Partie A – L'atome le plus simple de l'univers (CCP MP-2018)

Q1) Soit $\boxed{\vec{F} = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r}$

Q2) Trajectoire circulaire uniforme : $m\dfrac{v^2}{r} = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$\Leftrightarrow \boxed{v = \sqrt{\dfrac{e^2}{4\pi m_e \varepsilon_0 r}}}$

Q3) Soit $dE_p = -\vec{F}.d\vec{OM} \Rightarrow E_p = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

or $E_c = \dfrac{1}{2}m_e v^2 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ $\Rightarrow \boxed{E_c = -E_p/2 = \dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}}$

Q4) On a $\vec{L} = r\vec{u}_r \wedge (m_e\vec{v}) \Rightarrow \boxed{L = \sqrt{\dfrac{m_e r e^2}{4\pi\varepsilon_0}}}$

Q5) Bohr : $\dfrac{m_e r_n e^2}{4\pi\varepsilon_0} = n^2\hbar^2$ d'où $r_n = n^2 a_B$ avec $\boxed{a_B = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}}$

Q6) Soit $E_m = E_c + E_p = \dfrac{E_p}{2} = -\dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 n^2 a_B}$

$\boxed{\text{D'où } E_n = -\dfrac{R_y}{n^2} \text{ où } R_y = \dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_B} = \dfrac{m_e . e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}}$

Q7) Rayon de Bohr = rayon de l'atome H dans son état fondamental $1s^1$

<u>A.N:</u> <u>$a_B = 52{,}919\,pm$</u> et <u>$R_y = 13{,}606\,eV$</u>

Q8) Soit $E_m = \frac{E_p}{2} = -E_c$ d'où $\frac{1}{2} m_e v_m^2 = + R_y/n^2$

$$\Leftrightarrow v_m^2 = \frac{2 R_y}{m_e n^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_m = \sqrt{\frac{2R_y}{m_e}} \cdot \frac{1}{n}}$$

A.N : $v_1 = 2{,}1877.10^6\ ms^{-1}$ $\Rightarrow \frac{v_1}{c} \ll 1 \Rightarrow$ mouvement non relativiste

Q9) Soit $\Psi(\vec{r},t) = K(\vec{r},t)\, e^{-iEt/\hbar} \rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar} K(\vec{r},t)\, e^{-iEt/\hbar}$

d'où Schrödinger s'écrit : $\boxed{E\, K(\vec{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m} K(\vec{r},t) + E_p(\vec{r}).K(\vec{r},t)}$

Q10) D'après Q3, $E_p = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$

Q11) . Si $K(\vec{r}) = K(\theta)$ alors $\Delta K = \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 K}{\partial \theta^2}$ car $r = R$.

. Comme $E_p = 2E$ on a : $0 = -\frac{\hbar^2}{2m_e R^2}\frac{\partial^2 K}{\partial\theta^2} + E.K$.

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\hbar^2}{2m_e R^2}\frac{\partial^2 K(\theta)}{\partial \theta^2} = E K(\theta)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 K}{d\theta^2} + \frac{2 m_e R^2 E}{\hbar^2} K(\theta) = 0$$

or $E = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$ $\Rightarrow \frac{d^2K}{d\theta^2} - \underbrace{\frac{m_e R e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}}_{q^2} K = 0$

D'où $\boxed{K(\theta) = Ae^{iq\theta} + Be^{-iq\theta}}$

Q12) Il faut que $K(\theta+2\pi) = K(\theta)$ pour cela il faut que η soit un entier n par exemple.

$$\Rightarrow \frac{m_e R e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2} = n^2$$

$$\Rightarrow R = n^2 . \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m_e . e^2}$$

On retrouve le résultat $\boxed{R = n^2 . a_B}$

Q13) Lors de la désexcitation : $\boxed{E_p = E_{sup} - E_{inf}}$

$$\Leftrightarrow \frac{hc}{\lambda} = -\frac{R_y}{n^2} + \frac{R_y}{n'^2}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right) \text{ où } R_H = \frac{R_y}{hc}}$$

Q14) Soit $R_H = 1{,}0974.10^7\ m^{-1}$ d'où le tableau suivant

	H_α	H_β	H_γ	H_δ
λ_{Ritz} (nm)	656,10	486,00	433,93	410,06
λ_{exp} (nm)	$656{,}3 \pm 0{,}3$	$486{,}1 \pm 0{,}2$	$434{,}0 \pm 0{,}2$	$410{,}2 \pm 0{,}2$

Les intervalles d'incertitude englobent bien les valeurs de Ritz

Q15) Soit $v_1 = \sqrt{\frac{2R_y}{m_e}} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar} = \alpha . c$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{v_1}{c}}$ qui est sans dimension

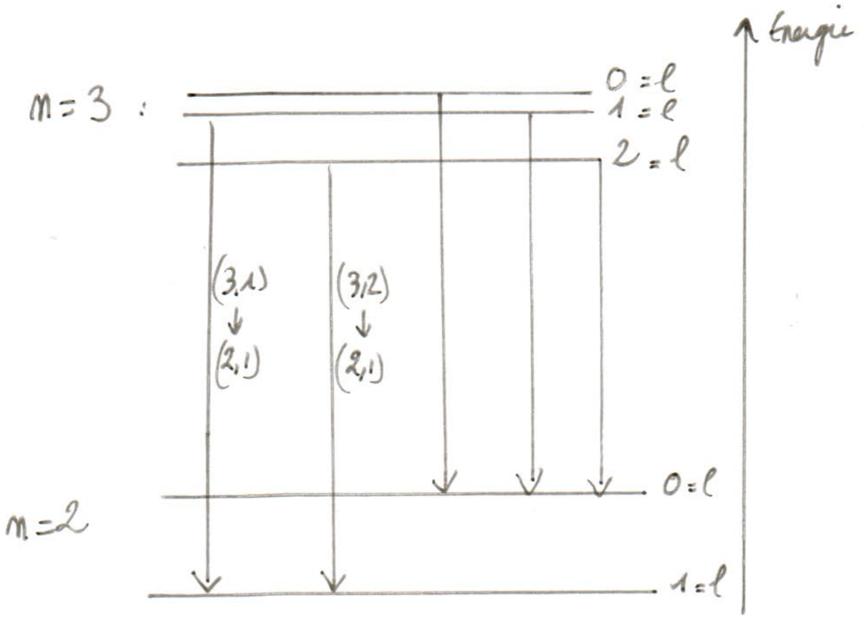
Q16) On a donc $\alpha = 7{,}2974.10^{-3}$ et $1/\alpha = 137{,}03$

Q17) • La formule de Sommerfeld apporte une correction à la formule de Bohr. Il y a <u>dégénerescence pour un n donné</u>.

• Pour <u>un n donné on a n niveaux d'energies possibles</u> :

Si $n = 2$: $\begin{cases} \ell = 0 \\ \ell = 1 \end{cases}$ et Si $n = 3$: $\begin{cases} \ell = 0 \\ \ell = 1 \\ \ell = 2 \end{cases}$

Q18)



D'après la formule de Sommerfeld : $E_{n,\ell} = E_n - \dfrac{\alpha^2 R_y}{n^4}\left(\dfrac{n}{\ell+1} - \dfrac{3}{4}\right)$

avec $\dfrac{n}{\ell+1} \geqslant 1$ d'où $E_{n,\ell}$ décroit avec ℓ

$\Rightarrow$ Pour un n donné, le niveau de plus basse énergie est celui de ℓ le plus élevé.

Soit $E_{2,\ell} = E_2 - \dfrac{\alpha^2 R_y}{16}\left(\dfrac{2}{\ell+1} - \dfrac{3}{4}\right) \Rightarrow \Delta E = -\dfrac{\alpha^2 R_y}{16}(1-2)$

$\Rightarrow \boxed{\Delta E = \dfrac{\alpha^2}{16} R_y} = \underline{\underline{4{,}5283.10^{-5}\,eV}}$

Q19) Soit $\begin{cases} \Delta E_a = E_{3,1} - E_{2,0} \\ \Delta E_b = E_{3,1} - E_{2,1} \end{cases}$

D'où $\Delta E = E_{2,1} - E_{2,0} = \Delta E_f$.

$\Rightarrow hc \cdot \Delta\sigma = \Delta E_f$

$\Rightarrow \boxed{\Delta E_f = hc \cdot \Delta\sigma} \Leftrightarrow \boxed{\Delta\sigma = \dfrac{\Delta E_f}{hc}} = \underline{\underline{0{,}36\,524\ cm^{-1}}}$

Q20)

- Si $\sigma_m = 15237{,}40\ cm^{-1} \rightarrow \lambda_m = 656{,}2799\ nm$: ROUGE
- Et $\dfrac{\Delta\sigma_{exp}}{\sigma_m} = 2{,}36 \cdot 10^{-5} \ll \dfrac{\Delta\sigma}{\sigma}(Na) \Rightarrow$ doublet plus fin que le sodium.