

## TH11 – Cycle de Rankine

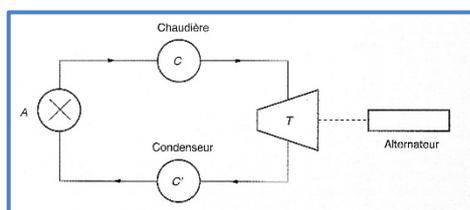
Le cycle de Rankine est le cycle de base des centrales nucléaires. La pompe d'alimentation porte l'eau liquide saturante (état 0) de la basse pression  $p_0$  du condenseur à la pression  $p_1$  du générateur de vapeur (GV) de façon adiabatique réversible (état 1). L'eau liquide comprimée entre ensuite dans le générateur de vapeur, isobare, où elle est chauffée jusqu'à la température  $T_2$  du changement d'état (état 1'), puis totalement vaporisée (état 2). La vapeur saturante sèche produite subit ensuite une détente adiabatique réversible (2-3) dans une turbine. Le fluide pénètre ensuite dans le condenseur isobare pour y être totalement condensé (état 0) à la température  $T_1$ . On appelle  $T_{cr}$  la température critique de l'eau. On négligera le travail consommé par la pompe devant les autres termes énergétiques de l'installation. On admet que  $h_1 = h_0$ . On donne :  $t_1 = 30\text{ °C}$  ;  $t_2 = 300\text{ °C}$  et  $t_{cr} = 374\text{ °C}$ .

La variation d'entropie massique pour un liquide dont la température évolue de  $T_1$  à  $T_2$  est  $s_2 - s_1 = c_l \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$ .

Données :

- Liquide saturant à  $p_1 = 85,9\text{ bar}$  et  $300\text{ °C}$  :  $s = 3,24\text{ kJ.kg}^{-1}.K^{-1}$  ;  $h = 1345\text{ kJ.kg}^{-1}$
  - Liquide saturant à  $p_0 = 0,04\text{ bar}$  et  $30\text{ °C}$  :  $s = 0,44\text{ kJ.kg}^{-1}.K^{-1}$  ;  $h = 126\text{ kJ.kg}^{-1}$
  - Vapeur saturante sèche à  $85,9\text{ bar}$  et  $300\text{ °C}$  :  $s = 5,57\text{ kJ.kg}^{-1}.K^{-1}$  ;  $h = 2749\text{ kJ.kg}^{-1}$
  - Vapeur saturante sèche à  $0,04\text{ bar}$  et  $30\text{ °C}$  :  $s = 8,46\text{ kJ.kg}^{-1}.K^{-1}$  ;  $h = 2566\text{ kJ.kg}^{-1}$ .
1. Représenter l'allure du cycle décrit par le fluide dans le diagramme (T,s).
  2. Déterminer le titre massique et l'enthalpie massique de la vapeur à la sortie de la turbine.
  3. Calculer l'efficacité du cycle  $\eta = -\frac{w_{turbine}}{q_{gv}}$ .
  4. Dans quel état se trouve le fluide à la fin de la détente dans la turbine ? Pourquoi est-ce un inconvénient pour les parties mobiles de la machine ?

## TH12 - Turbomachine avec changement d'état



On considère une installation comportant une chaudière C, une turbine T, un condenseur C' et une pompe A. Le fluide utilisé est l'eau, il décrit les cycles suivants :

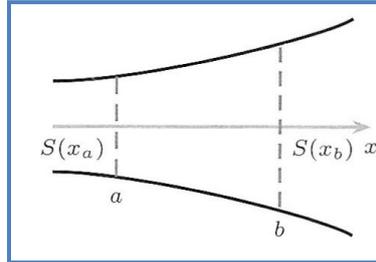
- La pompe A amène le liquide saturant, pris à la sortie du condenseur (état F à  $T_2, p_2$ ), jusqu'à la pression  $p_1$  de la chaudière. Cette opération est pratiquement adiabatique et on peut considérer qu'à la sortie de la pompe le fluide est liquide (état G) pratiquement à la température  $T_2$  du condenseur ;
- L'eau est alors injectée dans la chaudière où elle s'échauffe, puis se vaporise de façon isobare ( $p_1$ ). À la sortie de la chaudière, la vapeur est saturante sèche (titre de vapeur  $x = 1$ ) à  $T_1$  (état D) ;
- Elle subit ensuite une détente adiabatique et réversible dans une turbine T (partie active du cycle). À la sortie de la turbine, le fluide est à la température  $T_2$  et à la pression  $p_2$  du condenseur (point E), où il achève de se liquéfier de façon isobare (point F).

Données :

- $T_1 = 523\text{ K}, T_2 = 293\text{ K}$
- Enthalpie de vaporisation à  $523\text{ K}$  :  $l_1 = 1\,714\text{ kJ.kg}^{-1}$ .
- Pression de vapeur saturante à  $523\text{ K}$  :  $p_1 = 39,7.10^5\text{ Pa}$ .
- Pression de vapeur saturante à  $293\text{ K}$  :  $p_2 = 2\,300\text{ Pa}$ .
- Enthalpie massique du liquide saturant à  $293\text{ K}$  :  $h_l = 84\text{ kJ.kg}^{-1}$ .
- Enthalpie massique de la vapeur saturante sèche à  $293\text{ K}$  :  $h_v = 2\,538\text{ kJ.kg}^{-1}$ .
- Chaleur massique du liquide :  $c_{liq} = 4\,180\text{ J.kg}^{-1}.K^{-1}$ .
- Volume massique du liquide :  $u_{liq} = 10^{-3}\text{ m}^3.\text{kg}^{-1}$ .
- Quelle est l'enthalpie massique de vaporisation du fluide à  $293\text{ K}$  ?
- Déterminer le titre en vapeur du fluide à la sortie de la turbine.
- Déterminer l'enthalpie massique au point E.
- Au point D, l'enthalpie massique vaut  $2\,800\text{ kJ.kg}^{-1}$ , quel est le travail massique fourni par la turbine à l'alternateur ?
- Justifier que le travail massique mis en jeu dans la pompe est négligeable devant celui fourni par la turbine.
- Déterminer le rendement de l'installation et le comparer à celui du cycle réversible fonctionnant entre les mêmes températures extrêmes. D'où provient cet écart ?
- Quel débit massique de fluide est nécessaire pour obtenir une puissance convertie par l'alternateur de  $100\text{ kW}$  ?

## TH13 - Écoulement supersonique

On étudie l'écoulement permanent d'un gaz sortant par exemple de la chambre de combustion d'un réacteur d'avion, et s'écoulant à grande vitesse dans une tuyère de section variable. L'évolution du gaz, considéré comme parfait, est adiabatique et supposée réversible. La section  $S(x)$  de la tuyère est une fonction de l'abscisse  $x$  repérée sur l'axe de révolution de la tuyère. L'action de la pesanteur est négligée. Les variations de section de la tuyère sont suffisamment douces pour que toutes les grandeurs intensives soient considérées comme uniformes sur une section droite : elles ne dépendent que de  $x$ . De plus, la vitesse de l'écoulement sera considérée comme parallèle à  $x$ . L'étude est menée dans le référentiel de la tuyère, supposé galiléen. Le but est de montrer que, si le profil de la tuyère est bien choisi, la vitesse de l'écoulement peut dépasser la célérité du son.



- En appliquant le premier principe de la thermodynamique à un système bien choisi compris entre deux sections d'abscisses  $x_A$  et  $x_B$  à l'instant  $t$ , montrer que  $c_p(T_B - T_A) = -\frac{1}{2}(v_B^2 - v_A^2)$ ,  $v$  étant la vitesse,  $T$  la température et  $c_p$  la capacité thermique massique à pression constante du gaz.
- Exprimer la capacité thermique massique  $c_p$ , en fonction de la constante molaire des gaz parfaits  $R$ , de la masse molaire  $M$  du gaz et de l'exposant adiabatique  $\gamma$ . Montrer alors que dans la tuyère, on vérifie la relation :

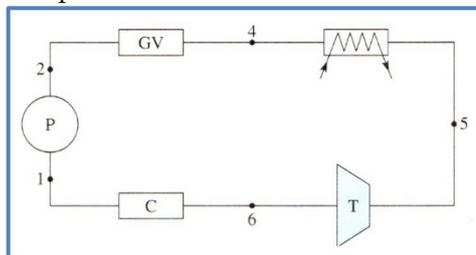
$$\frac{1}{M} \frac{\gamma R}{\gamma - 1} dT = -\frac{1}{2} dv^2$$

- Donner la différentielle logarithmique de la loi de Laplace exprimée en variables  $(T, P)$ .
- Exprimer la masse volumique du gaz en fonction de la température et de la pression. Donner la différentielle logarithmique de cette expression.
- Donner la différentielle logarithmique de la conservation du débit massique.
- On rappelle que la célérité  $c$  du son dans un gaz parfait est donnée par  $c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$ . À l'aide de toutes les relations différentielles établies précédemment, démontrer que :

$$\frac{dS}{S} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{dv}{v} = 0 \text{ (Théorème de Rankine - Hugoniot)}$$

- On rappelle que  $M = \frac{v}{c}$  s'appelle le nombre de Mach. En distinguant les cas  $M < 1$  et  $M > 1$ , prévoir le sens de variation de la vitesse  $v(x)$  des gaz lorsque la tuyère est convergente (si  $S$  diminue en fonction de  $x$ ) et lorsqu'elle est divergente. Les gaz chauds étant en écoulement subsonique à l'entrée de la tuyère, quel profil doit-on donner à celle-ci pour générer un écoulement supersonique en sortie ?

## TH14 - Machine à vapeur



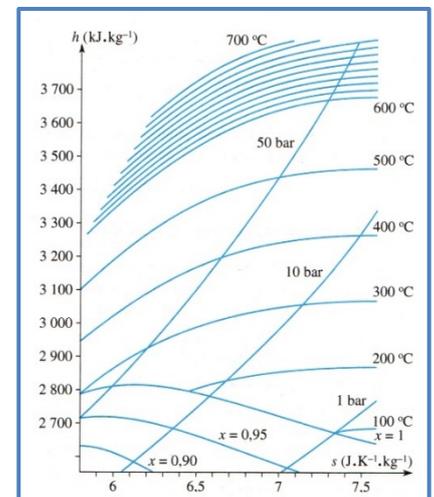
Dans une machine à vapeur, de l'eau circule en circuit fermé entre différents éléments et parcourt le cycle schématisé ci-contre. L'installation se compose des éléments suivants :

- Une pompe (P) qui réalise une compression supposée isentropique du liquide saturé.
- Un générateur de vapeur (GV) qui réalise à la pression de  $p_2 = 50 \text{ bar}$  un échauffement 2-3, puis une évaporation 3-4. Le fluide est à l'état de liquide saturant en 3, à l'état de vapeur saturante en 4.
- Un surchauffeur (S), qui échauffe la vapeur à  $p_2$ . Cet échauffement est réalisé par échange thermique avec les gaz issus de la combustion.
- Une turbine (T) où le fluide subit une détente adiabatique réversible, sans variation notable d'énergie cinétique, en fournissant du travail mécanique. L'état 6 est à l'état de vapeur saturé à la pression  $p_1 = 1 \text{ bar}$
- Un condenseur (C) dans lequel le fluide se condense de façon isobare à la pression  $p_1$ .

- Déterminer la température  $T_5$  (à la sortie du surchauffeur) à l'aide du diagramme  $(h, s)$  de façon, que le fluide, en fin de détente, soit constitué de vapeur saturante, sans liquide.
- La condition précédente étant vérifiée, tracer l'allure du cycle sur un diagramme  $(T, s)$ . Pourquoi sur ce diagramme 1 et 2 sont confondus.
- Déterminer l'énergie échangée par 1kg de fluide dans chaque partie de la machine. Calculer le rendement du moteur.

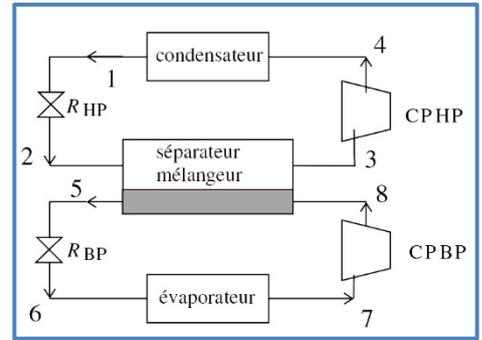
Données :

- Volume massique de l'eau liquide  $v(l) = 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$
- Pressions de changement d'état :  $1 \text{ bar}$  et  $50 \text{ bar}$ .
- Chaleur latente de vaporisation de l'eau :  $2256 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  à  $1 \text{ bar}$ ,  $1641 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  à  $50 \text{ bar}$ .
- Capacité thermique massique de l'eau liquide dans le domaine de température utilisé :  $4,45 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$



### TH15 – Cycle industriel de réfrigération

Le condenseur et l'évaporateur sont des échangeurs permettant respectivement la condensation et l'évaporation totale du fluide qui les traverse ; dans les états 1 et 7, le fluide est respectivement à l'état de liquide saturant et de vapeur saturante sèche. Ces échangeurs sont calorifugés. Les évolutions du fluide y sont supposées réversibles. RHP et RBP sont des robinets de laminage, respectivement haute et basse pression, qui assurent, sans partie mobile, des détentes supposées adiabatiques :



- Le fluide pénètre dans  $R_{HP}$  sous une haute pression égale à  $p_1$  (état 1) et en ressort sous une pression intermédiaire  $p_2$  (état 2).
- Le fluide pénètre dans  $R_{BP}$ , sous la pression intermédiaire égale à  $p_5$  (état 5) et en ressort sous une basse pression  $p_6$  (état 6). C PHP et C PBP sont des compresseurs, respectivement haute et basse pression, qui assurent des compressions également supposées adiabatiques et réversibles du fluide à l'état gazeux :
- Le fluide pénètre dans C PHP sous une pression intermédiaire  $p_3$  (état 3) et en ressort sous la haute pression  $p_4$  (état 4).
- Le fluide pénètre dans C PBP sous basse pression  $p_7$  (état 7) et en ressort sous la pression intermédiaire  $p_8$  (état 8).

À la sortie de  $R_{HP}$  (état 2), et à la sortie de C PBP (état 8), le fluide pénètre dans le mélangeur-séparateur (MS) et ressort à l'état de vapeur sèche saturante (état 3) vers C PHP et à l'état de liquide saturant (état 5) vers  $R_{BP}$ . L'échangeur MS est parfaitement calorifugé, dépourvu de partie mobile, et les évolutions du fluide y sont supposées réversibles.

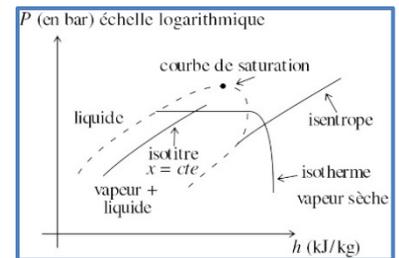
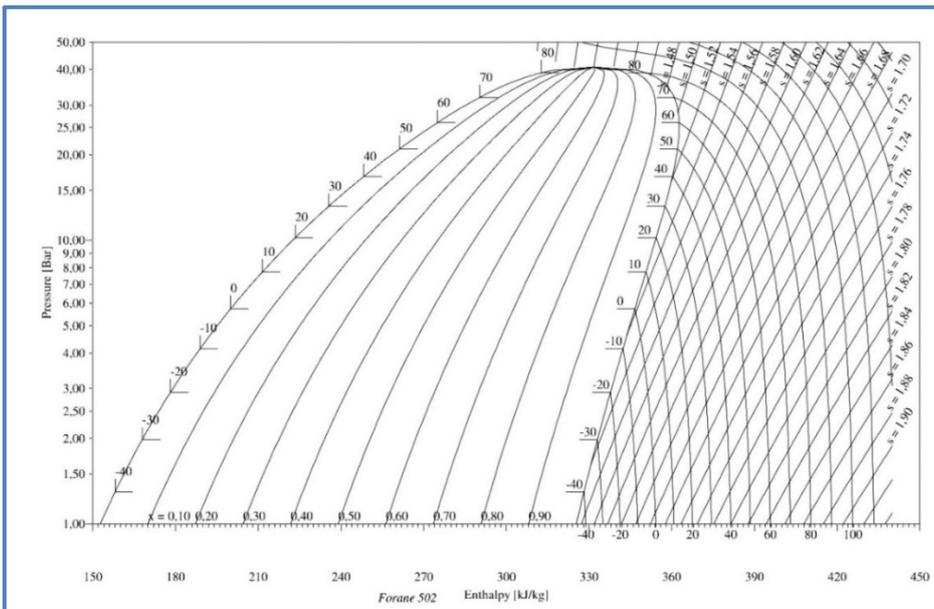
Données :

- $P_1 = 15 \text{ bar}, P_2 = P_8 = 4,0 \text{ bar}, P_6 = 1,5 \text{ bar}$ .
- Débit du cycle basse pression ;  $D_{BP} = 1,50 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$  et débit du cycle haute pression :  $D_{HP} = 2,43 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- Puissance thermique de réfrigération  $P = 240 \text{ kW}$  (reçue par le fluide au niveau de l'évaporateur).

1. Étude du diagramme des frigoristes :  $\ln P = f(h)$

L'abscisse est l'enthalpie massique  $h$  du fluide étudié, exprimée en  $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ , avec une échelle linéaire. L'ordonnée est la pression  $P$ , exprimée en bar ( $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ ), avec une échelle logarithmique.

Quelle est la forme des isothermes à l'intérieur de la courbe de saturation ? On justifiera précisément la réponse fournie. Trouver l'équation d'une isotherme d'un gaz parfait dans le diagramme étudié ; y a-t-il accord avec les isothermes du diagramme réel du fluide Forane 502, représenté ci-dessous ?



2. Étude du cycle haute pression (1→2→3→4)

Le fluide frigorigène étudié ici est le Forane 502. Tracer le cycle 1, 2, 3, 4 sur le diagramme fourni ci-dessus. Présenter, sous forme de tableau, les caractéristiques ( $h, P, T, x$ ) de chacun des états 1, 2, 3 et 4 par lecture directe sur ce diagramme ainsi complété. Retrouver le titre massique en vapeur  $x$  du fluide dans l'état 2.

3. Étude du cycle basse pression (5→6→7→8)

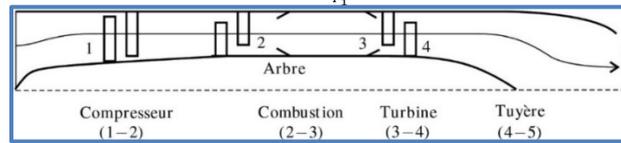
Tracer le cycle 5, 6, 7, 8 sur le diagramme fourni en annexe. Déterminer les valeurs de ( $h, P, T, x$ ) pour les états 5 et 6 du fluide. Faire de même pour le fluide dans l'état 7 ; en déduire les valeurs pour l'état 8. Présenter, sous forme de tableau, les caractéristiques ( $h, P, T, x$ ) de chacun des états 5, 6, 7 et 8.

4. Bilan énergétique

Calculer la puissance mécanique échangée dans C PHP et C PBP. Calculer la puissance thermique échangée dans l'évaporateur et dans le condenseur. Calculer le COP (coefficient de performance) de l'installation frigorifique étudiée :  $COP = \frac{\text{utile}}{\text{coût}} = \frac{P_{th, \text{évaporateur}}}{P_{méca}}$ . Calculer le COP du cycle réfrigérant idéal de Carnot ayant mêmes températures de source froide et de source chaude. En déduire le rendement du cycle étudié par rapport au cycle de Carnot :  $\eta = \frac{COP}{COP_{Carnot}}$ . Commenter.

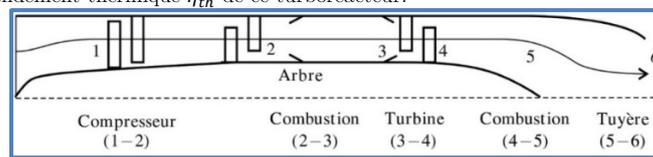
## TH16 – Turboréacteur

Un compresseur axial aspire l'air ambiant. Après compression, l'air est chauffé dans la chambre de combustion jusqu'à la température ( $T_3 = 1250\text{ K}$ ). Après détente partielle dans la turbine axiale, l'air est envoyé dans la tuyère où la détente s'effectue jusqu'à la pression ambiante ( $P_5 = 1,00\text{ bar}$ ). Le compresseur est uniquement entraîné par la turbine, qui lui transmet intégralement la puissance mécanique que lui fournit l'écoulement. On rappelle que  $P_2 = P_3$ . On donne le taux de compression du compresseur :  $\frac{P_2}{P_1} = 6,15$ .



L'air est assimilé à un gaz parfait. On donne  $c_p = 1,00\text{ kJ/kg}\cdot\text{K}^{-1}$  et  $\gamma = 1,40$ . L'énergie cinétique sera négligée, sauf à la sortie de la tuyère. Le débit massique d'air aspiré par le turboréacteur vaut  $D_M = 50,00\text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ . Le compresseur aspire l'air ambiant défini par sa pression  $P_1 = 1,00\text{ bar}$  et sa température  $T_1 = 288\text{ K}$ . Les évolutions à l'intérieur des turbomachines (compresseurs et turbines) et des tuyères sont supposées adiabatiques, réversibles. On négligera les pertes de charge de l'air à l'intérieur des chambres de combustion : les évolutions y sont isobares. On définit le rendement thermique du turboréacteur (noté  $\eta_{th}$ ) comme étant le rapport entre l'énergie cinétique massique reçue par l'air, notée  $e_c$ , et la (ou la somme des) quantité(s) de chaleur massique(s) fournie(s) par la (ou les) chambre(s) de combustion, notée  $q_{combustion}$ .

- Calculer la température  $T_2$  (sortie du compresseur), le travail indiqué massique de compression, la température  $T_4$ , la pression  $P_4$  à la sortie de la turbine, la température  $T_5$  et la vitesse  $c_5$  à la sortie de la tuyère.
- Calculer la quantité de chaleur massique fournie à l'air lors de la combustion, notée  $q_{23}$ . Calculer l'énergie cinétique massique de l'air à la sortie de la tuyère. En déduire le rendement thermique  $\eta_{th}$  de ce turboréacteur.



La configuration est identique à la précédente mais on insère une seconde chambre de combustion entre la turbine et la tuyère. Lors de cette seconde combustion, l'air est à nouveau chauffé jusqu'à la température de  $T_5 = 1930\text{ K}$ . La détente s'effectue ensuite dans la tuyère jusqu'à la pression ambiante ( $P_6 = 1,00\text{ bar}$ ). Comme précédemment la turbine entraîne le compresseur, le taux de compression est identique et la température de fin de première combustion aussi ( $T_3 = 1250\text{ K}$ ). On rappelle que  $P_2 = P_3$  et que  $P_4 = P_5$ .

- Calculer  $T_2, T_4, P_4, T_6$  à la sortie de la tuyère et la vitesse  $c_6$  à la sortie de cette tuyère.
- Calculer la quantité de chaleur massique fournie à l'air lors de la seconde combustion, notée  $q_{45}$ . En déduire la quantité de chaleur massique fournie globalement à l'air, notée  $q_{combustion} = q_{23} + q_{45}$ . Calculer l'énergie cinétique massique de l'air à la sortie de la tuyère. En déduire le rendement thermique  $\eta_{th}$  de ce turboréacteur. Comparer les paramètres des deux turboréacteurs étudiés et conclure.

## TH17 – Cycle Diesel

Une mole de gaz parfait subit les transformations réversibles suivantes : état (1) → état (2) : compression adiabatique, état (2) → état (3) : dilatation à pression constante, état (3) → état (4) : détente adiabatique, état (4) → état (1) : refroidissement à volume constant. Chaque état est défini par la pression  $P_i$ , la température  $T_i$  et le volume  $V_i$  (i variant de 1 à 4). On appelle  $\gamma$  le rapport des chaleurs molaires  $\frac{c_{pm}}{c_{vm}}$ . On définit  $a = \frac{V_1}{V_2}$  &  $b = \frac{V_1}{V_3}$ .

- Représenter le cycle sur un diagramme de Clapeyron.
- Donner les expressions de la pression, du volume et de la température pour les états (2), (3) et (4), en fonction de  $P_1, V_1, T_1, a$  et  $b$ .
- Calculer les travaux et chaleurs échangés pour toutes les transformations subies. Préciser notamment le sens des échanges.
- Proposer une expression pour le rendement d'un moteur fonctionnant suivant ce cycle, en fonction des travaux et chaleurs échangés.

Donner l'expression du rendement  $\eta$  en fonction de  $\gamma, a$  et  $b$ .

Données numériques :  $\gamma = 1,4, a = 9, b = 3$ .

## TH18 – Machine thermique avec régénérateur

Un gaz parfait circule en régime stationnaire dans une machine et subit le cycle de transformations suivant :

- Transformation 1-2 : compression réversible et isotherme, à la température  $T_{fr}$  de la pression  $p_1$  à  $p_2 > p_1$ .
- Transformation 2-3 : échauffement isobare de  $T_{fr}$  à  $T_{ch} > T_{fr}$  ;
- Transformation 3-4 : détente réversible et isotherme, à la température  $T_{ch}$ , de  $p_2$  à  $p_1$ ,
- Transformation 4-1 : refroidissement isobare de  $T_{ch}$  à  $T_{fr}$ .

Les transformations 2-3 et 4-1 ont lieu à l'intérieur d'un régénérateur : échangeur thermique où le fluide échange du transfert thermique avec lui-même. Le régénérateur est supposé isolé thermiquement de l'extérieur. On néglige les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle.

La turbine entraîne le compresseur, ainsi qu'un alternateur produisant de l'énergie électrique. On rappelle l'expression de l'entropie massique d'un gaz parfait en fonction de la température  $T$  et de la pression  $p$  :

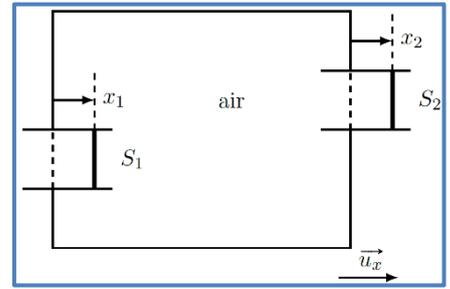
$$s(T, P) = c_p \ln\left(\frac{T}{T_{réf}}\right) - \frac{R}{M} \ln\left(\frac{p}{p_{réf}}\right) + s(T_{réf}, p_{réf})$$

Où  $T_{réf}$  et  $p_{réf}$  sont des grandeurs constantes,  $c_p$  la capacité thermique massique et  $M$  la masse molaire du gaz.

- Exprimer les transferts thermiques massiques  $q_{12}$  et  $q_{23}$  reçus par le gaz respectivement dans le compresseur et la turbine.
- Exprimer les travaux massiques utiles  $w_{u,12}$  et  $q_{u,23}$  reçus par le gaz respectivement dans le compresseur et la turbine. En déduire le rendement de la machine.
- Commenter le résultat.

TH19 – Oreille moyenne

L'oreille moyenne est la partie de l'appareil auditif comprise entre l'oreille externe et l'oreille interne. Chez les mammifères, l'oreille moyenne comprend le tympan ainsi que les osselets, trois très petits os qui s'appellent respectivement de dehors en dedans : le marteau, l'enclume et l'étrier. L'oreille moyenne se modélise par une cavité remplie d'air, initialement à la température  $T_0$  et à la pression standard  $P_0$ . Cette cavité comporte deux membranes mobiles, la première (le tympan) de section  $S_1$  et d'abscisse  $x_1$  par rapport à la position au repos et l'autre de section  $S_2$  et d'abscisse  $x_2$  par rapport à la position au repos comme indiqué. Le volume de la cavité est noté  $V_0$  au repos. Lorsque ces membranes sont en mouvement, le volume  $V$  et la pression  $P$  de la cavité seront supposés varier très faiblement de leurs valeurs au repos,  $V_0$  et  $P_0$ . On note  $V = V_0 + dV$  et  $P = P_0 + dP$ .

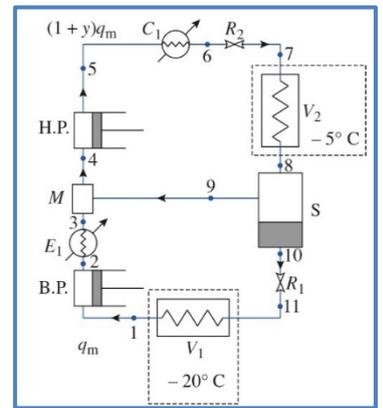


L'air est assimilé à un gaz parfait, de  $\gamma = \frac{7}{5}$ . L'air dans la cavité est supposé évoluer de manière adiabatique réversible.

- Justifier le caractère adiabatique. Exprimer la variation de pression  $dP$  en fonction de  $S_1; S_2; x_1; x_2; P_0$  et  $V_0$ .
- Un modèle simplifié pour étudier les mouvements des deux membranes est le suivant. Les deux membranes possèdent respectivement des masses  $m_1$  et  $m_2$  et sont soumises à des forces de rappel de constantes de raideur  $k_1$  et  $k_2$ . Les seules autres forces à prendre à compte sont les forces de pression engendrées sur chacune des deux membranes par l'écart de pression  $dP$  dans la cavité et la force exercée sur le tympan (c'est-à-dire la première membrane), notée  $\vec{F} = F\vec{u}_x$  et due à l'écoute d'un son. Écrire les deux équations régissant les positions  $x_1$  et  $x_2$  des deux membranes.
- La force  $F$  est sinusoïdale,  $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ , où  $\omega$  est la pulsation. Exprimer le rapport des amplitudes  $\frac{x_2}{x_1}$  en fonction de  $\omega, \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}, \Omega_2 = \sqrt{\frac{7 P_0 S_2^2}{5 V_0 m_2}}$  et  $\Omega_c = \sqrt{\frac{7 P_0 S_1 S_2}{5 V_0 m_2}}$ . Tracer l'allure de la courbe  $\frac{x_2}{x_1}(\omega)$ .
- Commenter ces résultats. Que changerait la prise en compte des frottements ?
- En fait, la seconde membrane de la cavité débouche sur un liquide, assimilable à de l'eau. Expliquer l'utilité d'un système mécanique de trois osselets liant les deux membranes de la cavité.

TH20 – Machine frigorifique à Ammoniac

On étudie une machine frigorifique à ammoniac qui permet de refroidir simultanément deux sources dont les températures sont différentes. La machine comporte deux étages, chacun d'eux comprenant un compresseur, un refroidisseur intermédiaire (noté E ou C), un détendeur R, et un évaporateur V. Les détendeurs et les compresseurs sont supposés parfaitement calorifugés. Les refroidisseurs et les évaporateurs sont isobares. Les deux étages communiquent par un séparateur S et un mélangeur M, qui sont isobares et parfaitement calorifugés. Sur la figure, les flèches bleues indiquent le sens de parcours du fluide dans les divers organes de la machine.



Les températures des deux sources froides sont respectivement égales à  $-5^\circ c$  et  $-20^\circ c$ . Le débit massique est égal à  $q_m$  dans l'étage basse pression, il est égal à  $(1 + y)q_m$  dans l'étage haute pression. Le premier effet frigorifique s'effectue

à  $-20^\circ c$  dans l'évaporateur  $V_1$ , où la vaporisation est totale, le second à  $-5^\circ c$  dans l'évaporateur  $V_2$ , où la vaporisation est partielle. Le cahier des charges du dispositif prévoit l'absorption d'une puissance thermique  $P_{qh} = 58,0 kW$  à  $-5^\circ c$  et d'une puissance thermique  $P_{qb} = 23,2 kW$  à  $-20^\circ c$ . On pose  $a = \frac{P_{qh}}{P_{qb}}$ .

- Sachant que le refroidisseur  $E_1$ , le mélangeur M, le séparateur S et l'évaporateur  $V_2$  sont isobares, quelle est la pression aux états 2, 3, 4, 9 et 8 ?
- Calculer les variations d'enthalpie massique (chaleurs latentes) de vaporisation à  $-5^\circ c$  et  $-20^\circ c$ , respectivement  $l_{vap}(-5^\circ c)$  et  $l_{vap}(-20^\circ c)$ .
- Calculer les titres massiques en vapeur  $x_7$  et  $x_{11}$  dans les états 7 et 11.
- On extrait du séparateur S la vapeur saturante sèche (état 9) et le liquide saturant (état 10) du mélange liquide-vapeur de l'état 8.

Exprimer la relation entre  $y$  et  $x_8$ , titre massique en vapeur dans l'état 8.

- Exprimer  $a$  en fonction de  $l_{vap}(-5^\circ c)$  et  $l_{vap}(-20^\circ c), x_8, x_7$  et  $x_{11}$ .
- En déduire les valeurs numériques de  $x_8$  et  $y$  ainsi que l'enthalpie massique  $h_8$ .
- Calculer l'enthalpie massique  $h_4$  dans l'état 4.
- Exprimer le débit massique  $q_m$  en fonction de  $P_{qb}, h_1$  et  $h_{11}$ . Calculer numériquement  $q_m$ .
- Calculer la puissance mécanique totale  $P_m$  mise en jeu dans les compresseurs ainsi que le coefficient d'efficacité global de l'installation,  $\eta = \frac{P_{qb} + P_{qh}}{P_m}$ .
- Tracer les cycles H.P et B.P dans un diagramme  $(\ln(p), h)$ .

Données :

$t(^\circ c)$	$P_s(kPa)$	$h_l(kJ.kg^{-1})$	$h_g(kJ.kg^{-1})$
-20	190,2	326,7	1653,0
-5	345,9	395,0	1672,6
20	857,2	511,5	1705,4

- État 1 : vapeur saturante sèche à  $-20^\circ c$ . ■ État 2 : vapeur surchauffée à  $P_2 : h_2 = 1740 kJ.kg^{-1}$ .
- État 3 :  $t_3 = 20^\circ c ; h_3 = 1730 kJ.kg^{-1}$  ■ État 5 :  $h_5 = 1820 kJ.kg^{-1}$ .
- État 6 : liquide saturant à  $t_6 = 20^\circ c$ . ■ État 7 :  $t_7 = -5^\circ c$ .
- État 8 : mélange liquide-vapeur (vapeur humide) à  $-5^\circ c$ , titre massique en vapeur  $x_8$ .
- État 9 : vapeur saturante sèche à  $-5^\circ c$ .
- État 10 : liquide saturant à  $-5^\circ c$ .
- État 11 :  $t_{11} = -20^\circ c$ .

### TH21 – Diffusion de particules dans un axone

On considère une cellule sphérique, créatrice de particules, liée à un axone assimilé à un tuyau de longueur  $L$ . Cette diffusion de particules est caractérisée par le coefficient de diffusion  $D$ . Il y a consommation de particules le long du tuyau avec le coefficient  $\alpha$ , en moles par secondes et par mètres, uniforme et constant. La concentration  $c$  en particules dans l'axone vérifie  $c(x = 0) = c_0$ .



1. Qu'est-ce qu'une loi phénoménologique ? Citer des exemples.
2. Établir l'équation de diffusion vérifiée par  $c(x,t)$ .
3. Quelle est la longueur maximale de l'axone en régime permanent ?

### TH22 – Diffusion dans un cylindre

On considère un cylindre d'axe Oz, de longueur  $L$  très grande devant le rayon  $R_2$ . On creuse dans ce cylindre une cavité cylindrique de même axe, de rayon  $R_1$ , remplie d'un gaz avec une densité particulaire  $n_1$  maintenue constante. On néglige les effets de bord ce qui revient à considérer la diffusion radiale entre  $r = R_1$  et  $r = R_2$ . On note  $D$  le coefficient de diffusion. L'opérateur laplacien en coordonnées cylindriques s'écrit :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

1. Démontrer l'équation aux dérivées partielles sur  $n$  dans le cas à une dimension (variable notée  $x$ ) en régime variable. En déduire la généralisation de cette équation avec l'opérateur laplacien.
2. On se place en régime stationnaire. Exprimer la densité particulaire  $n(r)$  pour  $r$  compris entre  $R_1$  et  $R_2$  en fonction de  $n_1, r, D, R_1$  et  $J_{D1}$  (densité de flux de particules pour  $r = R_1$ ). En déduire le vecteur densité de flux de particules en fonction de  $J_{D1}, R_1$  et  $r$ .

### TH23 – Perturbation sinusoïdale de concentration

Le coefficient de diffusion du sucre dans l'eau est noté  $D$  ; il est supposé indépendant de la concentration. Une solution sucrée possède, à l'instant  $t = 0$ , une concentration en sucre dépendant de l'abscisse  $x$  selon une loi de la forme :

$$c(x, t = 0) = c_0 + c_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

où  $c_0, c_1$  avec  $c_1 < c_0$  et  $\lambda$ , sont des constantes.

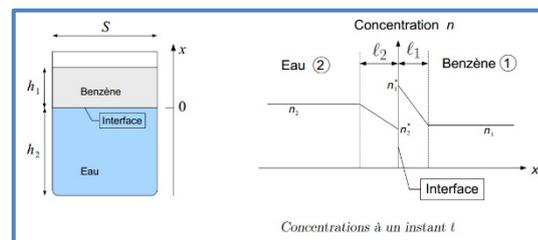
L'évolution ultérieure, pour  $t > 0$ , de la concentration est cherchée sous la forme :

$$c(x, t) = c_0 + f(t) \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

1. Démontrer, à l'aide d'un bilan de particules, l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la concentration  $c(x, t)$  appelée équation de la diffusion.
2. Déterminer, en fonction de  $D$  et  $\lambda$ , l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par la fonction  $f(t)$ . Résoudre cette équation en tenant compte des conditions initiales. Exprimer  $f(t)$  en fonction de  $c_1, t$  et d'un temps caractéristique  $\tau$  à écrire en fonction de  $D$  et  $\lambda$ . Vérifier l'unité de  $\tau$ . Quel sens concret donnez-vous au paramètre  $\tau$  ?
3. Représenter graphiquement, pour  $t > 0$  donné, l'évolution de la concentration  $c(x, t)$  en fonction de  $x$  à deux instants différents. Tracer également la distribution limite  $c(x, \infty)$ .

### TH24 – Partage entre deux solvants

Un bêcher de section d'aire  $S$  contient de l'eau sur une hauteur  $h_2$  et du benzène sur une hauteur  $h_1$  et on propose un modèle simplifié pour l'étude cinétique du transfert vers le benzène de l'iode  $I_2$  contenu initialement dans l'eau. A un instant quelconque, on assimile la concentration de l'iode  $n(x)$  en fonction de  $x$  au profil indiqué ci-dessus : les concentrations dans l'eau et dans le benzène sont notées respectivement  $n_2$  et  $n_1$ , et elles sont supposées uniformes hormis dans une mince couche de diffusion appelée couche limite ; les épaisseurs de ces couches limites sont notées  $l_2$  dans l'eau et  $l_1$  dans le benzène. Dans ces couches limites, la concentration varie affinement en fonction de  $x$  et l'on note  $n_1^*$  et  $n_2^*$  les concentrations dans le benzène et dans l'eau au niveau de l'interface à un instant quelconque  $t$ .



On suppose que la quantité d'iode dans les couches limites est négligeable devant celle contenue dans le reste du solvant et on négligera également le volume de ces couches limites devant les volumes  $V_2$  de l'eau et  $V_1$  du benzène.

Les coefficients de diffusion de l'iode dans l'eau et dans le benzène sont notés respectivement  $D_2$  et  $D_1$ . La pesanteur est supposée négligeable.

#### 1. Résolution de l'équation de la diffusion en régime permanent

- a) La loi de Fick s'écrit :  $\vec{j} = -D \frac{\partial n}{\partial x} \vec{u}_x$ , en déduire l'équation de la diffusion en fonction de  $n$  et  $D$ .
- b) Dans le cas d'un régime permanent, donner l'expression de  $n(x)$  et du flux de matière  $\phi$  en fonction de  $n(0) = n_1$ ,  $n(l) = n_2$ ,  $D$ ,  $S$  (surface traversée par les molécules),  $l$  (longueur où règne la diffusion).

#### 2. Justification du profil des concentrations

- a) On donne  $n_1(t = 0) = 0$  et  $n_2(t = 0) = n_0$ . A l'aide d'un bilan de matière, donner une relation entre  $n_1, n_2, n_0, h_1$  &  $h_2$ .
- b) On suppose que l'expression du flux de matière  $\phi$ , établie en régime permanent, est valable à chaque instant  $t$ . Donner deux expressions de la quantité d'iode qui passe par unité de temps de l'eau vers le benzène.

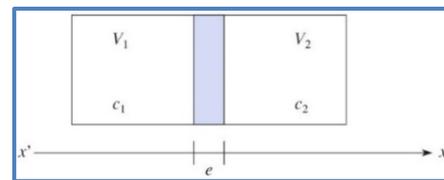
#### 3. Calcul du temps caractéristique de diffusion

Dans toute la suite, afin d'alléger l'écriture, on prendra  $D = D_1 = D_2$ ,  $\frac{h_2}{h_1} = \frac{l_2}{l_1} = \alpha = 10$ , et on ne conservera que  $D, h = h_1, l = l_1$  comme paramètres.

- a) On suppose que seul le phénomène de diffusion limite la vitesse de transfert et que l'équilibre chimique est réalisé à chaque instant au niveau de l'interface : alors  $n_1^* = K n_2^*$ ,  $K$  est la constante de partage. Déterminer  $n_1^*$  et  $n_2^*$  en fonction de  $n_2$ .
- b) Donner l'équation différentielle vérifiée par  $n_2(t)$ . Montrer qu'il apparaît une constante de temps  $\tau$  que l'on donnera en fonction des paramètres.
- c) Calculez  $\tau$ . Conclure

### TH25 – Diffusion de molécules à travers une membrane

La diffusion de molécules à travers une membrane est très utilisée dans des domaines très divers, en médecine par exemple. On considère le dispositif représenté ci-dessous :



Les deux compartiments, séparés par une membrane verticale poreuse, contiennent une même solution moléculaire, mais à des concentrations molaires différentes  $C_1$  &  $C_2$  ( $C_1 > C_2$ ). Leurs volumes constants seront notés respectivement  $V_1$  &  $V_2$ . La membrane, de surface  $S$ , d'épaisseur  $e$ , comporte par unité de surface  $n$  pores cylindriques d'axe horizontal normal à la paroi. Les pores sont supposés identiques. Dans chacun d'eux s'établit un flux macroscopique de molécules suivant  $Ox$ , de densité moléculaire  $j_D$ , tendant à égaliser les concentrations. On admettra que  $j_D$  est donné par la loi de Fick :  $j_D = -D \frac{\partial c}{\partial x}$ . A une date  $t$  les concentrations, maintenues homogènes sur les volumes  $V_1$  &  $V_2$ , sont donc  $C_1(t)$  &  $C_2(t)$ . On notera  $\Delta C = C_1(t) - C_2(t)$ .

1. En admettant que dans un pore la concentration soit une fonction affine de  $x$ , montrer que la densité de flux molaire  $J_m$  des molécules à travers toute la membrane est de la forme :

$$\vec{J}_m = K \Delta c \vec{e}_x$$

On donnera  $K$ , appelée perméabilité de la membrane, en fonction de  $n$ ,  $D$ ,  $e$  et  $r$ , rayon d'un pore.

2. Calculer  $r$  numériquement.

Données :  $K = 10^{-6} \text{ms}^{-1}$ ,  $n = 10^6 \text{pores par cm}^2$ ,  $e = 10 \mu\text{m}$ ,  $D = 10^{-9} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ .

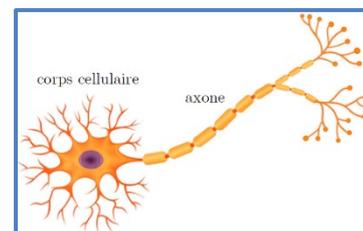
3. Etablir l'équation différentielle donnant  $\Delta C(t)$ . On pourra poser  $\frac{1}{\tau} = KS \left( \frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right)$

4. Intégrer cette équation. Au bout de quelle durée la différence des concentrations est-elle égale au dixième de sa valeur initiale ?

Données :  $V_1 = 2L$ ,  $V_2 = 1L$ ,  $S = 200 \text{cm}^2$ .

### TH26 – Transport diffusif de glucose dans l'axone

Un neurone est une cellule constituée d'un corps cellulaire, où se situent le noyau et les principales structures actives, et d'un axone, partie en forme de long tube transmettant les signaux électriques vers d'autres cellules. Cette transmission nécessite la diffusion de diverses substances le long de l'axone : on s'intéresse ici à cette diffusion (en considérant l'axone comme un simple tube, sans ramifications).



1. Le glucose noté  $G$  est consommé par des éléments actifs le long de l'axone. Il est fourni à l'entrée de l'axone par le corps cellulaire, où sa concentration  $[G]_0$  est maintenue constante. On note  $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) la quantité de glucose consommée par unité de temps et par unité de longueur de l'axone : un bon fonctionnement nécessite que soit uniforme le long de l'axone et constant au cours du temps. Montrer que cela impose une longueur maximale pour l'axone, et évaluer cette longueur.

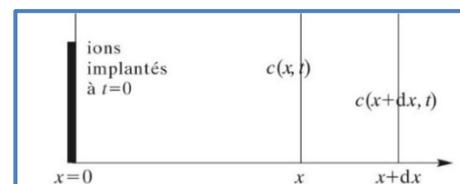
2. Pour d'autres substances chimiques il existe un processus différent. La diffusion d'une substance  $A$  le long de l'axone est parfois ralentie par une réaction chimique entre  $A$  et des sites actifs (notés  $B$ ) situés sur les parois intérieures du neurone. Une molécule  $A$  peut se fixer sur un site  $B$  pour former un complexe  $AB$  sur la paroi :  $A + B = AB$  (constante d'équilibre  $K$ ). Cette réaction est réversible, et sa cinétique est beaucoup plus rapide que les phénomènes diffusifs. Enfin, les molécules  $A$  étant en solution très diluée, les sites  $B$  sont toujours en grand excès dans un volume donné du tube. Montrer que l'existence de cet équilibre chimique revient à remplacer, dans l'équation de la diffusion sans consommation, le coefficient de diffusion  $D$  de la substance  $A$  par un coefficient effectif  $D'$  que l'on exprimera.

Données :

- Diamètre moyen d'un axone :  $1 \mu\text{m}$  ; Concentration du glucose dans le corps cellulaire  $[G]_0 = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .
- Consommation linéique du glucose dans l'axone  $\alpha = 4,8 \cdot 10^{14} \text{mol} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- Coefficient de diffusion du glucose dans ce milieu  $D = 2,0 \cdot 10^{-10} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

### TH27 – Diffusion d'atomes dans un solide

On utilise très souvent les phénomènes de diffusion pour la fabrication des transistors dans l'industrie microélectronique. La diffusion d'atomes tels que le Bore dans un substrat de silicium permet, par exemple, de modifier considérablement les propriétés électriques de ce dernier. Le plus souvent, les processus de diffusion ont lieu à des températures élevées. Ainsi, les atomes se trouvent « figés » lorsque le dispositif est ramené à température ambiante. La longévité du dispositif est ainsi assurée. On se propose ici d'établir les lois expliquant la diffusion des atomes dans les solides.



On suppose que la diffusion a lieu uniquement suivant la direction  $(Ox)$ . Soit deux plans situés en  $x$  et en  $x+dx$  où existent, à l'instant  $t$ , respectivement les concentrations de particules  $c(x, t)$  et  $c(x + dx, t)$ .

1. Donner l'expression de la loi de Fick, liant le flux de particules  $J(x)$  et la concentration particulière  $c(x, t)$ . Donner la dimension de  $J(x)$  et du coefficient de diffusion  $D$ .
2. Établir, grâce à une loi de conservation, une autre relation liant  $J$  et  $c$ .
3. En déduire l'équation de diffusion.
4. À l'instant initial, la concentration d'atomes est nulle partout sauf sur une faible épaisseur située en  $x=0$ . Soit  $Q$  le nombre de moles de particules implantées à la surface du matériau par unité de surface sur cette très faible épaisseur. Au cours du processus de diffusion, la quantité de particules  $Q$  présentes dans le matériau reste constante (aucun atome ne quitte le matériau). On montre alors que la concentration de particules dans le matériau au cours de la diffusion est :  $c(x, t) = B(t) e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$

À l'aide de l'équation de la diffusion, en utilisant les conditions initiales et la conservation de la quantité d'atomes pendant la diffusion, montrer que l'on peut écrire :  $A = 4Dt$  et  $B(t) = \frac{K}{\sqrt{t}}$

Où l'on exprimera  $K$  en fonction de  $Q$  et  $D$ . On rappelle que :  $\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

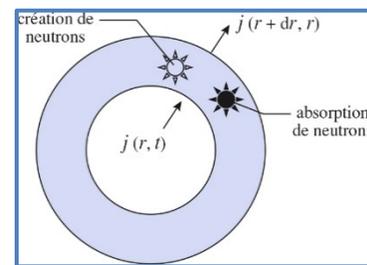
5. Déterminer la profondeur de diffusion  $h$  pour laquelle  $c(h, t) = \frac{c(0, t)}{e^1}$ . Au bout d'un temps  $t=1$ heure, la profondeur de diffusion des atomes considérés est  $h=5 \mu\text{m}$ . Donner la valeur du coefficient de diffusion  $D$  des atomes de bore dans le silicium.

### TH28 – Diffusion de neutrons dans un réacteur nucléaire

On étudie la diffusion de neutrons dans la matière fissile (du plutonium 239 par exemple) d'un réacteur. On suppose que le milieu dans lequel évoluent les neutrons est homogène et contient  $N_p$  atomes de plutonium par unité de volume.  $N_p$  est supposé uniforme et indépendant du temps.

On désigne par :

- $n(M, t)$  le nombre de neutrons par unité de volume en un point M, à l'instant t ;
- $\vec{j}(M, t)$  le vecteur densité de courant de neutrons en M, à t .
- D le coefficient de diffusion.



Le réacteur est sphérique, de centre O, de rayon a, et on admet que le vecteur  $\vec{j}$  s'écrit  $\vec{j} = j \vec{e}_r$  ( $\vec{e}_r$  vecteur unitaire radial) et que n et j ne dépendent que de la distance r et de t. On suppose pour simplifier que tous les neutrons ont des vitesses de même module moyen v et qu'ils parcourent une distance l entre deux chocs avec des noyaux de plutonium.

1. Au cours des collisions, une fraction  $\alpha$  des neutrons peut être absorbée par les noyaux ; en outre, certains neutrons absorbés conduisent à la fission du noyau de plutonium qui produit des neutrons appelés neutrons secondaires. Pour simplifier, on admet, qu'en moyenne, il y a K ( $K > 1$ ) neutrons créés pour un neutron absorbé, et on suppose que les neutrons secondaires ont même vitesse v que les neutrons initiaux.

Pour retrouver l'équation de diffusion on va faire un bilan de matière en coordonnées sphériques. En tenant compte du fait que la surface d'une sphère dépend de r, démontrer que la différence de flux entre la surface en r et la surface en r+dr peut s'écrire :

$$\phi(r, t) - \phi(r + dr, t) = -\frac{\partial(4\pi r^2 j)}{\partial r} dr$$

Montrer, alors que le nombre n de neutrons par unité de volume vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{1}{D} \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial n}{\partial r} \right) + B^2 n$$

et exprimer le coefficient constant  $B^2$  en fonction de D, l,  $\alpha$ , v et K.

2. On se place en régime indépendant du temps.
  - a) En remarquant que  $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial n}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rn)}{\partial r^2}$  déterminer la fonction n(r).

On appellera  $n_0$  le nombre de neutrons par unité de volume pour r=0.

- b) On montre en théorie de la diffusion, qu'une condition simple rendant compte de la discontinuité du milieu pour r=a est d'imposer à n de s'annuler à une « distance extrapolée » égale à  $b = a + 0,7 l$  où l est la distance entre deux chocs. Montrer que ce régime de fonctionnement ne peut exister que si a possède une valeur critique  $a_0$  qu'on exprimera en fonction de B et l.
- c) Application numérique :
  - $D = 20 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  ;  $\frac{1}{v N_p} = \sigma = 5,9 \cdot 10^{-28} \text{ m}^2$  (section efficace de collision neutron, noyau de plutonium) ;
  - $v = 2000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ;  $K = 2,75$  ;  $a = 0,3$ .
  - Masse volumique du plutonium :  $\rho = 19,74 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ; Masse atomique du plutonium  $A = 239 \text{ g mol}^{-1}$  ;
  - Nombre d'Avogadro  $N_a = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

Calculer l,  $a_0$  et la masse critique de plutonium qui correspond à  $a_0$ .

3.
  - a) Prévoir qualitativement l'évolution en fonction du temps du flux de neutrons lorsque a est supérieur ou inférieur à la valeur critique  $a_0$ .
  - b) On cherche une solution de l'équation de diffusion en régime dépendant du temps sous la forme d'une fonction à variables séparées  $n(r, t) = f(t) \frac{g(r)}{r}$ . Cette fonction vérifie la condition  $n(b, t) = 0$ . Déterminer n(r,t) en fonction de  $n_0$  densité de neutrons en r=0 à t=0. Retrouver le résultat du 3a)

### TH31 – Taille des mammifères marins

Les mammifères sont des animaux à sang chaud dont la température reste constante. Pour maintenir leur température constante, leurs cellules sont le siège de réactions chimiques exothermiques qui dégagent une puissance volumique a. La puissance totale cédée par le mammifère au niveau de sa surface sera notée P.

Les mammifères sont décrits comme des sphères de rayon R, plongés dans de l'eau de conductivité thermique  $\lambda$  et de température à l'infini  $T_\infty$  (c'est-à-dire loin des animaux).

1. Equation de diffusion en coordonnées sphériques
  - a) Démontrer que l'énergie thermique échangée par le système  $\Sigma$  compris entre deux sphères de rayon r et r+dr peut se mettre sous la forme :

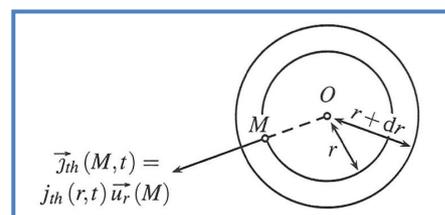
$$\delta Q_e = -4\pi \frac{\partial(r^2 j_{th})}{\partial r} dr dt$$

- b) En tenant compte de la loi Fourier :  $\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r$ , démontrer que l'équation de diffusion dans l'eau peut s'écrire :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

2. Calculer la température  $T(r)$  de l'eau autour d'un mammifère, en fonction de P,  $\lambda$ , r et  $T_\infty$ . En déduire la température  $T_c$  de l'eau au contact de l'animal.
3. Établir l'expression de la puissance thermique perdue par le mammifère en  $r = R$ , en fonction de  $T_c$ ,  $\lambda$ , R et  $T_\infty$ . En déduire que  $R > R_{min}$  pour l'existence du mammifère marin, où l'on exprimera  $R_{min}$  en fonction de  $\lambda$ ,  $T_c$ , a et  $T_\infty$ . Faites l'application numérique. Conclure sur l'existence des petits mammifères marins, sachant que le plus petit est le marsouin du pacifique qui mesure à peu près 1m de long. (Celui-ci est en voie d'extinction à cause des filets de pêche...)

Données :  $\lambda = 0,6 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ ,  $T_\infty = 300 \text{ K}$ ,  $T_c = 310 \text{ K}$ ,  $a = 100 \text{ W m}^{-3}$

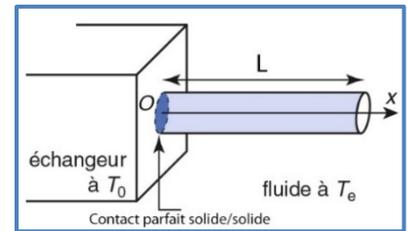


### TH32 – Ailette de refroidissement

On considère une barre de cuivre cylindrique de rayon  $a = 5 \text{ mm}$ , de longueur  $L$ . En  $x = 0$ , la barre de cuivre est en contact avec un milieu à la température  $T_0 = 330 \text{ K}$ . Tout le reste de la tige est en contact avec l'air ambiant de température uniforme  $T_e = 300 \text{ K}$ . On appelle :

- $\lambda = 400 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  la conductivité thermique du cuivre
- $h = 12 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$  le coefficient de transfert conductoconvectif entre la barre de cuivre et l'air tel que le transfert thermique conductoconvectif puisse se mettre sous la forme :  $\delta Q = hS(T_s - T_f)dt$

avec  $T_s$  la température du solide et  $T_f$  la température du fluide.



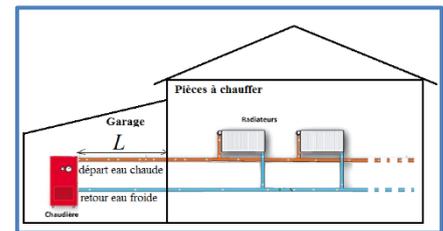
1. On considère que la longueur de la tige est quasi-infinie.
- On se place en régime permanent démontrer que l'équation de diffusion s'écrit :

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{T}{\delta^2} = -\frac{T_e}{\delta^2} \text{ où } \delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}$$

- Déterminer numériquement le profil de température  $T(x)$  en tout point de la barre de cuivre.
- 2. On remplace la tige précédente par une tige de longueur  $L = 20 \text{ cm}$ . Déterminer numériquement  $T(x)$ . Calculer  $T(L)$ .

### TH33 – Déperditions dans un circuit de chauffage central

On étudie le cas d'une maison équipée d'une chaudière située dans un garage (température ambiante  $T_a = 10 \text{ °C}$ ). L'eau sort de la chaudière à la température  $T_0 = 70 \text{ °C}$  et s'écoule avec un débit constant  $D_m = 30 \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}$  dans une conduite en cuivre de longueur  $L = 5,0 \text{ m}$  et de rayon  $R = 20 \text{ mm}$ , avant de pénétrer dans les pièces à chauffer. On fournit la loi de Newton pour le transfert conductoconvectif à l'interface entre un solide et un fluide :  $\phi_{\text{solide} \rightarrow \text{fluide}} = hS(T_{\text{solide}} - T_{\text{fluide}})$ . On suppose que la température de l'eau ne dépend que de la position  $x$  le long de la conduite, et que la température du cuivre est identique à celle de l'eau.



1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la température  $T(x)$  sous la forme suivante :

$$\frac{dT}{dx} + \frac{T(x)}{l} = A$$

- Résoudre cette équation et estimer la distance caractéristique  $l$  de l'évolution de  $T(x)$ .
- 2. Établir une expression exacte puis approchée de la puissance perdue le long de la conduite. Effectuer l'application numérique et commenter le résultat.
- 3. D'après l'expression approchée obtenue dans la question précédente, quelle est l'influence d'une augmentation du débit massique sur la puissance perdue ? Proposer une démarche permettant de déterminer plus finement cette influence.
- 4. On souhaite réduire les pertes en installant un manchon isolant d'épaisseur  $e = 8 \text{ cm}$  sur toute la longueur de la conduite. Le fournisseur indique que l'isolation ainsi réalisée présente une résistance thermique de  $10 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$  pour un mètre de conduite. Peut-on négliger la conducto-convection dans cette situation ? Estimer l'économie journalière réalisée grâce à cette isolation.

Données :

- $c_{\text{eau}} = 4,2 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ ,  $h = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ , prix du  $kWh$  de fioul ou gaz naturel :  $0,10 \text{ €}$

### TH34 – Effet « cave »

L'atmosphère occupe le demi-espace  $x < 0$  et le sol le demi-espace  $x > 0$ . La température au niveau du sol est :

$$T(0) = T_0 + a \cos(\omega t).$$

On utilisera la notation complexe :  $\underline{T}(0) = T_0 + a e^{j\omega t}$

Pour le sol, on note :

- $\mu = 3,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  la masse volumique
- $c = 515 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  la capacité thermique massique
- $\lambda = 1,2 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$  la conductivité thermique

Et on pose :  $\delta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\mu c \omega}}$

1. Démontrer l'équation de la diffusion thermique en coordonnées cartésiennes. On cherche une solution de la forme :  $\underline{T}(x, t) = T_0 + \underline{f}(x)e^{j\omega t}$ . En déduire que  $\underline{f}(x)$  vérifie :

$$\frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x^2} - \frac{2j}{\delta^2} \underline{f} = 0$$

En déduire que  $\underline{f}(x)$  peut s'écrire :

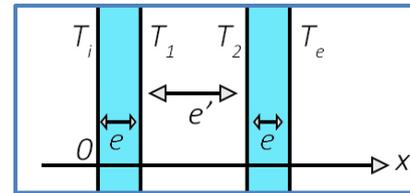
$$\underline{f} = \underline{A} e^{-\frac{1+j}{\delta}x} + \underline{B} e^{\frac{1+j}{\delta}x}$$

Donner alors  $T(x,t)$  en fonction de  $T_0, a, \delta$  et  $\omega$ .

2. Calculer les variations de température à une profondeur de  $50 \text{ cm}$  pour une amplitude de variation journalière de la température  $T(0)$  de  $15 \text{ °C}$  autour d'une température moyenne de  $3 \text{ °C}$  en hiver. Commenter l'expression « Effet de cave ».

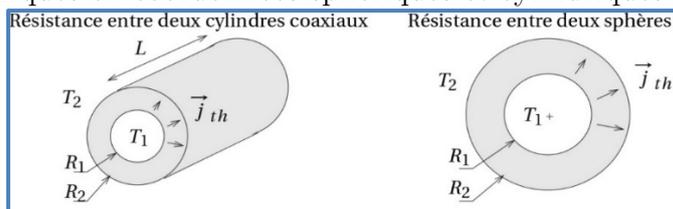
### TH35 – Double vitrage

On ne considère que des régimes permanents, indépendants du temps. L'intérieur d'une pièce est séparé de l'extérieur par une paroi vitrée de surface  $S$ , orthogonale à l'axe  $(Ox)$ , et dont le verre a une conductivité thermique  $\lambda$ . Ses faces interne et externe sont respectivement aux températures  $T_i = T(0)$  et  $T_e$  avec  $T_e < T_i$ .



- La paroi est une vitre simple d'épaisseur  $e$ . Évaluer le flux thermique  $\phi_1$  sortant de la pièce à travers cette paroi en fonction de  $\lambda, S, e, T_i$  et  $T_e$ . Calculer la résistance thermique  $R_{th}$  de la paroi vitrée.
- La paroi est un ensemble de deux vitres de même épaisseur  $e$ , séparées par une épaisseur  $e'$  d'air, de conductivité thermique  $\lambda'$ . On ne tient compte que de la conduction.
  - Évaluer le flux thermique  $\phi_2$  sortant de la pièce, puis  $\frac{\phi_2}{\phi_1}$ .
  - A.N :  $T_e = 270K$  ;  $T_i = 292 K$  ;  $e' = e = 3 mm$  ;  $\lambda = 1,2 Wm^{-1} K^{-1}$  ;  $\lambda' = 0,025 Wm^{-1} K^{-1}$ .  
 - Calculer  $\frac{\phi_2}{\phi_1}$  et les températures  $T_1$  et  $T_2$  des faces en regard des deux vitres.  
 - Représenter graphiquement les variations de la température en fonction de  $x$  dans le double vitrage.
- En plus de la conduction étudiée ci-dessus, on doit tenir compte des échanges thermiques superficiels entre le verre et l'air. Une surface de verre d'aire  $S$ , à la température  $T_s$ , échange avec l'air, à la température  $T_f$ , le flux thermique :  $\phi = hS(T_s - T_f)$  avec  $h > 0$ 
  - Quelle valeur implicite donnait-on précédemment à  $h$  lorsqu'on confondait  $T_s$  et  $T_f$  ?
  - Montrer que ces échanges superficiels introduisent une résistance thermique  $R_{th}$ . Donner l'expression de  $R_{th}$ .
  - Dans cette question, on notera les températures de l'air à l'intérieur et à l'extérieur de la pièce  $T'_i$  et  $T'_e$  et celle du verre, au contact de l'air extérieur  $T_i$  et  $T_e$ . Soit  $h_e$  le coefficient d'échange entre le verre et l'air extérieur et  $h_i$  celui relatif aux autres contacts verre-air. Les flux  $\phi_1$  et  $\phi_2$  des questions 1) et 2) deviennent respectivement  $\phi'_1$  et  $\phi'_2$ . Exprimer  $\phi'_1$  et  $\phi'_2$  en fonction de  $T'_i, T'_e, h_i, h_e$  et des paramètres  $e, \lambda, \lambda'$  et  $S$ .
  - A.N. :  $h_i = 10 W.m^{-2}.K^{-1}$  et  $h_e = 14 W.m^{-2}.K^{-1}$ . Calculer  $\frac{\phi'_2}{\phi'_1}$ . Conclusion ?

### TH36 – Résistances thermiques en coordonnées sphériques et cylindriques

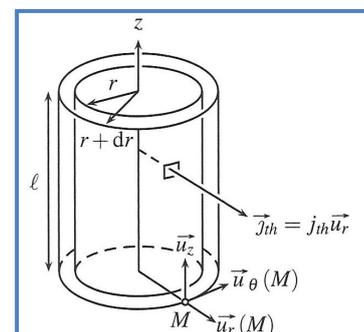


On considère un matériau conducteur compris entre deux sphères (ou cylindres) de centre  $O$ , de rayons  $R_1$  et  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ), de conductivité thermique  $\lambda$ . Les parois sphériques de ce matériau sont maintenues constantes à la température  $T_1$  pour  $r = R_1$  et à la température  $T_2$  pour  $r = R_2$ . On se place en régime stationnaire.

- Montrer que l'on a conservation du flux thermique et on notera celle-ci :  $\phi(r) = \phi_0$
- En déduire la résistance thermique de ce matériau en fonction de  $\lambda, R_1$  et  $R_2$  dans le cas de la sphère. Étudier le cas particulier où  $R_2 = R_1 + e$  où  $e \ll R_1$ .
- En déduire la résistance thermique de ce matériau en fonction de  $\lambda, R_1$  et  $R_2$  dans le cas du cylindre. Étudier le cas particulier où  $R_1$  et  $R_2$  sont très proches.

### TH37 – Fil parcouru par un courant électrique

Un fil électrique de rayon  $R$ , de longueur infinie, de conductivité thermique  $\lambda$ , de conductivité électrique  $\gamma$ , de capacité thermique massique  $c$ , de masse volumique  $\rho$ , est parcouru par un courant électrique constant et uniforme d'intensité  $I$ . On note  $\vec{j}_{elec}$  le vecteur densité de courant électrique. L'intensité  $I$  du courant est le flux de  $\vec{j}_{elec}$ . On montre dans le cours d'électromagnétisme que la puissance  $P$  délivrée par le champ électrique  $\vec{E}$  par unité de volume est :  $P = \gamma E^2$ .



- On va effectuer un bilan d'énergie thermique en coordonnées cylindriques en présence d'une source caractérisée par la puissance électrique volumique  $P$ . Démontrer que l'énergie thermique échangée par le système  $\Sigma$  compris entre deux cylindres de rayon  $r$  et  $r+dr$  peut se mettre sous la forme :

$$\delta Q_e = -2\pi l \frac{\partial(rj_{th})}{\partial r} dr dt$$

En tenant compte de l'énergie thermique créée, et de la loi Fourier :  $\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r$ , démontrer que l'équation de diffusion peut s'écrire :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + P$$

- Intégrer cette équation dans le cas où la température en surface du fil vaut la température extérieure  $T_0$  en régime stationnaire. Tracer  $T(r)$
- L'intégrer dans le cas où le flux thermique latéral à l'interface entre le fil et l'air extérieur est modélisé par la loi de Newton :  $\phi = hS(T(R) - T_0)$ . Tracer  $T(r)$ .

### TH38 – Chauffage d'une pièce

On souhaite maintenir constante la température d'une pièce à  $T_i = 20^\circ\text{C}$ . La résistance thermique des 4 murs et du sol est  $R_{th,1} = 10 \cdot 10^{-3} \text{KW}^{-1}$ . La résistance thermique du plafond et des tuiles est  $R_{th,2} = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{KW}^{-1}$ . La température de l'extérieur est  $T_e = 10^\circ\text{C}$ . On se place en régime stationnaire.

- Calculer la puissance thermique  $P$  à apporter à la pièce pour maintenir constante la température.
- On améliore l'isolation thermique en rajoutant une plaque de matériau isolant entre le plafond et les tuiles. Calculer la résistance thermique  $R'_{th,2}$  de ce matériau afin de réaliser une économie de 50% sur la puissance thermique  $P$ .

### TH39 – Thermorégulation type « Manchots »

Un manchot se modélise par un parallélépipède rectangle de section carrée de côté  $a = 10 \text{ cm}$  et de hauteur  $h = 50 \text{ cm}$ . Le manchot maintient sa température interne  $T_i = 37^\circ\text{C}$  au moyen d'un apport métabolique  $P_1 = 50 \text{ W}$  qui compense les pertes par conduction thermique au travers de son revêtement de plumes d'épaisseur  $e = 1,0 \text{ cm}$  et de conductivité thermique.

- Déterminer la valeur de la conductivité thermique  $\lambda$  du revêtement de plume sachant que la température extérieure (y compris au niveau du sol) est  $T_e = -20^\circ\text{C}$ .
- Pour faire face à des températures extrêmes, neuf manchots se serrent les uns contre les autres, formant un carré de  $3 \times 3$  manchots. Le pavage est parfait, seules les faces supérieures, inférieures et latérales périphériques sont sujettes aux pertes thermiques. De combien le métabolisme  $P_9$  nécessaire au maintien de la température interne, rapporté à un manchot, est-il réduit lorsque les neuf manchots se serrent les uns contre les autres.

### TH41 – Corps noir dans un four

On place à l'intérieur d'un four un cube de côté  $a$ , de capacité thermique massique  $c$  et de masse  $m$ . Le four est maintenu à la température  $T_1$ . Le solide est initialement à la température  $T_0$ . Le four et le solide sont assimilés à des corps noirs. On suppose que la température est uniforme à l'intérieur du cube et que :  $\frac{T_0 - T_1}{T_1} \ll 1$ .

- Quelle est la condition sur les températures pour ne tenir compte que des transferts thermiques radiatifs ?
- Démontrer que la température du cube vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_1}{\tau}$$

Où l'on exprimera  $\tau$  en fonction de  $m$  (masse du cube),  $c$  (capacité thermique massique du cube),  $\sigma$  (constante de Stefan),  $T_1$  et  $S$  (la surface du cube).

- Déterminer l'évolution temporelle de la température  $T(t)$  du cube.

### TH42 – L'effet de serre « atmosphérique »

On considère que le soleil se comporte comme un corps noir à la température  $T_s$  et que la terre se comporte comme un corps noir à la température  $T_0$ .

I – Sans tenir compte de l'atmosphère

- Quelle est l'expression de la puissance totale rayonnée par le soleil  $P_s$  en fonction de  $\sigma, T_s$  et  $R_s$  ?
- Quelle est l'expression de la puissance totale reçue par la terre  $P_T$  en fonction de  $\sigma, T_s, R_s, R_t$  et  $d$  ?
- Déterminer la température à la surface du soleil  $T_s$  sachant que le maximum du spectre qu'il émet se situe à  $\lambda_m = 500 \text{ nm}$ . Puis  $T_{e1}$  celle de la terre sans tenir compte de l'atmosphère.

II – En tenant compte de l'atmosphère et de l'Albédo

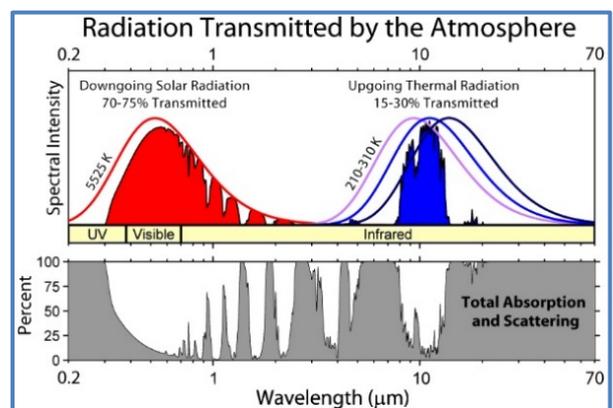
- En réalité le rayonnement émis par la terre est piégé par l'atmosphère et constitue ce qu'on appelle l'effet de serre. L'atmosphère laisse passer le rayonnement solaire qui est transparent dans le visible mais absorbe l'infrarouge. On peut considérer l'atmosphère comme un corps noir qui émet dans l'infrarouge. Déterminer la température de surface de la terre  $T_{e1}$  en tenant compte de l'atmosphère. Conclure.
- La terre réfléchit une partie de l'énergie qu'elle reçoit de la part du soleil et absorbe le reste. La fraction réfléchie s'appelle l'albédo qu'on note  $A$  et dont on donne la valeur numérique  $A = 0,31$ . Déterminer la température de surface de la terre  $T_{e2}$  en tenant compte de l'atmosphère. Conclure.

III – Amélioration du modèle

- En s'aidant du document suivant, comment pourrait-on améliorer le modèle ?
- Pourquoi le rejet par les activités humaines de méthane et de CFC dont la bande d'absorption est dans l'intervalle  $8-12 \mu\text{m}$  doit-il être limité au maximum ?

Données :

- Rayon du soleil :  $R_s = 700\,000 \text{ km}$
- Rayon de la terre :  $R_T = 6400 \text{ km}$
- Distance terre-soleil :  $d = 1 \text{ ua} = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$
- Constante de Stefan :  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$
- La loi de Wien :  $\lambda_{max} T = 2898 \mu\text{m} \cdot \text{K}$



### TH43 – Serre de jardin

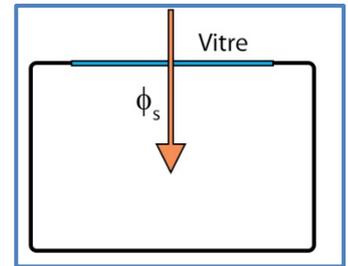
On considère une vitre comme un corps gris : elle a les caractéristiques du corps noir pour des rayonnements incidents émis par la terre dans l'infra-rouge lointain et est totalement transparente pour les rayonnements solaires émis principalement dans le visible. Les murs sont assimilés à des corps noir. On étudie une pièce avec une ouverture vitrée. Vitres ouvertes, cette pièce a une température  $\theta_0 = 25^\circ\text{C}$ .

On rappelle :

- La constante de Stefan :  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ .
- La loi de Wien :  $\lambda_{\text{max}} T = 2898 \mu\text{m} \cdot \text{K}$

On note  $\phi_s$  le flux surfacique du rayonnement solaire incident arrivant sur la vitre.

1. Évaluer la valeur de  $\phi_s$
2. Quelle est la valeur  $\lambda_{\text{max}}$  associée au rayonnement thermique des murs. A quel domaine du spectre cela correspond-il ?
3. Expliquer qualitativement pourquoi la vitre crée un effet de serre dans la pièce.
4. On note  $\phi_p$  le flux surfacique du rayonnement thermique de la pièce et  $\phi_v$  le flux surfacique du rayonnement thermique de la vitre. Exprimer au niveau de la vitre et de la pièce deux relations correspondant aux bilans énergétiques. En déduire les températures de la pièce et de la vitre.



### TH44 – Feuille d'aluminium entre deux parois planes

Deux parois planes, parallèles, de grandes surfaces, dont les températures sont celles de deux sources aux températures  $T_1$  et  $T_2$  constantes, définissent une enceinte vide, à l'intérieur de laquelle on dispose parallèlement aux parois un écran fait d'une feuille d'aluminium d'épaisseur  $e$ . Cet écran, de capacité thermique massique  $c$ , de masse volumique  $\mu$ , de température initiale  $T_0$ , sépare l'enceinte en deux parties. Tous les solides sont considérés comme des corps noirs. On suppose que les températures  $T_1$  et  $T_2$  sont proches de  $T_0$ .

1. Faire le bilan des flux surfaciques émis par les différentes surfaces.
2. Montrer que la température  $T$  peut se mettre sous la forme :  $T = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + B$  où l'on exprimera  $A, B$  et  $\tau$  en fonction de  $T_1, T_2, T_0, \sigma$  (constante de Stefan),  $\mu, c$  et  $e$ .

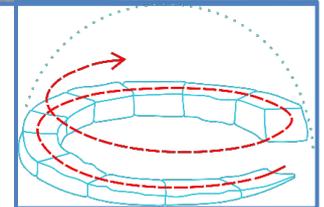
### TH45 – Igloo

Un igloo (mot inuktitut, signifiant « maison »), est un abri construit en blocs de neige. Ils ont habituellement la forme d'un dôme. En raison des excellentes propriétés isolantes de la neige, l'intérieur des igloos est étonnamment confortable. La neige utilisée pour faire un igloo doit avoir une résistance structurelle suffisante pour pouvoir être coupée et empilée de manière appropriée. La meilleure neige à employer à cette fin est une neige qui a été pressée par le vent, ce qui rend compacts les cristaux de glace. Les blocs de neige, découpés à l'aide d'un couteau, doivent être d'environ 1 mètre de long, 40 cm de haut et 30 cm de large. Il est conseillé de les poser en spirale pour faciliter la construction d'un dôme.

L'entrée doit être positionnée le plus bas possible pour éviter que le vent ne s'y engouffre. On donne :

- Conductivité thermique de la neige  $\lambda_{\text{neige}} = 0,25 \text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$  ; de l'air :  $\lambda_{\text{air}} = 0,025 \text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$
- Résistance thermique entre deux sphères de rayon  $R_1$  et  $R_2$  :  $R_{th} = \frac{1}{4\pi\lambda} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$
- La loi de Newton :  $\phi_{th} = hS (T_{\text{solide}} - T_{\text{fluide}})$  où  $h_{\text{neige-air}} = 50 \text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$
- Constante de Stefan-Boltzmann :  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$
- Température extérieure :  $T_{\text{ext}} = -5^\circ\text{C}$

Question ouverte : Estimer la température  $T_{\text{int}}$  dans un igloo qui contient un homme.



### TH46 – Astéroïde

Un astéroïde sphérique, de rayon  $R = 50 \text{km}$ , se trouve dans une zone de l'espace où il ne reçoit aucun rayonnement électromagnétique. Il est composé d'une roche radioactive produisant une puissance par unité de masse notée  $P_m = 1,4 \cdot 10^{-10} \text{W} \cdot \text{kg}^{-1}$ . On note  $\lambda = 1,0 \text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  la conductivité thermique de la roche et  $\rho = 5,0 \cdot 10^3 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$  sa masse volumique. On se place en régime stationnaire.

1. En réalisant un bilan d'énergie sur l'ensemble de l'astéroïde, déterminer l'expression de la température de surface de l'astéroïde  $T_s$  en fonction de  $P_m, \rho, R$  et  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$  la constante de Stefan. Calculer sa valeur numérique.
2. En effectuant un bilan d'énergie sur la boule de rayon  $r < R$ , déterminer l'expression de  $T(r)$ .
3. Calculer la température maximale dans l'astéroïde.