Etude de l'éolienne (CCP PSI – 2013)

27) Pour un système fermé on a :

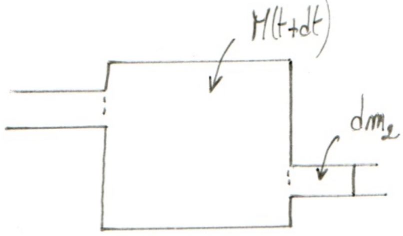
$$\boxed{\Delta(U + E_c + E_{pext}) = W_p + W' + Q}$$

où U : energie interne, E_c : energie cinétique macroscopique

E_{pext} : Energie potentielle des forces extérieures

W_p : travail des forces de pression, W' : travail utile et Q : chaleur échangée.

28) a)



Le système est constitué du fluide :
- contenu dans la partie active : $M(t+dt)$
- qui est sorti entre t et $t+dt$: dm_2

b) On est en régime stationnaire donc :

$$M(t) = M(t+dt) \Rightarrow \boxed{dm_1 = dm_2} \Rightarrow \boxed{D_m = cste}$$

29) En amont on perds le volume dV_1 d'où $dW_1 = p_1 dV_1 = p_1 v_1 dm_1 = p_1 v_1 D_m dt$

En aval on gagne le volume dV_2 d'où $dW_2 = -p_2 dV_2 = -p_2 v_2 dm_2 = -p_2 v_2 D_m dt$

volume massique.

30) Soit $d(U + E_c + E_{pext}) = \delta W_p + \delta W' + \delta Q$

$$= p_1 v_1 D_m dt - p_2 v_2 D_m dt + \delta W' + \delta Q$$

En régime stationnaire : $d(U+E_c+E_{pext}) = dm_2 (u_2 + e_{c2} + e_{p2}) - dm_1 (u_1 + e_{c1} + e_{p1})$

d'où : $D_m dt \left[(u_2 + p_2 v_2 + e_{c2} + e_{p2}) - (u_1 + p_1 v_1 + e_{c1} + e_{p1}) \right] = \delta W' + \delta Q$

$$\Leftrightarrow \boxed{D_m\left[(h_2+e_{c2}+e_{p2})-(h_1+e_{c1}+e_{p1})\right]=P_u+P_{th}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=h \Rightarrow \text{en } J.kg^{-1}} \\ P_u : \text{puissance utile t.q } P_u = \delta W'/dt \\ P_{th} : \text{puissance thermique t.q } P_{th} = \delta Q/dt \end{cases}$$

31) On a $Y_m(\vec{v}_2-\vec{v}_1)=\vec{R}$

or $[R]=\left[m\frac{dv}{dt}\right]=MT^{-1}[v]$

$\Rightarrow \boxed{Y_m = D_m = kg.s^{-1}}$

32) En régime permanent $D_m = cste$

Or le fluide est incompressible d'où $D_v = cste$

$\Rightarrow \boxed{S_A v_A = S_B V_B = S v}$ vitesse

32) On va appliquer le théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant :

. Entre S_A et Σ_1 : $p^0+\mu\frac{v_A^2}{2}=p_1+\mu\frac{v^2}{2}$

. Entre Σ_2 et S_B : $p^0+\mu\frac{v_B^2}{2}=p_2+\mu\frac{v^2}{2}$

car on néglige l'effet de pesanteur (en plus $z=cste$).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = p^0+\frac{\mu}{2}(v_A^2-v^2) \\ p_2 = p^0+\frac{\mu}{2}(v_B^2-v^2) \end{cases}$$

34) a) On a : $\vec{R}_{12} = +\vec{F}-(\vec{F}_{p,\Sigma_1}+\vec{F}_{p,\Sigma_2})_{air\to pale}$.

En projection sur Ox : $R_{12}=F-(-p_1S+p_2S)$

$\Leftrightarrow \boxed{R_{12}=F+p_1S-p_2S}$

b) Entre Σ_1 et Σ_2 : $v_1=v_2=v \Rightarrow \boxed{R_{12}=0}$

c) Donc $\boxed{F=(p_2-p_1)S}$

d) De la question (33) : $p_2-p_1=\frac{\mu}{2}(v_B^2-v_A^2) \Rightarrow F=\frac{\mu}{2}(v_B^2-v_A^2)S$

Or $\rho = \mu \Rightarrow \boxed{F = \frac{\rho}{2}(v_B^2 - v_A^2)S}$

35 D'après (E2) : $D_m(V_B - V_A) = F + F_p$ or $F_p = 0$ d'après l'énoncé

d'où $F = D_m(V_B - V_A)$

$\Leftrightarrow \boxed{F = \rho S v (v_B - v_A)}$

36 En égalisant les expressions de F : $v(v_B - v_A) = \frac{1}{2}(v_B^2 - v_A^2)$

$\Leftrightarrow \boxed{v = \frac{v_B + v_A}{2}}$

37 • Il n'y aucun transfert thermique du fluide vers l'extérieur donc $P_{th} = 0$ car l'écoulement est parfait.

• On a affaire à un gaz parfait dont les forces d'interaction sont nulles. Ces forces ne travaillant pas il n'y aura pas de fluctuation de température $\Rightarrow \underline{\Delta h = c_p \Delta T = 0}$

38 D'après E.1 : $D_m\left[(h_2 - h_1) + (e_{c2} - e_{c1}) + \underbrace{(e_{p2} - e_{p1})}_{=0}\right] = P_u + P_{th}$

$\Leftrightarrow D_m(e_{c2} - e_{c1}) = P_u$

$\Leftrightarrow \frac{D_m}{2}(v_B^2 - v_A^2) = -P_{eol}$ où $\boxed{P_u = -P_{eol}}$

$\Leftrightarrow \frac{\mu S v}{2}(v_B^2 - v_A^2) = -P_{eol}$.

$\Leftrightarrow \boxed{\rho S \frac{(v_B + v_A)(v_B^2 - v_A^2)}{4} = -P_{eol}}$

39 D'où $P_{eol} = -\rho \frac{S v_A^3}{4}(1 + x)(x^2 - 1) \Leftrightarrow \boxed{P_{eol} = \rho \frac{S v_A^3}{4}(1 - x^2)(1 + x)}$

or $\frac{dP_{eol}}{dx} = (1+x)(-2x) + (1 - x^2) = 1 - x^2 - 2x^2 - 2x = 1 - 2x - 3x^2 = -3(x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3})$

t.q : $x = \frac{-\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{3}}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6} = \frac{1}{3}$ ou $\cancel{-1/3}$

D'où $P_{max} = \rho S v_A^3 / 4 \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{8}{9}\right) \Rightarrow \boxed{P_{max} = \frac{8}{27}\rho S v_A^3}$

40 a) Soit $\boxed{P_{max} = \frac{8}{27} \rho \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot v_A^3}$

$= \underline{\underline{1,49\ MW}}$

b) Soit $N = \frac{P_{nu}}{P_{éol}} \sim \underline{\underline{1000 \text{ éoliennes}}}$