Physique : DM1

L'atome au cours du 19$^{\text{ème}}$ siècle (CCP – 2019 – PC)

Q1) Selon le modèle de Thomson, la répartition des charges positives est uniforme, donc toutes les particules α lancées contre une feuille d'or devraient avoir le même comportement

Q2) La force de Coulomb exercée sur "α" par le noyau d'or est :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e.Ze}{d^2}\vec{e_r} \Leftrightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\vec{e_r}}$$

or $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,E_p$ d'où : $dE_p = -\frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\,d\text{"}d\text{"}$

$$\Rightarrow E_p = +\frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 d} + cste$$

or $\lim\limits_{d\to\infty} E_p = 0$ d'où $\boxed{E_p = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 d}}$

Par conséquent : $\boxed{\begin{cases} \vec{F} = k/d^2\,\vec{e_r} \\ E_p = k/d \end{cases}}$ où $k = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0}$

. $\vec{F}$ est une force conservative $\Rightarrow E_m = cste$

. $\vec{F}$ est une force centrale $\Rightarrow \vec{L_o} = \overrightarrow{cste}$

Q3) L'énergie mécanique est telle que : $E_m = \frac{1}{2}m_\alpha V_0^2 + E_p$

Or $E_p(t=0) = \frac{k}{d_\infty} \to 0$ d'où $\boxed{E_m(t=0) = \frac{1}{2}m_\alpha V_0^2}$

Q4) Par définition : $\vec{L_o} = \vec{OM} \wedge m_\alpha \vec{v_0}$

$= (X\vec{e_x} + b\vec{e_y}) \wedge v_0 \vec{e_x} . m_\alpha .$

$\Leftrightarrow \boxed{\vec{L_o} = -b m_\alpha v_0 \vec{e_z}}$

Q5) A t : $\vec{L_o} = m_\alpha \begin{vmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \dot{d} \\ d\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix} = \underline{\underline{m_\alpha d^2 \dot{\theta} \vec{e_z}}}$

Comme $\vec{L_o} = \vec{cste}$: $m_\alpha d^2 \dot{\theta} = -b m_\alpha v_0$

$\Leftrightarrow \boxed{d^2\dot{\theta} = -b v_0}$

Q6). Soit $Em(t) = Em(0) \Leftrightarrow \frac{k}{d} + \frac{1}{2} m_\alpha (\dot{d}^2 + (d\dot{\theta})^2) = \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2$

. Au sommet de la trajectoire en S, la vitesse est perpendiculaire à $\vec{OS} \Rightarrow \vec{v} = v\vec{e_\theta}$

$\Rightarrow \dot{d}_m = 0$

d'où $\frac{1}{2} m_\alpha d_m^2 \dot{\theta}_m^2 + \frac{k}{d_m} = \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2$ (1)

. Et en S : $\vec{L_o} = \vec{OS} \wedge m\vec{v_s} = m_\alpha d_m (d_m \dot{\theta}_m) \vec{e_z}$
$= -b m_\alpha v_0 \vec{e_z}$ $\Bigg\} \Rightarrow \dot{\theta}_m = -\frac{b v_0}{d_m^2}$ (2)

(2) et (1) donnent : $\frac{1}{2} m_\alpha d_m^2 \left(-\frac{b v_0}{d_m^2}\right)^2 + \frac{k}{d_m} = \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2$

$\times d_m^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m_\alpha b^2 v_0^2 + k d_m - \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2 d_m^2 = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{d_m^2 - \frac{2k}{m_\alpha v_0^2} d_m - b^2 = 0}$ t.q $\Delta = \sqrt{\frac{4k^2}{m_\alpha^2 v_0^4} + 4b^2}$

$\Rightarrow d_m = \frac{k}{m_\alpha v_0^2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{m_\alpha^2 v_0^4} + b^2}$ < 0 si on prend le signe $\ominus$.

D'où $\boxed{d_m = \dfrac{k}{m_\alpha v_0^2}\left[1 + \sqrt{1 + \dfrac{b^2 m_\alpha^2 v_0^4}{k^2}}\right]}$

Q7) PFD : $m_\alpha \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{k}{d^2}\vec{e_r}$

d'où sur $\vec{e_x}$: $m_\alpha \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{k}{d^2}\cos\theta$

or $d^2\dot{\theta} = -bv_0$ (Q.5)

$\Rightarrow \boxed{m_\alpha \dfrac{dv_x}{dt} = -\dfrac{k}{bv_0}\cos\theta \cdot \dot{\theta}} \Rightarrow dv_x = -\dfrac{k}{m_\alpha b v_0}\cos\theta\, d\theta$

On intègre cette relation : $\displaystyle\int_{v_x(\pi)}^{v_x(\varphi)} dv_x = -\frac{k}{m_\alpha b v_0}\int_{\pi}^{\varphi}\cos\theta\, d\theta$

entre $\underbrace{\theta = \pi}_{t=0}$ et $\underbrace{\theta = \varphi}_{t\to\infty}$

$\Leftrightarrow v_x(\varphi) - v_x(\pi) = -\dfrac{k}{m_\alpha b v_0}(\sin\varphi - \sin\pi)$

or $\begin{cases} v_x(\pi) = v_0 \\ v_x(\varphi) = v_\infty \cos\varphi \end{cases} \Rightarrow v_\infty\cos\varphi - v_0 = -\dfrac{k}{m_\alpha b v_0}\sin\varphi$

Or $E_m = cste \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}m_\alpha v_0^2 + \underbrace{\dfrac{k}{d(t=0)}}_{\simeq 0} = \dfrac{1}{2}m_\alpha v_\infty^2 + \underbrace{\dfrac{k}{d(t\to\infty)}}_{\simeq 0} \Rightarrow \underline{v_0 = v_\infty}$

d'où $v_0(\cos\varphi - 1) = -\dfrac{k}{m_\alpha b v_0}\sin\varphi$

$\Leftrightarrow v_0\left(-2\sin^2\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)\right) = -\dfrac{k}{m_\alpha b v_0} \times 2\sin(\varphi/2)\cos(\varphi/2)$

D'où $\boxed{\tan(\varphi/2) = \dfrac{k}{m_\alpha b v_0^2}}$

Q8) On peut définir le rebond si $\varphi > \pi/2$ or $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ d'où :

Il y aura rebond ssi $\frac{k}{m_\alpha b v_0^2} > 1$

$$\Leftrightarrow \boxed{b < \frac{k}{m_\alpha v_0^2}}$$

Dans le cas du modèle de J.J. Perrin il faudra que les particules soient proches du noyau pour pouvoir rebondir.

Q9) D'après Q6 : $d_m = \frac{k}{m_\alpha v_0^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2(\varphi/2)}}\right)$

or $1 + \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x \cdot \tan^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$

$$\text{d'où } \boxed{d_m = \frac{k}{m_\alpha v_0^2}\left(1 + \frac{1}{\sin \varphi/2}\right)}$$

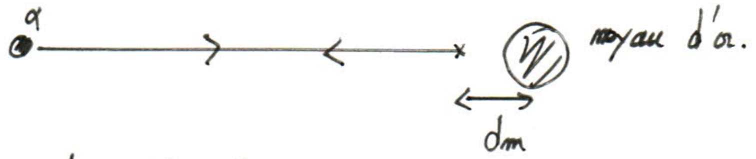
Q10) Or d_m est minimal si $\sin(\varphi/2)$ est maximal

$\Leftrightarrow \varphi = \pi$

$$\text{d'où } \boxed{d_{m_{min}} = d_m(\pi) = \frac{2k}{m_\alpha v_0^2}}$$

Q11) . Si $\varphi = \pi$ alors $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{k}{m_\alpha b v_0^2}$ d'après Q.7

d'où $b = 0$ et la trajectoire est rectiligne selon (Ox).



. On a $E_m = \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2 + \frac{k}{d^2} = \frac{k}{d_m^2}$ $\Rightarrow$ si $d_m \to 0$ alors $v_0 \to \infty$ par conséquent d_m est une borne supérieure du rayon du noyau t.q $\boxed{d_m = \dfrac{K}{E_p} = \dfrac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 E_m}} = \underline{4{,}5.10^{-14}\,m}$

Q12) Plus l'énergie des particules sera élevée, plus on pourra étendre des valeurs de d_m faible et par conséquent affiner la mesure du rayon du noyau.

Q13) PFD appliqué à l'e^- : $m\vec{a} = \vec{F}$

$$\Leftrightarrow m_e \frac{v^2}{r}\vec{e_r} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{v} = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r . m_e}}\,\vec{e_\theta}} \quad \text{car } \vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e_\theta}.$$

Q14) Par définition : $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m_e v^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$$= \frac{1}{2}m_e . \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r m_e} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$= -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\boxed{\text{D'où } E_m = A f(r) \text{ avec } \begin{cases} A = -e^2/8\pi\varepsilon_0 \\ f(r) = 1/r \end{cases}}$$

Q15) Pour une trajectoire circulaire $\omega = \frac{v}{r} \rightarrow \omega^4 = \frac{1}{r^4} . \frac{e^4}{16\pi^2\varepsilon_0^2 r^2 m_e^2}$

$$\text{d'où } P(r) = \frac{e^4}{16\pi^2\varepsilon_0^2 r^6 m_e^2} \quad \frac{e^2 r^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$$

or $\overbrace{P(r)}^{W} = P_0 / r^4$

$$\rightarrow \boxed{P_0 = \frac{e^6}{192 . \pi^3 \varepsilon_0^3 m_e^2 c^3}} \quad \text{qui s'exprime en } \underline{\underline{W.m^4}}$$

Si la particule émet de l'énergie électromagnétique alors elle perd de l'Em.

Si Em ↘, vue que $E_m = -\frac{|A|}{r}$ on a alors r qui diminue.

Q16) D'après le théorème de la puissance mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = -P(r)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{A}{r^2}\cdot\frac{dr}{dt} = -\frac{P_0}{r^4} \quad \text{car } d\left(\frac{1}{r}\right)/dt = \frac{d(1/r)}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{r^2\frac{dr}{dt} = \frac{P_0}{A}}$$

Q17) D'où : $r^2 dr = \frac{P_0}{A}dt$

$$\Rightarrow \int_R^0 r^2 dr = \int_0^{t_f}\frac{P_0}{A}dt \Rightarrow -\frac{R^3}{3} = \frac{P_0}{A}t_f$$

$$\Rightarrow \boxed{t_f = \frac{|A|R^3}{3P_0}} = 2{,}1.10^{-10}\,s$$

où $\begin{cases} A = -1{,}15.10^{-28}\ Jm. \\ P_0 = 1{,}82.10^{-49}\ Wm^4 \end{cases}$

Le temps est très petit et par conséquent l'atome serait instable.

Q18) D'après Bohr : $L = n\hbar \Leftrightarrow mvr = n.h/2\pi$

$$\Leftrightarrow mr.\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r m_e}} = \frac{nh}{\sqrt{4\pi^2}} \Leftrightarrow m_e^2 r.\frac{e^2}{\cancel{4\pi\varepsilon_0 m_e}} = \frac{n^2h^2}{4\pi^2}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{n^2h^2.\varepsilon_0}{m_e\pi e^2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{r_n = n^2 r_0 \text{ où } r_0 = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2}} = 5{,}3.10^{-11}\,m$$

Q19) Si l'onde interfère après un tour sur son orbite alors :

$$\mathcal{P} = n\lambda \iff n\lambda = 2\pi r \quad \text{où } \lambda = \frac{h}{m_e v}$$

$$\iff n.\frac{h}{m_e v} = 2\pi r$$

$$\iff m_e v r = \frac{nh}{2\pi}$$

$$\iff \boxed{m_e v r = n\hbar}$$

Q20) On a $\begin{cases} E_m = -\dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} \\ \text{et} \\ r = n^2 r_0 \end{cases}$ d'où $E_m = -\dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 n^2 r_0} = -\dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 n^2 \times \dfrac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2}}$

$$\iff \boxed{E_m = -\frac{E_0}{n^2} \quad \text{où } E_0 = \frac{m_e . e^4}{8h^2\varepsilon_0^2}} = \underline{13{,}6\,eV}$$

où $\underline{-E_0 \text{ représente l'énergie du niveau fondamental de } H.}$

Q21) Comme $\Delta E = h\nu \iff \left| -\dfrac{E_0}{n_f^2} + \dfrac{E_0}{n_i^2} \right| = \dfrac{hc}{\lambda}$ où $n_f < n_i$ $\quad n_i \downarrow$ désexcitation. n_f

$$\iff \boxed{\frac{1}{\lambda} = \underbrace{\frac{hc}{E_0}}_{R_H}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)} \Rightarrow \boxed{R_H = \frac{hc}{E_0}}$$

Q22). D'après l'énoncé $\begin{cases} \lambda_1 = 121{,}5\,nm \\ \lambda_2 = 102{,}5\,nm \\ \lambda_3 = 97{,}2\,nm \end{cases}$ ces longueurs d'ondes appartiennent à l'UV.

. De plus $R_H = \dfrac{1}{\lambda} \cdot \dfrac{n_i^2 - n_f^2}{n_i^2 . n_f^2} = \dfrac{1}{\lambda} \cdot \dfrac{n_i^2 - 1}{n_i^2} \iff R_H = \dfrac{1}{\lambda}\left(1 - \dfrac{1}{n_i^2}\right)$

Pour $n_i = 2$: $R_H = 1{,}097\,m^{-1}$
$n_i = 3$: $R_H = 1{,}098\,m^{-1}$ $\Rightarrow \boxed{\underline{R_H} = 1{,}097\,m^{-1}}$
$n_i = 4$: $R_H = 1{,}097\,m^{-1}$

de bon accord des valeurs numériques obtenues valident le modèle de Bohr