Chasse au plomb (CCP – MP – 2017)

Q1) On applique le PFD au plomb dans le référentiel terrestre :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{F_D}$$
$$= m\vec{g} - \frac{1}{2}\rho_a S C_D v\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\rho_a S C_D}{2m} v\vec{v} = \vec{g}} \quad (1)$$

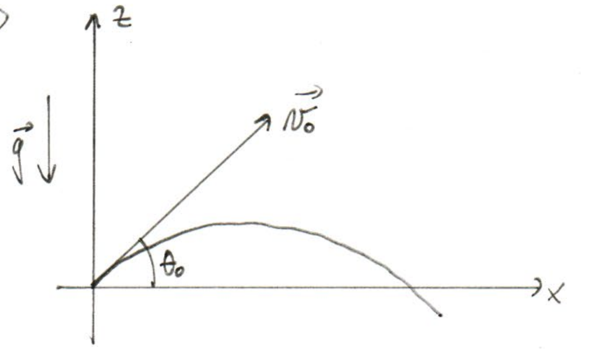
Q2) La force de frottement initiale est négligeable devant la pesanteur ssi :

$$\rho_a \frac{S C_D v_0^2}{2m} < g$$

$$\Leftrightarrow v_0 < \sqrt{\frac{2mg}{\rho_a S C_D}}$$

or $S = \pi R^2$ $\Rightarrow$ $\boxed{v_0 < \underbrace{\sqrt{\frac{2mg}{\pi R^2 \rho_a C_D}}}_{v_\infty}}$

Q3)

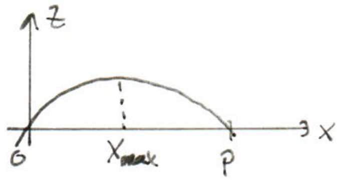


(1) s'écrit $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}} \quad (2)$$

Q4) ② s'intègre en $\begin{cases} \dot{X} = v_0 \cos\theta_0 \\ \dot{Z} = -gt + v_0 \sin\theta_0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} X = v_0(\cos\theta_0)t. \\ Z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0(\sin\theta_0)t \end{cases}}$ ③

Q5) La trajectoire est une parabole du type



On élimine le temps entre les 2 équations d'où : $\begin{cases} t = X/[v_0 \cos\theta_0] \\ Z = -\frac{1}{2} g \frac{X^2}{v_0^2 \cos^2\theta_0} + v_0 \sin\theta_0 \cdot \frac{X}{v_0 \cos\theta_0} \end{cases}$

d'où $\boxed{Z = -\frac{1}{2} g \left(\frac{X}{v_0 \cos\theta_0}\right)^2 + X \tan\theta_0}$ ③

Q6) . On cherche X_M t.q $Z = 0$ à l'aide de ③ . $-\frac{1}{2} g \frac{X}{(v_0 \cos\theta_0)^2} + \tan\theta_0 = 0$

$\Leftrightarrow X = \frac{\tan\theta_0 \cdot v_0^2 \cos^2\theta_0 \times 2}{g}$

$\Leftrightarrow X = 2 \sin\theta_0 \cos\theta_0 \cdot \frac{v_0^2}{g}$

or $\sin 2\theta_0 = 2 \sin\theta_0 \cos\theta_0$ d'où $\boxed{X_M = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}}$

. La hauteur maximale est t.q : $\frac{dZ}{dX} = 0$ ou $\frac{dZ}{dt} = 0$

or $\dot{Z} = -gt + v_0 \sin\theta_0 \Rightarrow t_M = \frac{v_0 \sin\theta_0}{g}$

d'où $H_M = -\frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin\theta_0}{g}\right)^2 + v_0 \sin\theta_0 \cdot \frac{v_0 \sin\theta_0}{g} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2\theta_0}{g}$

$\Rightarrow \boxed{H_M = \frac{v_0^2 \sin^2\theta_0}{2g}}$

Q7) Cherchons θ_0 t.q $\frac{dX_m}{d\theta_0} = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos(2\theta_0) = 0 \Rightarrow \boxed{\theta_0 = \frac{\pi}{4}}$$

Q8)

n° du plomb	1	5	10
Rayon (mm)	2,0	1,5	0,875
Masse m (g)	0,38	0,16	0,031
Portée X_m (km)	15	15	15
Hauteur H_m (km)	3,7	3,7	3,7
v_∞ (ms^{-1})	33	29	22

Calcul de la masse : $m = \rho \cdot 4/3 \pi R^3$

Calcul de v_∞ : $v_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{\rho_a \pi R^2 C_D}}$

Q9) . Les plombs n° 5 ont un diamètre de 3 mm. D'après le document 1 ils ont une portée de 300 m alors que notre modèle avec $\theta_0 = \pi/4$ a une portée maximale de 15 km.

. De plus on remarque que $v_0 = 380 ms^{-1} \Rightarrow v_0 \simeq 10 v_\infty$.

donc l'hypothèse $v_0 < v_\infty$ est fausse. (Q2)

Q10) On se place dans le cas où $v_0 \gg v_\infty$ d'où $\rho_a \frac{S C_D}{2} v_0^2 \gg mg$

$$\Rightarrow \boxed{mg \ll \text{Force de traînée}}$$

Q11) Le PFD appliqué au plomb dans R_T : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\rho_a \frac{S C_D}{2} \cdot v\vec{v}$

or $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dX} \cdot \frac{dX'}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dX'} \cdot v$.

$$\Rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dX'}v = -\rho_a\frac{SC_D}{2}v\vec{v}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dX'} = -\frac{\rho_a S C_D}{2m}\vec{v}$$

or $v_\infty^2 = \dfrac{2mg}{\rho_a C_D S}$ d'où $\dfrac{d\vec{v}}{dX'} = -\dfrac{\vec{v}}{v_\infty^2}\cdot g$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{v}}{dX'} = -\frac{g}{v_\infty^2}\vec{V} = -\frac{1}{D}\cdot\vec{V}} \quad (h)$$

Q12) Pour que (h) soit homogène il faut que $[D]$ = longueur

Q13). On intègre : $\dfrac{dv}{v} = -\dfrac{dX'}{D} \Leftrightarrow \ln v = -\dfrac{X'}{D} + \text{cste}.$

or $v_0 = v(0)$ d'où $\ln\dfrac{v}{v_0} = -\dfrac{X'}{D}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{v_0}\, e^{-X'/D}}$$

. D représente la distance caractéristique telle que $\vec{v}(D) = \dfrac{\vec{v_0}}{e}$ ← exp(1)

Q14)

n° du plomb	1	5	10
D(m)	110	84	50
V_0/V_∞	11	13	17
d(m)	15	220	27
v_u (ms^{-1})	270	240	170
E_c (J)	13,5	4,5	0,45

. On calcule D par v_∞^2/g puis v_0/v_∞ avec $v_0 = 380\ ms^{-1}$

. On calcule : – d par : $d = -D\ln\left(\dfrac{10v_\infty}{v_0}\right)$

– v_u par $v_u = v_0\, e^{-40/D}$ et $E_c = \frac{1}{2}mV_u^2$

Q15) Plusieurs réponses possibles :

- la portée utile d'un tir est celle pour laquelle <u>un projectile a encore une E_c suffisante pour tuer la cible.</u>
- On peut aussi calculer, la distance lorsque le projectile a une vitesse de $0{,}05 v_0$

$\Rightarrow X' = 3D.$

d'où $X = 3D\cos\theta_0$

Q16) . On va comparer l'énergie cinétique à 40m :

$$\begin{cases} E_{c5} = 4{,}6\,J \\ E_{c10} = 0{,}45\,J \\ E_{c1} = 13{,}5\,J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{E_{c1}}{E_{c5}} = 3 & \Rightarrow \text{il faut 6 plombs n°5} \\ \dfrac{E_{c1}}{E_{c10}} \simeq 30 & \Rightarrow \text{il faut 60 plombs n°10} \end{cases}$$

. On sait que $\begin{cases} E_{cu} = \frac{1}{2} m V_u^2 \\ \text{et} \\ v_u = v_0 e^{-x_u/D}. \end{cases}$

Pour un plomb <u>unique</u> : $E_{cm} = \frac{1}{2} m V_0^2 e^{-2x_u/D}.$

$$\Leftrightarrow x_u = \frac{D}{2} \ln\left(\frac{mV_0^2}{2E_{cm}}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{u1} = 0{,}95\,m \\ x_{u5} = -35\,m. \\ x_{u10} = -60\,m. \end{cases}$$

On vérifie qu'il est nécessaire d'utiliser un plomb n°1 (ou plusieurs n°5 et 10) pour "tuer" le canard.

Q17). La portée utile est de 35/40m d'après le document 1 ce qui est en accord avec les valeurs de "d".

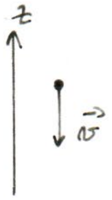
. Les billes de fer doux sont moins denses donc devront être plus grosses pour avoir la m̂ E_c

. Si les plombs s'agglutinent la masse et le diamètre augmentent donc la portée utile aussi d'où une distance de sécurité à avoir.

Q18) La dernière phase correspond à une <u>chute verticale avec frottements</u>.

Q19) PFD pour un plomb dans $\mathcal{R}_T$:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - \frac{1}{2}\rho_a S C_D v \vec{v}.$$



Pour $\vec{v} = \vec{v}_{lim}$: $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$

d'où $m\vec{g} = \dfrac{1}{2}\rho_a S C_D v_{lim} \cdot \vec{v}_{lim}$

$\Leftrightarrow v_{lim} \cdot \vec{v}_{lim} = \dfrac{2\vec{g}m}{\rho_a S \cdot C_D}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{v}_{lim} = \vec{v}_\infty = \sqrt{\frac{2gm}{\rho \pi R^2 C_D}}\,(-\vec{k})}$$

On parle de mvt aérodynamique car $v < v_\infty$ qui est liée à la force aérodynamique

Q20) On suppose que la vitesse a diminué donc $v < v_\infty$ $\Rightarrow$ on <u>se situe dans la phase gravitaire</u>.

Q21) Soit la formule : $X_m = \dfrac{D\cos\theta_0}{2}\ln\left[1 + \dfrac{4V_0^2}{V_\infty^2}\sin\theta_0\right] = H \cot an\,\theta_0$

Avec $\theta_0 = 16° \Rightarrow \begin{cases} X_m = 264\,m & \text{pour le Pb n° } 1 \\ X_m = 217\,m & \text{——— } 5 \\ X_m = 139\,m & \text{——— } 10 \end{cases}$

Avec la formule du document 1 : $\begin{cases} X_m = 400\,m & \text{pour le n° } 1 \\ X_m = 300\,m & \text{——— } 5 \\ X_m = 175\,m & \text{——— } 10 \end{cases}$ (diamètre x 100)

On remarque que les distances de sécurité ont été surestimées pour des raisons de sécurité.

Q22) En utilisant les valeurs obtenues dans le tableau 2, on calcule $\log\left(\frac{v_0}{v_\infty}\right)$ pour les différents plombs. A l'aide de la courbe on obtient θ_{max}.
$\log_{10}$

n°	$\log(V_0/V_\infty)$	θ_{max}
1	2,0	18°
5	2,2	17°
10	2,5	16°

On retrouve des valeurs proches de 16°.

Q23) . On calcule X_m pour $Z = 0$ pour les différents tracés : $X_m = \begin{cases} 345\ m & \text{pour le n° 1} \\ 265\ m & \text{— n° 5} \\ 170\ m & \text{— n° 10} \end{cases}$

. On trouve des valeurs proches au document 1.