassage moléculaire est dû à l'agitation thermique.

**I.B)** Sur un élément de volume $d\tau$ :

$$\vec{dF} = \vec{dF}_{y+dy} + \vec{dF}_y$$

$$= \eta\, dS \left( \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y+dy} - \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_y \right) \vec{u}_x$$

$$= \eta\, dS\, dy \cdot \left.\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right|_y \vec{u}_x$$

$$= \eta \left.\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right|_y d\tau\, \vec{u}_x$$

Si on considère les axes $(Ox)$ et $(Oz)$ : $\boxed{\vec{dF} = \eta\left(\vec{\Delta}\vec{v}\right) d\tau}$ pour un fluide newtonien

**I.C.1** En appliquant le PFD : $\frac{D\vec{p}}{Dt} = \sum \vec{dF}$

$$\Leftrightarrow \mu\, d\tau \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\text{grad}}\right)\vec{v} \right) = \mu \vec{g}\, d\tau + \eta\, \vec{\Delta}\vec{v}\, d\tau - \vec{\text{grad}}\, p\, d\tau$$

si l'écoulement est incompressible.

D'où pour un fluide newtonien en écoulement incompressible :

$$\boxed{\mu\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\right)=-\overrightarrow{\text{grad}}\,p+\mu\vec{g}+\eta\vec{\Delta}\vec{v}}$$

I.C.2) Sur $\vec{u}_x$ : $\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+\underbrace{v_x\cdot\frac{\partial}{\partial x}v_x(y,t)}_{=0}\right)=\underbrace{-\frac{\partial p}{\partial x}}_{=0\text{ p ne dépend pas de x.}}+0+\eta\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}$.

D'où : $\boxed{\frac{\partial v}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \text{ où } \nu=\frac{\eta}{\mu}}$ en $m^2.s^{-1}$

I.D . La diffusion augmente le désordre du système isolé (en le rendant plus homogène), le manque d'information augmente donc son entropie $\Rightarrow$ évolution irréversible

. Exemples d'équations "réversibles" : * D'Alembert $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$

* OH : $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\omega_0^2 x=0$

. On reconnait une évolution réversible si remplaçant $t$ par "$-t$" celle-ci reste inchangée.

I.E Etude en ODG : $\frac{\partial v}{\partial t}\sim\frac{v}{\tau}$ ; $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\sim\frac{v}{L_y^2}$ d'où : $\frac{v}{\tau}\sim\nu\frac{v}{L_y^2}$

$$\Leftrightarrow \boxed{L_y\sim\sqrt{\nu\tau}}$$

II ODG de $\delta$

D'après la formule précédente : $\delta\sim\sqrt{\nu\tau}$

$\sim\sqrt{\nu.\frac{x_0}{U}}$

Or $Re=\mu\frac{U x_0}{\eta}=\frac{U x_0}{\nu}$ d'où $\delta=\sqrt{\frac{x_0}{Re}.x_0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\delta}{x_0}=\sqrt{\frac{1}{Re_{x_0}}}}$

* D'où $\delta/x_0\ll 10^{-2}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{Re_{x_0}\gg 10^4}$

# III) Poiseuille plan

## III.A.1)

a) Cette fois le champ de pression dépend de $x, y$ d'où en régime stationnaire :

$$\begin{cases} 0 = +\eta \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \dfrac{\partial p}{\partial x} \\ 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial y} - g \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = +\eta \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = -g \end{cases}}$$

b) On a $\dfrac{\partial p}{\partial x} = \eta \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \Leftrightarrow F(x) = G(y)$ par conséquent les 2 fonctions sont égales à une constante d'où : $\boxed{\dfrac{\partial p}{\partial x} = k}$

c) Donc $\eta \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = k \Leftrightarrow v = \dfrac{k}{\eta}\dfrac{y^2}{2} + \alpha y + \beta.$

or $v(-d/2) = v(d/2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{k}{\eta}\dfrac{d^2}{8} + \alpha\dfrac{d}{2} + \beta = 0 \\ \dfrac{k}{\eta}\dfrac{d^2}{8} - \alpha\dfrac{d}{2} + \beta = 0 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \dfrac{k}{\eta} d^2/8 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{v_x}(y) = \dfrac{kd^2}{8\eta}\left(1 - \dfrac{4y^2}{d^2}\right)\vec{u}_x}$ profil parabolique.

## III.A.2)

Soit $\Delta p = -kL$ d'où : $D_v = \iint_{section} \vec{v}\cdot\vec{dS}$

$\Leftrightarrow D_v = -\dfrac{\Delta p}{L}\cdot\dfrac{d^2}{8\eta}\displaystyle\int_{-d/2}^{d/2}\int_0^h \left(1 - \dfrac{4y^2}{d^2}\right)dy\,dz$

$\Leftrightarrow D_v = -\dfrac{\Delta p}{L}\cdot\dfrac{d^2}{8\eta}\cdot h\cdot\left[y - \dfrac{4}{3}\dfrac{y^3}{d^2}\right]_{-d/2}^{d/2} = -\dfrac{\Delta p\cdot d^2 h}{8\eta L}\left[d - \dfrac{4}{3d^2}\dfrac{d^3}{4}\right]$

$\Leftrightarrow \boxed{D_v = -\dfrac{\Delta p}{L}\dfrac{d^3 h}{12\eta}}$ Cette loi rappelle la loi d'Ohm $i = \dfrac{U}{R}$ d'où $\boxed{R_h = \dfrac{12L\eta}{d^3 h}}$

III.A.3) . Si $\Delta p_2 = \frac{\Delta p_1}{2}$ alors $D_{v_2} = \frac{D_{v_1}}{8}$

- Pour deux tubes identiques d'épaisseur $d/2$ alors $D_v = \frac{D_{v_1}}{4}$
- Alors que pour une résistance électrique : $R_e = \frac{l}{\gamma h d} \Rightarrow D_v = D_{v_1}$.

Conclusion : Pour un écoulement les diminutions de section réduisent considérablement le débit.

III.B) On atteint le régime parabolique lorsque $\delta = d/2$ d'où en utilisant le résultat de la question II :
$$\frac{\delta}{x_1} = \sqrt{\frac{1}{Re}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x_1}{d/2} = \sqrt{Re} \Leftrightarrow \boxed{\frac{x_1}{d} = \frac{1}{2}\sqrt{Re}}$$

IV Equation du mouvement dans la couche limite

IV.A L'écoulement est incompressible d'où $\frac{D\mu}{Dt} = 0 \Rightarrow \mathrm{div}\,\vec{v} = 0$
$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0}$$

IV.B) On est en régime stationnaire d'où :
$$\boxed{\begin{cases} \mu\left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \Delta v_x. \\ \mu\left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \mu g + \eta \Delta v_y \end{cases}}$$

IV.C.1) En ODG : $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$ s'écrit : $\frac{v_x}{x_0} + \frac{v_y}{\delta} \sim 0$

donc : $\frac{v_y}{v_x} + \frac{\delta}{x_0} \sim 0$ d'où : $\boxed{\frac{v_y}{v_x} \sim \frac{1}{\sqrt{Re_{x_0}}}}$ or $Re_{x_0} \gg 1 \Rightarrow \frac{v_y}{v_x} \ll 1$

IV.C.2 Toujours en ODG :

- $\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \sim \dfrac{v_x}{\delta^2}$ , $\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \sim \dfrac{v_x}{x_0^2}$ $\Rightarrow \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \Big/ \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \sim \dfrac{x_0^2}{\delta^2} = Re_{x_0} \gg 1$

$$\Rightarrow \boxed{\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \gg \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}} \quad (1)$$

- De même : $\boxed{\dfrac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \gg \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}}$

IV.C.3 • Soit $v_y . \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \sim v_y . \dfrac{v_x}{\delta}$ or $\dfrac{\delta}{x_0} \sim \dfrac{v_y}{v_x}$ (IV.C.1)

d'où : $v_y . \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \sim \dfrac{v_x^2}{x_0}$

$$\Rightarrow \boxed{v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \simeq v_x . \dfrac{\partial v_x}{\partial x}}$$

• Et, $v_x . \dfrac{\partial v_x}{\partial x} \sim \dfrac{v_x^2}{x_0}$

• Et : $\nu . \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \sim \nu \dfrac{v_x}{\delta^2} \sim \nu . \dfrac{Re_{x_0}}{x_0^2} . v_x$.

or $Re_{x_0} = \dfrac{v_x . x_0}{\nu}$ $\Rightarrow \nu \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \sim \dfrac{v_x^2}{x_0}$

D'où : $\boxed{v_y . \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \simeq v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} \simeq \nu . \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}}$

IV.C.4 D'où les équations
$$\begin{cases} \mu\left(v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y}\right) \overset{(1)}{=} -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \eta . \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = -\mu g \text{ car on néglige les dérivées partielles de } v_y. \end{cases}$$

IV.D Hors de la couche limite on retrouve l'équation d'Euler stationnaire avec

$\nu \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0$ d'où $v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} \simeq v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \simeq 0$ (IV.C.4)

$\Rightarrow \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0$ en dehors de la couche limite.

D'après l'énoncé on a donc $\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0$ dans la couche limite d'où :

$$\boxed{v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} = \nu . \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad \text{où } \nu = \eta/\mu}$$