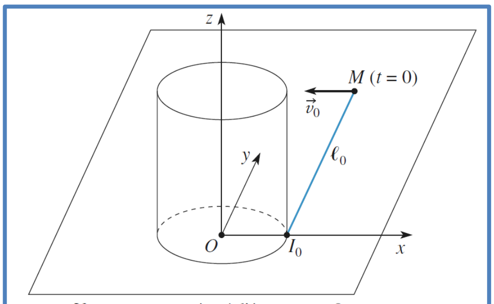
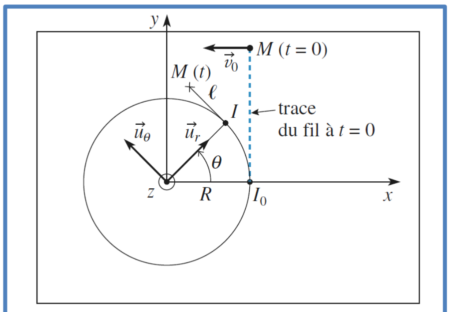
MC1 - Enroulement d'un fil sur un cylindre

Un cylindre de révolution, d'axe vertical, de rayon R, repose sur un plan horizontal et fixe par rapport à un référentiel (Ox, Oy, Oz). On attache une extrémité d'un fil parfaitement souple, infiniment mince et de masse négligeable à la base du cylindre, et on l'enroule plusieurs fois dans le sens trigonométrique autour de cette base. L'autre extrémité du fil est fixée à une particule M de masse m, astreinte à glisser sur le plan horizontal (Oxy). La partie I_0M non enroulée du fil est tendue.



Vue en perspective à l'instant t = 0



Vue de dessus à l'instant t

Données numériques : $R = 0{,}2m$; $m = 0{,}04\ kg$; $l_0 = I_0M = 0{,}5m$; $v_0 = 0{,}1\ m \cdot s^{-1}$.

1. A l'instant t=0, on communique à la particule M une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ horizontale à I_0M et orienté comme l'indiquent les deux figures ci-après. On admet que le fil reste tendu au cours du mouvement. A l'instant t, on appelle θ l'angle dont s'est enroulé le fil et l la longueur IM du fil non encore enroulé. Le fil étant inextensible, donner la relation entre $l, l_0, R\ et\ \theta$.
2. Exprimer les composantes de $\overrightarrow{OM}$ suivant les vecteurs unitaires de la base polaire en fonction de $l_0, R\ et\ \theta$.
3. En déduire les composantes de la vitesse de la particule M dans la base polaire.
4. Montrer que la norme v de la vitesse reste constante au cours du mouvement.
5. Déduire des questions 3°) et 4°) la relation entre $\theta, \dot{\theta}, l_0, R\ et\ v_0$.
6. Exprimer θ en fonction de $t, l_0, R\ et\ v_0$.
7. Déterminer l'instant final t_f pour lequel le fil est entièrement enroulé autour d'un cylindre. Effectuer l'application numérique.
8.
   a) Déterminer la tension T du fil en fonction de $t, m, l_0\ , R\ et\ v_0$.
   b) En réalité, il y a rupture du fil dès que sa tension dépasse la valeur $T_{rup} =\ 5\ .10^{-3}N$. Déterminer l'instant t_{rup} et l'angle θ_{rup} lorsqu'intervient la rupture du fil. Effectuer l'application numérique.

MC2 - Résistance de l'air - Cas quadratique

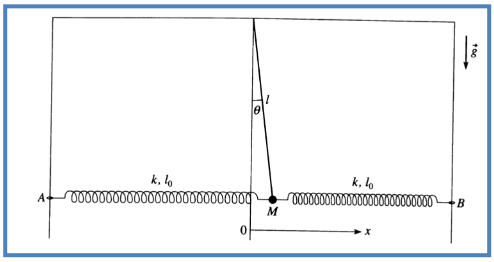
Une petite sphère de Plomb, de masse m, est envoyée vers le haut, à partir du point O (z=0) avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$, à un instant qu'on prendra comme origine des temps. Le module de la résistance de l'air, opposée au mouvement de la masse, est proportionnelle au carré de la vitesse v d'où sa norme : $R = kmv^2$ où k>0.

On posera $\lambda = \sqrt{\frac{g}{k}}$.

1. Déterminer la vitesse $v(t)$ de la particule à l'instant t sachant que :
$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} Arctan\left(\frac{x}{a}\right) + cste$$
2. Déterminer l'espace parcouru $z(t)$ en fonction du temps t au cours du mouvement ascendant.
3. En déduire l'altitude maximale z_m atteinte par P, comptée à partir de O. La comparer à celle obtenue en ne tenant pas compte de la résistance de l'air.

A.N : $k = 2.10^{-3}\ SI,\ \ g = 10\ m \cdot s^{-2},\ \ v_0 = 122\ m \cdot s^{-1}$.

MC3 - Mouvement au voisinage d'une position d'équilibre stable

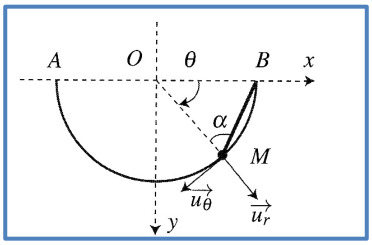


Un pendule simple (point matériel M de masse m au bout d'un fil inextensible, de masse négligeable et de longueur l) est lié à deux ressorts accrochés en A et B. Les deux ressorts sont identiques : longueur à vide l_0 et raideur k. Quand le pendule est vertical, les deux ressorts sont au repos. Les élongations angulaires du pendule sont faibles de façon à pouvoir considérer en permanence les deux ressorts horizontaux.

On posera $\omega_1^2 = \frac{g}{l}$ et $\omega_2^2 = \frac{2k}{m}$.

1. Exprimer l'énergie potentielle du système en utilisant le fait que si θ est petit : $\sin\theta = \theta\ et \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$.
2. Etudier le mouvement de la masse m au voisinage θ=0.

MC4 - Mouvement d'une bille reliée à un ressort sur un cercle



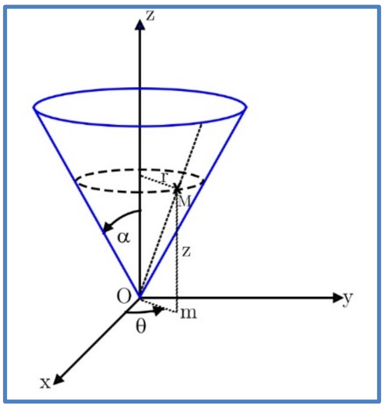
On considère le mouvement d'une bille M de masse m pouvant coulisser sans frottement sur un cerceau de centre O et de rayon R disposé dans un plan vertical. On note AB le diamètre horizontal du cerceau, Ox l'axe horizontal, Oy l'axe vertical descendant et θ l'angle entre Ox et OM. La bille est attachée à un ressort de longueur à vide nulle et de raideur k dont la seconde extrémité est fixée en B. Elle ne peut se déplacer que sur le demi-cercle inférieur.

1. Déterminer l'angle α entre MO et MB en fonction de θ.
2. Etablir l'expression de la longueur de ressort en fonction de R et θ.
3. En déduire l'énergie potentielle totale du système. Représenter la courbe d'énergie potentielle et en déduire les positions d'équilibres éventuelles et leur stabilité.

On pourra poser : $p = \frac{2kR}{mg}$ et $E_0 = mgR$

4. Si l'on écarte faiblement la bille de sa position d'équilibre stable, et qu'on la lâche sans vitesse initiale, à quel type de mouvement peut-on s'attendre ?
5. Etablir l'équation différentielle du mouvement.
6. On note ε l'écart θ-θ_e. Initialement, on écarte la bille d'un angle $\varepsilon_0 \ll \frac{\pi}{2}$ à partir de sa position d'équilibre et on la lâche sans vitesse initiale. Linéariser l'équation du mouvement et conclure.

MC5 - Point mobile à l'intérieur d'un cône



Soit C un cône de sommet O, d'axe de révolution Oz confondu avec la verticale ascendante et de demi-angle au sommet α. Dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z), C est décrit par l'équation $r = z tan\alpha$.

Un point matériel M de masse repose sans frottement sur la surface interne de C, il est donc soumis à son poids $\vec{P} = -mg\,\overrightarrow{e_z}$ & à une action de contact normale à C telle que : $\vec{N} = -Ncos\alpha\overrightarrow{u_r} + Nsin\alpha\overrightarrow{u_z}$ où N>0.

M est initialement lancé du point de coordonnées cylindriques $M_0\left(a, 0, \frac{a}{\tan(\alpha)}\right)$ avec une vitesse horizontale et tangente à C : $\overrightarrow{v_0}$ (0,aω,0).

On pose $\omega_o{}^2 = \frac{g}{a}$ & $\omega = \lambda\omega_o$.

1. Exprimer la loi de la dynamique en coordonnées cylindriques. En déduire que pour une valeur particulière λ_o de λ telle que $\lambda_o{}^2 = \frac{1}{tan\alpha}$ le mouvement de C peut être circulaire uniforme.

Dans toute la suite λ a une valeur quelconque.

2. Etablir la loi des aires : $r^2\,\dot{\theta} = cste$ à l'aide de la projection du PFD sur $\overrightarrow{u_\theta}$.
3. Etablir à l'aide du théorème de l'énergie mécanique l'équation différentielle suivante :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2(1 + \lambda_0^4) = a^2 \cdot \omega_0^2(e - w(r))$$

où l'on exprimera e & $w(r)$ en fonction de λ, λ_o & a.

4. Par une méthode graphique, déduire de cette équation que r reste toujours compris entre deux positions limites r_1 & r_2.
5. Montrer que deux allures différentes d'évolution de r se présentent selon que λ est inférieur ou supérieur à λ_o.

MC6 - Résonance cyclotronique

Une particule P de charge q et de masse m est lancée depuis le point $(a, 0,0)$ avec une vitesse initiale non-relativiste $(0, -\omega_0 a, \gamma a\omega_0)$ dans un champ magnétique uniforme et permanent $\vec{B} = B\overrightarrow{u_z}$ (avec $\omega_0 = \frac{qB}{m}$).

1. Déterminer les équations de la trajectoire $x(t)$ & $y(t)$.
2. En plus de $\vec{B}$, on applique un champ électrique $\vec{E}$ de direction orthogonale à $\vec{B}$, uniforme dans la région où de déplace la particule et variant simultanément dans le temps : $\vec{E} = E_0 cos(\omega t)\overrightarrow{u_x}$.

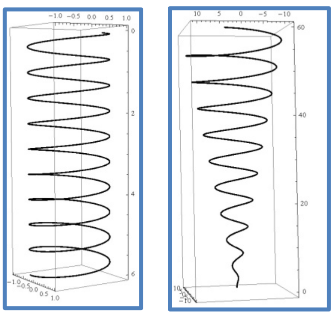
Démontrer que l'équation différentielle régissant le mouvement est :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon a\omega_0^2\cos(\omega t)$$

où l'on déterminera ε en fonction de q, E_0, m, a & ω_0^2.

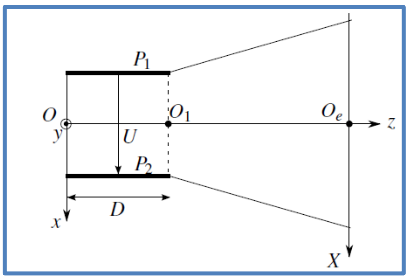
3. Résoudre cette équation différentielle dans le cas où $\omega \neq \omega_0$ en prenant la solution particulière sous la forme $x_2 = \lambda\, cos(\omega t)$. En déduire que :

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = (1-\mu)\cos(\omega_0 t) + \mu\cos(\omega t) \\ \frac{y}{a} = -(1-\mu)\sin(\omega_0 t) - \frac{\mu\omega_0}{\omega}\sin(\omega t) \text{ où } \mu = \frac{\varepsilon\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{cases}$$



4. Résoudre l'équation différentielle sur $x(t)$ dans le cas particulier où $\omega = \omega_0$ en prenant la solution particulière $x_2 = \lambda t sin(\omega t)$.
5. On a représenté graphiquement les deux situations précédentes. Associer à chaque situation le graphique correspondant. Expliquer comment le dispositif précédent, appliqué à des particules soumises initialement au seul champ magnétique et formant donc un faisceau de direction Oz, peut servir à réaliser une séparation isotopique.

MC7 - Déflexion électrique



Dans tout l'exercice on se place dans un référentiel galiléen, associé à un repère cartésien. Une zone de champ électrique uniforme est établie entre les plaques P_1 et P_2 (le champ est supposé nul en dehors et on néglige les effets de bord) ; la distance entre les plaques est d, la longueur des plaques D et la différence de potentiel est $U = V_{P1} - V_{P2}$ positive. Des électrons (charge q = −e, masse m) accélérés pénètrent en O dans la zone de champ électrique uniforme avec une vitesse $v_0\,\overrightarrow{u_z}$ selon l'axe Oz.

1. Calculer la force subie par les électrons en fonction de U, q, d et $\overrightarrow{u_x}$. (Rappel : $E = \frac{U}{d}$)
2.
   a. Déterminer l'expression de la trajectoire $x = f\,(z)$ de l'électron dans la zone du champ en fonction de d, U et v_0.
   b. Déterminer le point de sortie K de la zone de champ ainsi que les composantes de la vitesse en ce point.
   c. Montrer que dans la zone en dehors des plaques, le mouvement est rectiligne uniforme.
   d. On note L la distance O_1O_e. Déterminer l'abscisse X_P du point d'impact P de l'électron sur l'écran en fonction de U, v_0, D, d et L.

MC8 - Effet Zeeman

Un atome d'hydrogène comporte un proton de charge + e supposé immobile en 0 et un électron de masse m et charge - e. La force exercée par le proton sur l'électron situé au point M est modélisée par une force de rappel élastique $\vec{f} = -k\,\overrightarrow{OM}$ (modèle de l'électron élastiquement lié), où k est une constante. Le poids est négligé.

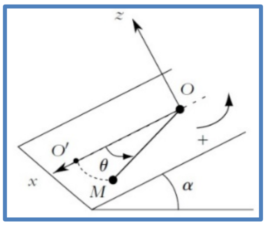
1. On suppose que la trajectoire de l'électron est contenue dans le plan z = 0. Trouver des équations différentielles satisfaites par les coordonnées $x\,(t)$ et $y(t)$.
2. Quelle est la pulsation ω_0 du mouvement et sa nature géométrique ?
3. On soumet l'atome au champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B} = B_0\overrightarrow{u_z}$. Écrire les nouvelles équations du mouvement.
4. Les résoudre en posant $u(t) = x(t) + i\,y(t)$. Montrer que le mouvement est désormais caractérisé par deux pulsations ω_1 et ω_2.
5. Quelle est la conséquence de l'effet Zeeman sur un spectre de raies d'émission d'un atome soumis à un champ magnétique.

MC9 – Chute d'un arbre

On assimile un arbre à une tige longue et homogène de longueur L et de masse m. On le scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui au sol. On suppose que le point d'appui reste fixe et ne glisse pas et on repère la position de l'arbre pas l'angle θ qu'il fait avec la verticale. À $t = 0$, l'arbre fait un angle $\theta_0 = 5°$ avec la verticale et est immobile. On donne le moment d'inertie par rapport à son extrémité $I = \frac{1}{3}mL^2$.

1. Etablir l'équation du mouvement de chute de l'arbre.
2. Montrer que, lorsque l'arbre fait un angle θ avec la verticale, sa vitesse angulaire vaut :
$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}$$
3. Montrer que cette relation peut être réécrite :
$$\sqrt{\frac{3g}{L}}dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}$$
4. Déterminer le temps de chute d'un arbre de 30 m. On prendra $g = 10\,m \cdot s^{-2}$. On donne pour $\theta_0 = 5°$:
$$\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}} = 5{,}1$$

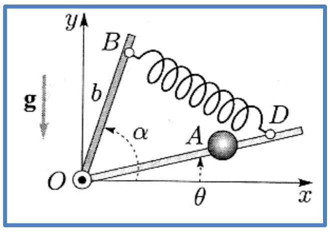
MC10 - Pendule sur plan incliné



Un pendule simple est constitué d'un point M de masse m attaché à un fil de masse négligeable, de longueur L. L'autre extrémité du fil est accrochée à un point O fixe. L'ensemble peut se déplacer sans frottement sur un plan incliné faisant un angle α avec le plan horizontal. On pourra introduire une base polaire.

1. Exprimer le moment cinétique de M par rapport à O
2.
   a. Déterminer la projection des différentes forces sur la base $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$
   b. En appliquant le théorème du moment cinétique en O, déterminer l'équation différentielle du mouvement et la période des petites oscillations.
   c. On lance depuis $\theta = 0°$ le pendule avec une vitesse v_0. Déterminer l'angle maximal atteint, en supposant qu'on reste dans le domaine des petites oscillations.

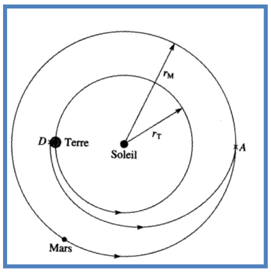
MC11 - Sismographe de la Coste



Une tige de masse négligeable et de longueur l, portant un point matériel A, de masse m, oscille sans frottement autour de l'axe Oz horizontal d'un référentiel terrestre $R = \{Oxyz\}$; Oy est la verticale ascendante. Un ressort, d'extrémités B et D, exerce sur la tige une force de rappel $K.\overrightarrow{DB}$. Sur la figure sont précisées les notations : $OA = l, OB = b, OD = d,\ (Ox, OB) = \alpha = cste$ et $(Ox, OA) = \theta$.

1. Etablir l'équation différentielle en θ.
2. A quelle condition sur m, g, l, d, b, K et α, l'angle définissant la position d'équilibre θ_e est-il nul ?
3. Trouver l'expression de la période des petites oscillations. On donne $l = 5cm$. Quelle doit être la valeur de α pour que la période T_0 soit de 20s.

MC12 - Voyage interplanétaire de la terre a mars



Pour envoyer un vaisseau spatial vers une autre planète, Mars dans cet exercice, on le place au préalable sur une orbite (dite de parking) autour de la Terre. Un moteur auxiliaire lui fournit alors l'énergie nécessaire pour le placer sur l'orbite interplanétaire ; le moment adéquat du transfert dépendant des positions relatives de la Terre et de la planète de destination. On suppose que la Terre et Mars décrivent des orbites circulaires autour du soleil, de rayons respectifs $R_T = 1\,ua\ et\ R_M = 1{,}52\,ua$ (on rappelle que $1\,ua = 150.10^6 km$), situées dans le même plan (plan de l'écliptique), leurs vitesses respectives étant $v_T = 29{,}8\,km \cdot s^{-1}\ et\ v_M = 24{,}2\,km \cdot s^{-1}$. L'orbite de transfert (dite « orbite de Hohman » du nom de l'astronome qui l'a étudié le premier) est une ellipse tangente à l'orbite de la Terre au départ et à l'orbite de Mars à l'arrivée. Le départ du vaisseau a lieu quand il se trouve sur la face sombre de la Terre (point D), la vitesse du vaisseau sur son orbite de parking et celle de la Terre sur son orbite autour du Soleil étant de même sens. La position de Mars coïncide avec celle du vaisseau à l'arrivée de celui-ci (point A).

On suppose que le vaisseau n'est soumis qu'à l'attraction gravitationnelle du Soleil (on néglige celle de la Terre), que le rayon de l'orbite de parking est négligeable devant la distance Terre-Soleil et que la vitesse du vaisseau dans le référentiel héliocentrique au départ est la même que celle de la Terre sur son orbite autour du Soleil.

1. Calculer la vitesse v_D du vaisseau en D sur l'ellipse de Hohman. En déduire la variation de vitesse du vaisseau et l'énergie massique que doivent fournir les moteurs.
2. Calculer la vitesse v_A du vaisseau en A sur l'ellipse de Hohman. En déduire la variation de vitesse du vaisseau et l'énergie massique que doivent fournir les moteurs. Commenter.
3. Calculer la durée du transfert.
4. Quelle était la position de Mars sur son orbite au départ du vaisseau pour que la rencontre soit possible ? On donnera la valeur de l'angle (SM_1, SA), où $A\ et\ M_1$ désignent les positions de Mars à l'instant initial et final.

MC13 – Diffusion de Rutherford

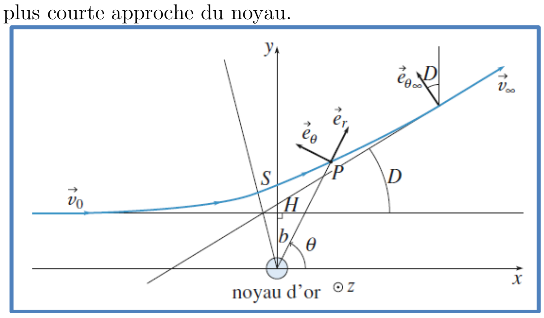
Une particule α de masse m et de charge $q = 2e$, venant de l'infini avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$, s'approche avec un paramètre d'impact $b = OH$ d'un noyau cible (noyau d'or) de masse $M >> m$ et de charge Ze.

1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la masse m, montrer que :

$$\overrightarrow{v_\infty} - \overrightarrow{v_0} = -\frac{k}{mv_0 b}\left(\overrightarrow{e_{\theta,\infty}} - \overrightarrow{e_{\theta,0}}\right) \text{ où } k = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

et où l'indice 0 concerne les grandeurs au départ et l'indice ∞ les grandeurs quand la particule est de nouveau infiniment éloignée du noyau.

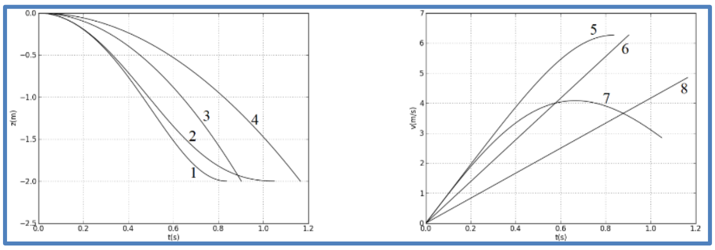
2. En déduire la déviation D de la particule en fonction de k , m , b et v_0.
3. Déterminer la distance minimale r_{min} de plus courte approche du noyau.



MC14 - Toboggans

On s'intéresse ici à différentes formes de toboggans afin d'estimer la durée du parcours d'un enfant. Sauf précision contraire, les frottements seront négligés.

1. On considère tout d'abord un toboggan droit formant un angle de 45° avec l'horizontale et présentant une dénivellation $h = 2{,}0\,m$. L'enfant ne possède pas de vitesse initiale. Exprimer puis calculer numériquement la durée t_1 du trajet de l'enfant entre l'entrée et la sortie du toboggan.
2. On considère maintenant un toboggan incurvé, modélisé par un quart de cercle de rayon $R = 2{,}0\,m$. Montrer que la durée du trajet de l'enfant peut s'exprimer sous la forme suivante : $\Delta t_2 = \sqrt{\frac{R}{g}} I$ où I est une intégrale dont on fournit la valeur numérique : $I \sim 1{,}85$. Conclure.
3. On cherche maintenant à modéliser l'influence des frottements solides en tenant compte d'un coefficient de frottement f. Établir l'équation différentielle du mouvement pour la coordonnée $z(t)$ dans le cas du toboggan droit. Dans le cas du toboggan circulaire, établir l'équation différentielle du mouvement pour l'angle θ repéré entre la verticale et la position de l'enfant.
4. On a réalisé des simulations numériques : les courbes ci-dessous ont été obtenues avec et sans frottement solide pour chacun des deux toboggans (v désigne la norme de la vitesse). On a adopté la valeur $f = 0{,}4$. Associer chaque courbe au toboggan et à la situation qui lui correspond puis commenter les résultats obtenus. Expliquer les pentes identiques des tangentes à l'origine des courbes 5 et 7. Exprimer la vitesse finale dans la situation associée à la courbe 8. Conclure.



MC21 – Insecte sur l'aiguille des secondes

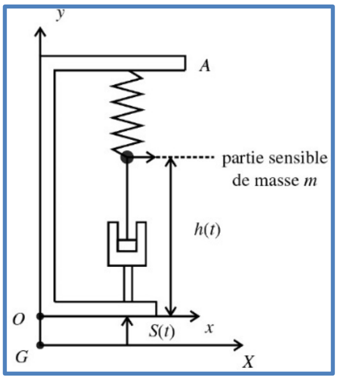
Un insecte se déplace sur l'aiguille des secondes d'une horloge qui a une longueur égale à 20 cm. À l'instant t = 0 l'insecte est au centre de l'horloge, l'aiguille marquant 15 s, et 60 s plus tard il arrive à l'extrémité de l'aiguille. Il se déplace à vitesse constante par rapport à l'aiguille.

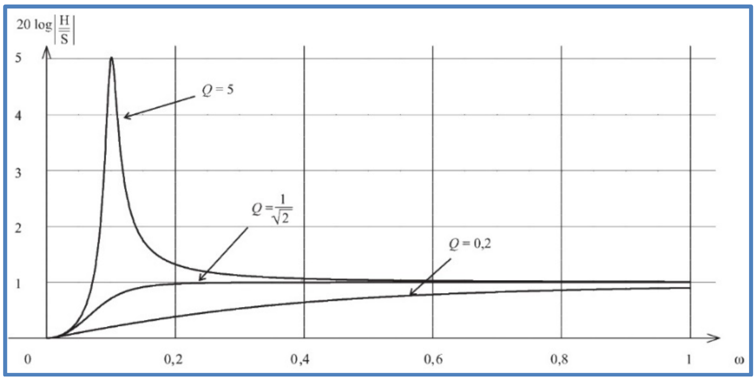
1. Dans cette question on repère l'insecte par ses coordonnées polaires (r,) dans le référentiel lié à l'horloge. On prend =0 pour repérer la verticale ascendante.
   a) Exprimer r et en fonction du temps.
   b) Construire la trajectoire de l'insecte à l'aide de quelques points.
   c) Donner l'expression des vecteurs vitesse et accélération de l'insecte. Calculer leurs normes pour t = 52,5 s. Les dessiner à cet instant.
2. Retrouver l'expression de la vitesse et de l'accélération en considérant l'insecte se déplaçant dans un référentiel $R_A(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ en rotation par rapport à celui de la première question, l'axe (OX) étant confondu avec l'aiguille.

MC31 – Sismographe

La partie sensible du sismographe pendulaire est une masse munie d'un index et d'une tige. Cet ensemble de masse *m* assujetti à se déplacer verticalement, est suspendu à un ressort. Le ressort est fixé en *A* sur un bâti. La partie sensible (masse + index + tige) est par ailleurs reliée à un amortisseur qui exerce une force de frottement fluide $-\lambda\,\vec{v}$ où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse de la masse dans le référentiel lié au bâti. Le référentiel terrestre d'origine *G* est galiléen.

Un tremblement de terre est modélisé par une vibration verticale harmonique de translation : $S(t) = S_0\cos(\omega t)$ où *S(t)* repère le déplacement vertical du sol par rapport au référentiel galiléen du lieu. On définit *H(t)* la grandeur qui repère le déplacement de la masse *m* par rapport au repos dans le référentiel lié au bâti.



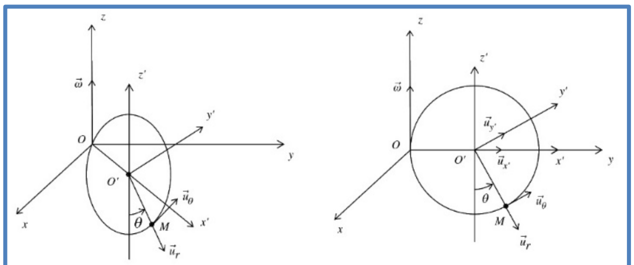


1. Établir l'équation différentielle en $H(t)$ du mouvement de la masse. Quel est le sens physique de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q ?
2. On représente graphiquement $20\,log\left|\frac{H}{S}\right|$ en fonction ω.

L'étude du spectre de Fourier des vibrations sismiques montre que leurs périodes se répartissent sur une gamme qui va de 0,1 s à 100 s. En fait, l'essentiel de l'énergie transportée par des ondes longitudinales, assez loin de l'épicentre, est dans le domaine de période allant de 1 s à 10 s. On souhaite une réponse uniforme de l'appareil dans la gamme de fréquence correspondante. Quel régime de fonctionnement doit-on choisir ? Quel est l'inconvénient majeur ? Comment doit-on choisir la masse ?

MC32 – Circonférence en rotation

Une circonférence *(C)* de centre *O'* et de rayon *a*, située dans un plan vertical, tourne autour d'une de ses tangentes verticales *Oz*, d'un mouvement de rotation uniforme défini par le vecteur rotation $\vec{\omega}$. Un anneau *M* de masse *m*, assimilé à un point matériel, est mobile sans frottement sur cette circonférence. On désigne par θ l'angle que fait $\overrightarrow{O'M}$ avec la verticale descendante passant par *O'*. θ est compté positivement dans le sens indiqué sur les schémas ci-dessous.



Position quelconque de la circonférence

Cas où le plan de la circonférence est confondu avec le plan (yOz)

1. Écrire le principe fondamental de la dynamique en projection sur $\overrightarrow{u_\theta}$ dans le référentiel $R' = \{O', \overrightarrow{u_{x'}}, \overrightarrow{u_{y'}}, \overrightarrow{u_{z'}}, t\}$ lié au cercle et en rotation dans le référentiel galiléen $R = \{O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}, t\}$. En déduire l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ.
2. Retrouver l'équation différentielle par une méthode énergétique.
3. Montrer que les positions d'équilibre dans R' vérifient : $a\omega^2(1 + sin\theta) = g\,tan\theta$. On désire que l'équilibre stable corresponde à $\theta = \theta_0 = 30°$. Quelle doit être la valeur de la vitesse angulaire ω sachant que $a = 0{,}2\,m$ et $g = 9{,}8\,ms^{-2}$?

MC33 – Pesanteur artificielle

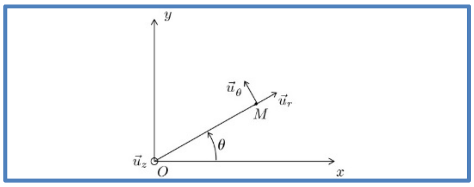
Dans le film 2001, l'odyssée de l'espace de Stanley Kubrick, un vaisseau spatial constitué d'un tore tourne à vitesse angulaire constante autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen. Alors qu'ils sont loin de la terre, les astronautes vivent dans le tore avec une gravité artificielle identique à celle sur terre. On voit même dans le film, un des astronautes effectué un jogging dans ce tore.

1. Proposer un rayon de vaisseau et une vitesse angulaire de rotation afin que les astronautes soient soumis à une pesanteur identique à celle existant sur terre. Pour des raisons physiologiques on veiller à ce que l'écart de gravité entre la tête et les pieds n'excèdent pas 10%.
2. Expliquer pourquoi il peut être très fatigant de courir dans le vaisseau.
3. Le sens de rotation du footing est-il important ?

MC34 – Bille dans un tube

On considère une bille M de masse m susceptible de se déplacer sans frottement à l'intérieur d'un tube cylindrique. Les grandeurs r_0 *et* v_0 caractérisent la position et la vitesse de M à l'instant initial t=0 dans le repère lié au tube. Le tube de longueur 2l est dans le plan horizontal et tourne autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire ω constante.

1. Déterminer l'équation différentielle en r du mouvement de M.
2. Calculer le temps τ que mettra M pour sortir du tube avec $l = 0{,}1\ m\ ; r_0 = 0{,}01\ m\ ;\ v_0 = 0 m.s^{-1}\ et\ \omega = 2\ rad.s^{-1}$.
3. Un ressort enfilé dans le tube est fixé à son extrémité en O et à son autre extrémité à la bille M. La longueur à vide du ressort est $2r_0$. Discuter la nature du mouvement de M suivant la valeur de ω.



MC35 – Equilibre d'un fluide dans un RNG

Un cylindre de rayon R est rempli d'eau sur une hauteur h. L'eau est en équilibre avec la pression atmosphère à la pression p_0. On met en rotation le cylindre autour de son axe jusqu'à ce qu'il atteigne la vitesse angulaire ω. On constate que l'eau se met à tourner et finit par être en équilibre par rapport au cylindre. On rappelle le gradient en coordonnées cylindriques :

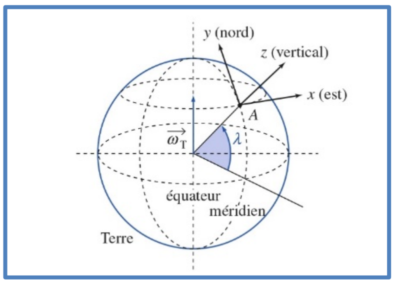
$$\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$

1. Déterminer la pression en tout point de l'eau.
2. Montrer que l'équation de la surface libre est une parabole du type :
$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + B$$
3. Calculer la constante B.

MC36 – Déviation vers l'est

On abandonne sans vitesse initiale un point matériel à l'altitude h dans le référentiel terrestre, à la verticale du point A de latitude λ à la surface de la Terre.

1. En négligeant l'influence de la force de Coriolis sur le mouvement, établir les expressions de x(t), y(t) et z(t) ainsi que le temps de chute. Faire l'application numérique pour h=150m et $g = 9{,}81\ ms^{-2}$.
2. Vérifier le caractère correctif du terme de Coriolis. Exprimer de façon générale la force de Coriolis, et identifier le terme correctif principal donné par cette force.
3. Écrire, au premier ordre de correction, les équations du mouvement avec la force de Coriolis. Vérifier la « déviation vers l'Est » annoncée, et faire l'application numérique à la latitude de 50°.



MC37 – Fusée de Tryphon

Dans l'album de Tintin « On a marché sur la Lune » l'accélération de la fusée maintient une pesanteur égale à la pesanteur terrestre d'après le Professeur Tournesol. On considère le référentiel géocentrique R_G galiléen. On rappelle la force d'attraction gravitationnelle exercée par un astre A de masse m_A sur un corps M de masse m : $\vec{A}_A(M) = -Gm_A m \cdot \frac{\overrightarrow{AM}}{AM^3}$.

1. Lors de la première phase du voyage, la fusée s'éloigne de la Terre. Quelle accélération $\overrightarrow{a_e}$ la fusée doit-elle avoir par rapport au référentiel R_G pour que les passagers ressentent la même pesanteur qu'à la surface de la Terre ? On note R_T le rayon de la Terre et l'on considère que l'attraction lunaire est négligeable.
2. Dans la deuxième phase du voyage, la fusée s'est retournée et n'est plus soumise qu'à l'attraction lunaire. Quelle doit-être la nouvelle accélération pour que les passagers aient l'impression d'être sur Terre ? On considérera que le référentiel lié à la Lune est aussi galiléen.

MC38 – Lanceur de ball-trap

Au ball-trap, un galet P considéré comme ponctuel peut se déplacer sans frottement le long d'un bras horizontal OA de longueur L. Celui-ci tourne à la vitesse angulaire ω constante, de 2 tours par seconde, autour de l'axe Oz vertical.

Initialement P est immobile par rapport au bras et $r_0 = OP_0 = L/4$.

1. À l'aide du principe fondamental de la dynamique dans le référentiel lié au bras, démontrer que l'équation différentielle peut se mettre sous la forme :
$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0$$
2. Déterminer l'instant où le pigeon d'argile quitte le bras.
3. Après avoir quitté le bras, quelle est la trajectoire de P si on néglige les frottements de l'air.

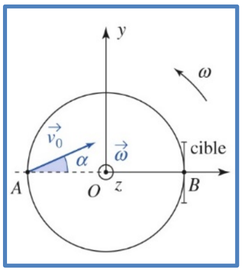
MC39 – Le manège « Rotor »

Dans le film de François Truffaut « Les 400 coups », le héros, Antoine Doinel, se rend à une fête foraine et pénètre dans un des manèges appelé « le rotor », constitué d'un énorme cylindre vertical qui tourne autour de son axe. Les passagers pénètrent à l'intérieur et s'installent contre la paroi du cylindre. Le cylindre est mis en rotation, d'abord lentement puis de plus en plus vite. Quand la vitesse de rotation est suffisamment grande, le plancher est retiré et les passagers restent collés contre la paroi du cylindre.

1. Expliquer pourquoi les passagers restent collés contre la paroi. Quelle est la force qui les empêche de tomber ? Est-ce sans danger ? Que ressent Antoine Doinel quand il essaie de décoller un bras ou une jambe ?
2. On appelle µ le coefficient de frottement entre la paroi et les passagers : quand les passagers sont immobiles, déterminer la valeur minimale de la vitesse de rotation du cylindre, en fonction du rayon du cylindre a, de g et de µ, à partir de laquelle on peut retirer le plancher.
3. Application numérique : a = 4,0 m, µ = 0,4. Calculer la vitesse minimale de rotation du cylindre en tours par minute.

MC310 – Champion de tir

Afin d'accroître la difficulté de l'opération, un champion de tir réputé a placé sa cible sur le bord d'un manège de rayon R. Il s'est installé au point diamétralement opposé et la plate-forme tourne à vitesse angulaire constante w autour de l'axe vertical du manège.



1°) Sachant que la balle sort du fusil avec une vitesse relative v_0 connue, sous quel angle a par rapport au diamètre reliant le tireur et sa cible, celui-ci doit-il viser pour atteindre son but ?

- On négligera les effets de frottement de l'air, de pesanteur et on supposera que v_0 est très grand devant $R\omega$.

2°) Application numérique : $R = 4m, \omega = 0,6\,rad\,s^{-1}, et\ v_0 = 500\,ms^{-1}$.