

Equation de Poisson (CCP-INP / PC 2017 / Modélisation)

Partie I - équation de Poisson

$$\text{Q1)} \begin{cases} \text{MG: } \operatorname{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \\ \text{et} \\ \vec{E} = -\operatorname{grad} V \text{ (en statique)} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{div}(\operatorname{grad} V) = -\rho / \epsilon_0$$

$$\Rightarrow \Delta V + \rho / \epsilon_0 = 0$$

ρ : charge volumique en C/m^3 .
 ϵ_0 : permittivité du vide en F/m .

$$\text{Q2)} \text{ Diffusion de particules : } \frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n + \alpha \begin{cases} \text{taux de production volumique} \\ \text{termes de sources.} \end{cases}$$

$$\text{d'où en régime stationnaire : } \Delta n = -\frac{\alpha}{D}$$

$$\text{Q3)} \text{ A deux dimensions } \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \rho / \epsilon_0 = 0$$

$$\text{On pose : } x = LX \text{ et } y = LY \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\rho L^2}{\epsilon_0} = 0$$

$$\Rightarrow \rho'(X, Y) = \frac{\rho(X, Y) L^2}{\epsilon_0}$$

Q4) Formule de Taylor :

$$\text{et } \begin{cases} V(X_i+h, Y_j) = V(X_i, Y_j) + h \frac{\partial V}{\partial X}(X_i, Y_j) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2}(X_i, Y_j) + o(h^2) \\ V(X_i-h, Y_j) = \dots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V(X_i+h, Y_j) + V(X_i-h, Y_j) = 2V(X_i, Y_j) + h^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2}(X_i, Y_j) + o(h^2) \\ \text{et} \\ V(X_i, Y_j-h) + V(X_i, Y_j+h) = 2V(X_i, Y_j) + h^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}(X_i, Y_j) + o(h^2) \end{cases}$$

On somme les 2 égalités :

$$h^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + 4V + o(h^3) = V(x_i+h, y_j) + V(x_i-h, y_j) + V(x_i, y_j+h) + V(x_i, y_j-h)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{V(x_i+h, y_j) + V(x_i-h, y_j) + V(x_i, y_j+h) + V(x_i, y_j-h) - 4V(x_i, y_j)}{h^2} + o(h)$$

Q5) $\left\{ \begin{array}{l} x_i = ih \text{ et } y_j = jh \text{ d'où : } \underline{V(i+1, j) + V(i-1, j) + V(i, j-1) + V(i, j+1) - 4V(i, j) + \rho''(i, j) = 0} \\ V(x_i, y_j) = V(i, j) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \rho'' = 0 \end{array} \right.$

où $\underline{\rho''(i, j) = h^2 \rho' = \frac{h^2 L^2}{\epsilon_0} \rho}$

Q6) Apres une longue lecture de l'énoncé :

def nouveau - potentiel (V , ρ hos, frontière, i, j) :

if frontière $[i, j]$: # on ne modifie pas le potentiel d'un point
| return $V[i, j]$ # de la frontière car il est imposé et fixé au début
else : # sinon on utilise la relation (5) de l'énoncé.

| return $(V(i+1, j) + V(i-1, j) + V(i, j-1) + V(i, j+1) + \rho$ hos $[i, j]) / 4$

Q7) Pour calculer la nouvelle valeur de $V(i, j)$, on a besoin de l'ancienne valeur $V(i-1, j)$ mais du fait de la boucle sur i dont l'itération précédente a déjà modifié cette dernière, ce n'est pas possible sans faire une copie du tableau. Il faut donc modifier l'original en laissant inchangé la copie pour utiliser les valeurs initiales. C'est la même chose pour l'itération sur j .

Q8) des tableaux étant "des matrices carrées" :

def calcul_erreur (V1, V2) :

```

N, M = V1.shape # on récupère la dimension du tableau.
E = 0 # initialisation
for i in range(N):
    | for j in range(M):
        | E = E + (V1(i,j) - V2(i,j))**2 # on calcule la somme
E = np.sqrt(E) / N # formule (4)
return E.

```

On va utiliser cette fonction annexée pour répondre à la question :

def itere_J (V, rhos, frontiere) :

```

V1 = np.copy(V) # copie du tableau
N, M = V.shape.
for i in range(N):
    | for j in range(M):
        | V[i,j] = nouveau_potentiel (V1, rhos, frontiere, i, j)
# on modifie V et on garde V1 qui sert au calcul de V.
err = calcul_erreur (V1, V)
return err

```

Q9) def poisson (f_iter, V, rhos, frontiere, eps) :

```

err = 2 * eps # Valeur élevée afin que la boucle s'effectue au
              # moins une fois.
while err >= eps:
    | err = f_iter (V, rhos, frontiere)
return (err) # facultatif car modification "en place" de V

```

Q10) On balaye les points dans l'ordre croissant par conséquent on n'est plus obligé de copier le tableau $V[i,j]$.
 On utilise maintenant la nouvelle valeur de $V[i-1,j]$ et $V[i,j-1]$. On peut utiliser une seule matrice de fonction nouveau-potentiel reste valable.

Q11) Sans copie du tableau on peut écrire :

def itere - GS ($V, \text{rhos}, \text{frontiere}$):

```

E = 0
N, M = V.shape
for i in range(N):
    for j in range(M):
        anc - V = V[i,j] # garder en mémoire pour calcul de l'erreur.
        V[i,j] = nouveau - potentiel (V, rhos, frontiere, i, j)
        E = E + (V[i,j] - anc - V) ** 2
err = np.sqrt(E) / N
return err

```

Q12) Cette fonction peut utiliser la fonction nouveau-potentiel écrite précédemment car elle ne fait que réaliser une combinaison linéaire de ce que retourne cette fonction d'un autre terme.

def nouveau - potentiel - SOR ($V, \text{rhos}, \text{frontiere}, i, j, \text{omega}$):

return ($V[i,j] \times (1 - \text{omega}) + \text{nouveau - potentiel}(V, \text{rhos}, \text{frontiere}, i, j) \times \text{omega}$)

Q13) Cette fonction est strictement identique à itere - GS si ce n'est qu'elle utilise nouveau-potentiel - SOR au lieu de nouveau-potentiel :

def itere - SOR (V, rhos, frontiere):

$$E = 0$$

$$N, M = V.shape$$

$$\omega = 2 / (1 + \pi \cdot \rho \cdot N)$$

for i in range N:

 for j in range M:

$$\text{anc} - V = V[i, j]$$

$$V[i, j] = \text{nouveau} - \text{potentiel} - \text{SOR}(V, \text{rhos}, \text{frontiere}, i, j, \omega)$$

$$E = E + (V[i, j] - \text{anc} - V) \times 2$$

$$\text{err} = \pi \cdot \sqrt{E} / N$$

return err

Q14) • des 2 boucles ont une complexité en $NM \neq N^2$ dans itere - SOR. Mais la fonction poisson a une complexité en N (boucle while) d'où une complexité globale en $O(N^3)$

• la durée T d'exécution est proportionnelle à la complexité temporelle $\Rightarrow T = \alpha N^3$

$$\underline{T = \ln \alpha + 3 \ln N}$$

• Effectuons une régression linéaire à partir de la courbe à l'aide d'un relevé de points :

$$\Rightarrow \ln T = -11,8 + 2,95 \ln N \text{ où } r^2 = 0,9995$$

\Rightarrow ce qui valide notre modèle vu que $2,95 \neq 3$.

• D'où pour $N = 1000 \Rightarrow T = 5327 \text{ s}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T = 1h30min}}$$

• le temps de calcul est très long du fait de la complexité en $O(N^3)$.

Q15) On peut écrire :

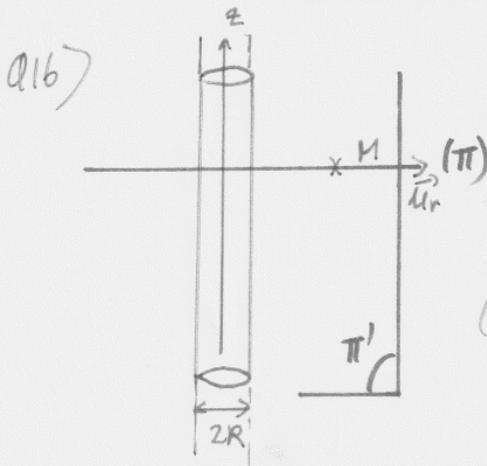
$$\begin{cases} E_x = -\frac{1}{L} \frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\frac{1}{L} \frac{\partial V}{\partial y} \end{cases}$$

D'où en discrétisant :

$$\begin{cases} E_x[i,j] = -\frac{V[i+1,j] - V[i,j]}{hL} \\ E_y[i,j] = -\frac{V[i,j+1] - V[i,j]}{hL} \end{cases}$$

Pour l'algorithme, il suffit de créer deux boucles imbriquées sur i et j et de remplir les valeurs de E_x et E_y point par point. Il faudra faire attention aux bords du domaine car il n'est pas possible de calculer $E_x(N,*)$ ou $E_y(*,N)$ car l'indice $N+1$ est inadmissible pour $V[i,j]$.

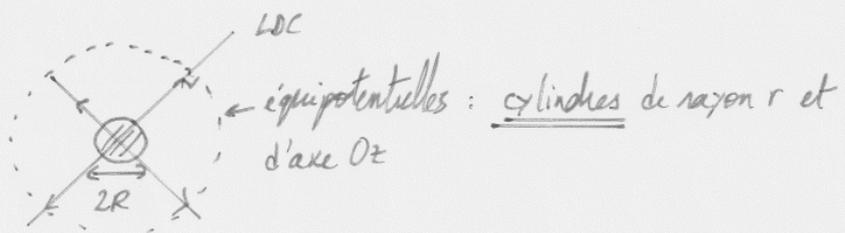
Partie II: Etude des 2 cas



* (π) et (π') sont 2 plans de symétrie donc $M \in a'$
l'intersection $\Rightarrow \vec{E}(M) = E(M) \vec{u}_r$

* Il y a invariance par rotation et translation suivant $(Oz) \Rightarrow E(M) = E(r)$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r$$



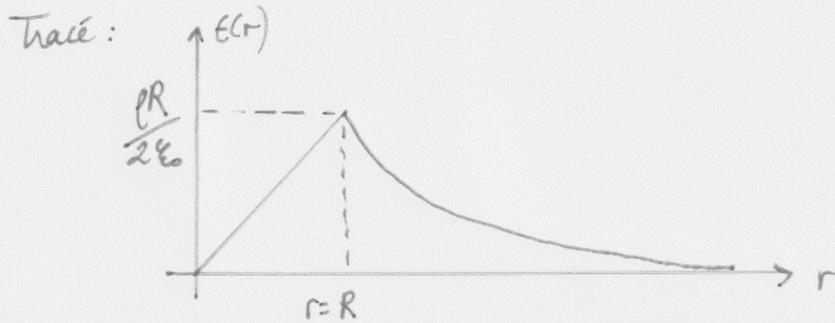
Q17) On applique le théorème de Gauss à un cylindre d'axe Oz et de rayon r , de hauteur h d'où :

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E(r) \cdot 2\pi r h = q_{int} / \epsilon_0$$

Si $r < R$: $q_{int} = e \cdot \pi r^2 h$

Si $r > R$: $q_{int} = e \pi R^2 h$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E}(r < R) = e \frac{r}{2\epsilon_0} \vec{u}_r \\ \vec{E}(r > R) = e \frac{R^2}{2r\epsilon_0} \vec{u}_r \end{cases}$$



Q18) Le champ est maximal en $r=R \Rightarrow \underline{E_{\max} = 28 \text{ kV.m}^{-1}}$

$$\text{et en } r=2R : E(2R) = \frac{E_{\max}}{2} = \underline{\underline{14 \text{ kV.m}^{-1}}}$$

Q19) def dans-cylindre (x_c, y_c, x_c, y_c, R):

$$\left| \begin{array}{l} \text{dist} = (x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 \\ \text{retour dist} \leq R^2 \end{array} \right.$$

Q20) dans le programme proposé $h = \frac{L}{N}$ (alors qu'avant c'était $1/N$), d'où la nouvelle expression de e'' en que cette fois $\frac{h}{L} = \frac{1}{N}$.

$$\Rightarrow e''(i,j) = \frac{h^2}{L^2} e' = \frac{h^2 e}{\epsilon_0}$$

On remarque aussi qu'il y a $N+1$ cases par côté.

def initialise_rhos_cylindre (tab_rhos):

$$\left| \begin{array}{l} \text{for } i \text{ in range } (N+1): \\ \quad \text{for } j \text{ in range } (N+1): \\ \quad \quad \text{if dans-cylindre } (ix, jy, L/2, L/2, L/4): \\ \quad \quad \quad \text{tab_rhos}[i,j] = \text{rho} / \text{eps0} \times h^2 \end{array} \right.$$

on change la valeur de la dernière de 0 à la valeur dans le cylindre
à il est dans le cylindre.

Cette fonction doit être appliquée au tableau rhos-cyl.

Q21) La frontière est constituée de tous les pixels placés sur le bord du carré, on met donc à "True" les cases correspondantes :

def initialie - frontière - cylindre (tab-f):

$$\text{tab-f}[:, 0] = \text{True}$$

$$\text{tab-f}[:, N] = \text{True}$$

$$\text{tab-f}[0, :] = \text{True}$$

$$\text{tab-f}[N, :] = \text{True}$$

Q22) Les conditions aux limites en $r = 2R$ du centre du cylindre vont modifier le potentiel et le champ électrique : le calcul numérique doit donc s'éloigner de façon sensible de ce qui est prévu pour un cylindre infini seul.

* Les équipotentielles sont des cercles proche du fil et tendent vers des "carrés" à l'approche de la frontière.

* Le point $(L/2, L/2)$ est le centre de symétrie de la distribution, il est donc normal que \vec{E} et V soient symétriques / à $x = L/2$.

* Pour \vec{E} entre $-L/4$ et $L/4$ on retrouve la portion linéaire de $\vec{E} \# \frac{\rho}{2\epsilon_0} r \vec{u}_r$. Ensuite le champ décroît jusqu'au bord de la cavité qui joue le rôle de C.L.

* Pour E_{\max} , on lit 28 kV/m ce qui est la même valeur qu'en Q18 par contre en $r = 2R$ on lit 18 ou 19 kV/m ce qui est inférieur au 14 kV/m obtenu avec le seul fil. La présence de la cavité se ressent.

* Pour V on voit que le potentiel est nul sur la frontière et passe par un maximum au $x = L/2$. C'est normal car E est nul en $x = L/2$ ($E = -\frac{\partial V}{\partial x}$)

Q23) Le champ est nul à une distance inférieure à $R_1 = 2,5 \text{ cm}$ du centre ($r = R_1 = \frac{R}{2}$): il n'y a donc pas de charges. En dehors de cette zone on retrouve les mêmes résultats d'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} r < R_1 : \rho = 0 \\ R_1 < r < R : \rho = \text{cste} \neq 0 \\ r > R : \rho = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{array}$$

Les symétries du problème n'ont pas changé d'où :

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} : \epsilon \cdot 2\pi r h = 0 \\ \textcircled{2} : \epsilon \cdot 2\pi r h = \frac{e \pi (r^2 - R_1^2) h}{\epsilon_0} \\ \textcircled{3} : \epsilon \cdot 2\pi r h = \frac{e \pi (R^2 - R_1^2) h}{\epsilon_0} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(r < R_1) = \vec{0} \\ \vec{E}(R_1 < r < R) = \frac{e(r^2 - R_1^2)}{2\epsilon_0 r} \vec{u}_r \\ \vec{E}(r > R) = \frac{3eR^2}{8\epsilon_0 r} \vec{u}_r \end{array} \right.$$

d'où $E_{\text{max}} = \frac{3eR}{8\epsilon_0} = 21 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$ ce qui est très proche de la valeur obtenue par simulation.

Q24) Système : e^- dans Ry t.q. $\Delta E_m = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 - eV_0 = 0$
 $\Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}} = 1,8 \cdot 10^7 \text{ ms}^{-1}$

On remarque que $\frac{v_0}{c} \approx 0,06 \Rightarrow$ l' e^- est presque relativiste.

Q25) Soit $\Delta V = 2V_p$ d'où $\vec{E} = -\frac{2V_p}{d} \vec{u}_y$

Q26) Système : e^- dans Ry d'où PFD : $\left\{ \begin{array}{l} m \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ m \frac{dv_y}{dt} = qE \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = v_0 t - l/2 \\ y = \frac{qEt^2}{2m} = \frac{eV_p t^2}{2md} \end{array} \right.$

D'où l'équation de la trajectoire : $y(x) = \frac{eV_p}{m d v_0^2} \left(x + \frac{l}{2}\right)^2$

Q27) En $x = l/2$: $y = \frac{eV_p}{mdv_0^2} l^2$ puis en sortie du condensateur on a une trajectoire

$$\text{rectiligne t.g. : } \left\{ \begin{array}{l} y - \frac{eV_p}{mdv_0^2} l^2 = (\text{pente}) \times (x - l/2) \\ \text{ou} \end{array} \right.$$

$$\text{d'après le schéma : } y = \text{pente} \times x$$

$$\text{Or pente} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=l/2} = \left. \frac{eV_p}{mdv_0^2} \times 2 \times (x + l/2) \right|_{x=l/2} = \frac{2eV_p}{mdv_0^2} l$$

$$\Rightarrow \underline{y(x=l/2) = \frac{2eV_p l}{mdv_0^2} x}$$

Q28) Il n'y a pas de charges volumiques donc le tableau rho est rempli de zéros.

Q29) : des points de la frontière (bords du cané) sont déjà au potentiel zéro dès la création du tableau numpy, il est donc inutile de redefinir ces valeurs.

- On passe celui des plaques à $+V_p$ et $-V_p$ c'ad pour $x=1$ à 5cm et pour $y = \pm 1\text{cm}$.
- Une maille correspond à $h = \frac{L}{N} = 0,1\text{cm}$, il faut donc fixer $V = -V_p$ pour les indices $i \in [10, 50]$ et pour $j = 40$. Et pour $j = 60$ on fixe $V = V_p$.
- Pour frontière -osc, on passera à "True" les points des bords du cané et appartenant aux plaques.

def initialiser - frontier - condensateur (tab-V, tab-f):

$$\text{tab-V} [10:50, 40] = -V_p$$

$$\text{tab-V} [10:50, 60] = +V_p.$$

$$\text{tab-f} [10:50, 40] = \text{True}$$

$$\text{tab-f} [10:50, 60] = \text{True}$$

$$\text{tab-f} [0, :] = \text{True}$$

$$\text{tab-f}[:, 0] = \text{True}$$

$$\text{tab-f}[:, N] = \text{True}$$

$$\text{tab-f}[N, :] = \text{True}$$

Q30) Effectuons un DL de $E_x(x,y)$ en r_x et r_y autour du centre de la cellule de coordonnées (ih, jh) pour lequel E est connu :

$$E_x(x,y) = E_x(r_x + ih, r_y + jh) = E_x(ih, jh) + \frac{\partial E_x}{\partial x} r_x + \frac{\partial E_x}{\partial y} r_y + \dots$$

$$\text{Or } \frac{\partial E_x}{\partial x}(ih, jh) = \frac{E_x[i+1, j] - E_x[i, j]}{h} \quad (\text{comme en Q15})$$

$$\Rightarrow E_x(x,y) \approx \left((E_x[i+1, j] - E_x[i, j]) r_x + (E_x[i, j+1] - E_x[i, j]) r_y \right) / h$$

CCFD

$$\text{de m\^e: } E_y(x,y) \approx \left((E_y[i+1, j] - E_y[i, j]) r_x + (E_y[i, j+1] - E_y[i, j]) r_y \right) / h$$

Par interpolation linéaire des valeurs de E_x (et E_y) entre deux points où ses valeurs sont connues, on pourra obtenir toutes les valeurs dans la maille.

Q31) Définition: $v_x = \frac{dx}{dt}$ et $v_y = \frac{dy}{dt}$

$$\text{PFD: } \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{e}{m} E_x \\ \frac{dv_y}{dt} = -\frac{e}{m} E_y \end{cases}$$

$$\text{d'o\^u } \delta v_x = v_x \delta t, \quad \delta v_y = v_y \delta t, \quad \delta v_x = -\frac{e}{m} E_x(x,y) \delta t, \quad \delta v_y = -\frac{e}{m} E_y(x,y) \delta t.$$

Q32) des solution initiale d'après la figure 8.

$$\underline{x=0, y=5 \cdot 10^{-2}, v_x=v_0, v_y=0}$$

Il faut $\Delta t = \frac{L}{v_0}$ à l'élection pour traverser l'enceinte

$$\Rightarrow \delta t = \frac{\Delta t}{200} = \frac{L}{200 v_0} = \underline{\underline{5,5 \cdot 10^{-11} \text{ s}}}$$

Q33) Code :

```

Npts = 200
v0 = np.sqrt(2 * e * V0 / m)
dt = L / v0 / Npts
lx = np.zeros(Npts); ly = np.zeros(Npts)
lvx = np.zeros(Npts); lvy = np.zeros(Npts)
lx[0] = 0; ly[0] = L/2.
lvx[0] = v0; lvy[0] = 0

```

Q34) Méthode d'Euler

```

for k in range(1, Npts+1): # on ne modifie pas les CL.
    lx[k] = lx[k-1] + lvx[k-1] * dt # xk = xk-1 + dx
    ly[k] = ly[k-1] + lvy[k-1] * dt # yk = yk-1 + dy
    lvx[k] = lvx[k-1] - e/m * dt * val - Ex(Ex, Ey, lx[k-1], ly[k-1], h)
    lvy[k] = lvy[k-1] - e/m * dt * val - Ey(Ex, Ey, lx[k-1], ly[k-1], h)
    # vxk = vxk-1 + dvx

```

où

```

def val - Ex (Ex, Ey, x, y, h):
    i = int(x/h); j = int(y/h)
    rx = x - i * h; ry = y - j * h
    return (Ex[i, j] + (Ex[i+1, j] - Ex[i, j]) * rx + (Ex[i, j+1] - Ex[i, j]) * ry) / h

```

et

```

def val - Ey (Ex, Ey, x, y, h): # la même fonction

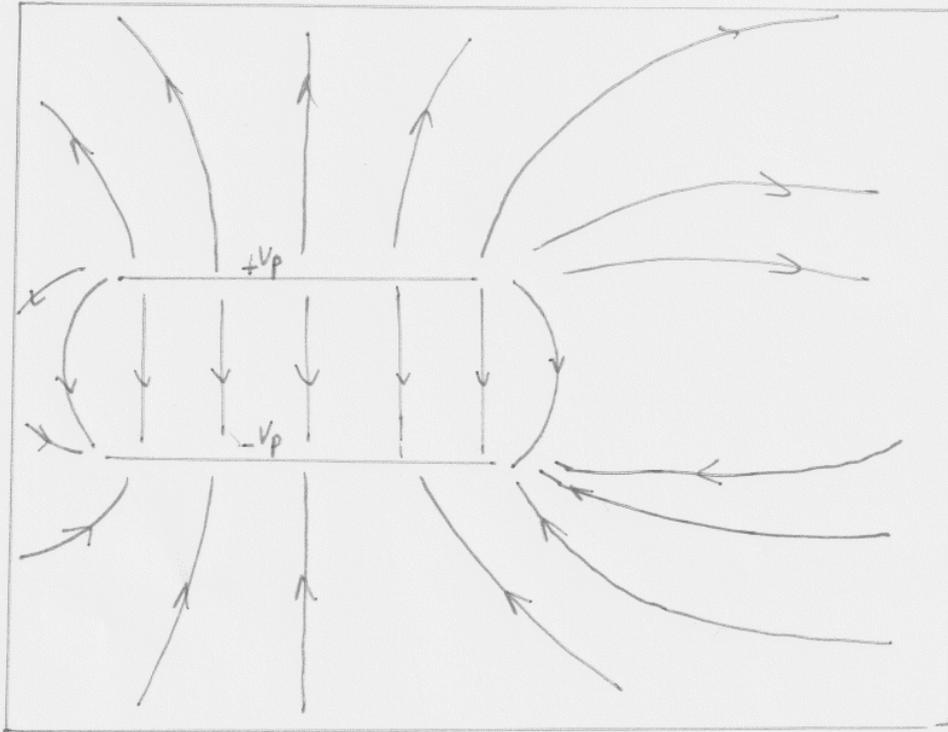
```

```

    rx = x - i * h; ry = y - j * h
    return (Ey[i, j] + (Ey[i+1, j] - Ey[i, j]) * rx + (Ey[i, j+1] - Ey[i, j]) * ry) / h

```

Q35) LDC



• la trajectoire ① correspond à la simulation, on aurait dû prendre $N_{pts} > 200$. De plus la simulation tient compte que le champ n'est pas nul en sortie du condensateur, ce qui ralentit l' e^- .

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } \left\{ \begin{array}{l} \Delta y \textcircled{1} = 8,3 - 5,0 = 3,3 \text{ cm} \\ \Delta y \textcircled{2} = 7,6 - 5,0 = 2,6 \text{ cm} \end{array} \right. & \Rightarrow \eta(\Delta y) = \frac{3,3 - 2,6}{3,3} = 20\% \\ & \text{Ce n'est pas négligeable.} \end{aligned}$$

Raisons des écarts :

- condensateur aux effets de bord non négligeables
- enceinte cané qui impose le potentiel nul et modifie donc E du condensateur
-
-

FIN