B – Tchou Tchou (Correction rapide)

I – Mesure directe

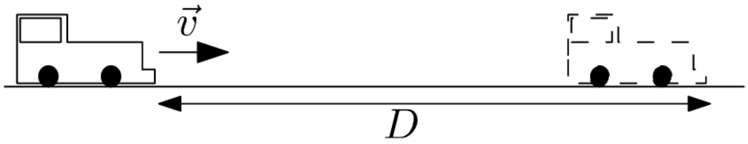


Figure 1

On détermine la vitesse de la locomotive à l'aide d'un chronomètre et d'un mètre. On mesure la distance D qui délimite la trajectoire du train et on estime son incertitude : plus précisément, on mesure la distance D à l'aide d'un mètre (deux positions sur le mètre notées p_1 et p_2), on obtient donc :
Soit :

$$D = p_2 - p_1 \ et \ u_D = \sqrt{u_{p1}^2 + u_{p2}^2} \ avec \ u_{p2} = u_{p1} = \sqrt{2u_{lecture}^2} = \sqrt{2}\frac{\Delta}{\sqrt{3}} \sim 0{,}8 \ mm$$
$$\Rightarrow D = D_{mes} \pm 1{,}2 \ mm$$

On mesure le temps ∆t qu'il faut à la locomotive pour parcourir la distance D à l'aide d'un chronomètre. L'incertitude sur la mesure de ∆t est, de manière prépondérante, due à l'expérimentateur. On peut estimer le réflexe humain à 0,1s pour déclencher initialement et 0,1s pour arrêter le chronomètre. (On peut aussi faire une incertitude type A).

$$\Delta t = t_2 - t_1 \ et \ u_{\Delta t} = \sqrt{u_{t1}^2 + u_{t2}^2} \ avec \ u_{t2} = u_{t1} = \sqrt{2u_{reflexe}^2} = \sqrt{2}\frac{\Delta}{\sqrt{3}} \sim 0{,}08 \ s$$
$$\Rightarrow \Delta t = \Delta t_{mes} \pm 0{,}12 s$$

On en déduit :

$$V_D = v_m \pm U_v \ \text{où} \ U_v = v_m\sqrt{\left(\frac{u_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{u_{\Delta t}}{\Delta t}\right)^2} = 0{,}0197 \ cms^{-1}$$

Avec mes mesures et mon train : (j'ai pris $D = 1m$ pour diminuer l'incertitude) :

$$\boldsymbol{V_D = 4{,}020 \pm 0{,}020 \ ms^{-1}}$$

II – Préparation théorique

II-1)

- Signal émis à $t_1 = 0s$ par l'émetteur, reçue par le train à $t_{1R} = \frac{D}{c}$ puis par l'émetteur à $t_1' = 2\frac{D}{c}$
- Signal émis à $t_2 = T$ par l'émetteur, reçue par le train à $t_{2R} = T + \frac{D+vT}{c}$ puis par l'émetteur à $t_2' = T + \frac{D+2vT}{c}$

$$\Rightarrow T' = t_2' - t_1' = T\left(1 + 2\frac{v}{c}\right) \ \text{où} \ c = \textit{célérité du son}$$

II-2) On passe en fréquence :

$$f' = f\left(1 + 2\frac{v}{c}\right)^{-1}$$
$$\textit{Comme } v \ll c \textit{ un DL à l'ordre1 donne} : f' = f\left(1 - \frac{2v}{c}\right)$$
$$\Rightarrow \Delta f = f - f' \sim \frac{2v}{c} f$$

L'incertitude sur la mesure s'écrit :

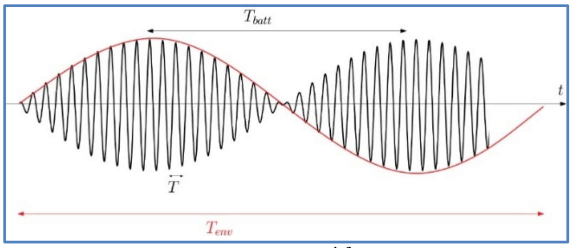
$$\mathrm{u(v)} = v\sqrt{\left(\frac{u_c}{c}\right)^2 + \left(\frac{u_{\Delta f}}{\Delta f}\right)^2 + \left(\frac{u_f}{f}\right)^2}$$

On fait confiance à la fréquence affichée par le GBF pour simplifier, et on suppose la valeur de parfaitement connue d'où :

$$\mathrm{u(v)} = v\frac{u_{\Delta f}}{\Delta f}$$

II-3) L'onde reçue par le récepteur est la somme des deux ondes de fréquence f et f' que l'on supposera de même amplitude A.

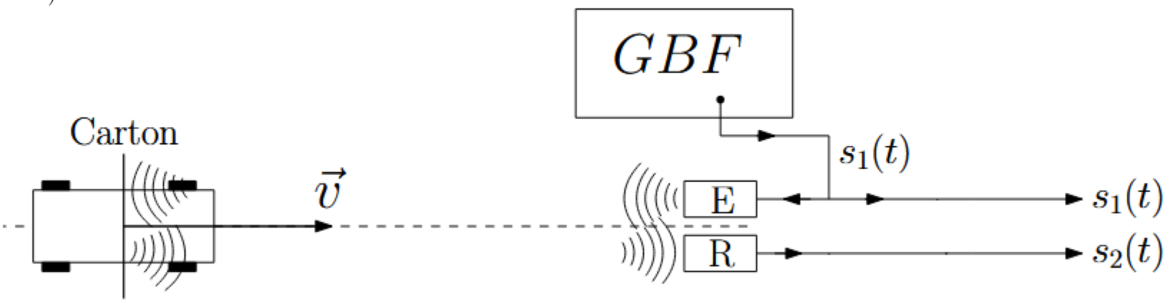
$$\begin{cases} s_1 = A\cos(2\pi f t) \\ s_{réfléchi} = A\cos(2\pi(f + \Delta f)t) \end{cases} \Rightarrow s_2(t) = s_1 + s_{réfléchi} = 2A\underbrace{\cos\left(2\pi\left(f + \frac{\Delta f}{2}\right)t\right)}_{signal\ moyen} \times \underbrace{\cos\left(2\pi\left(\frac{\Delta f}{2}\right)t\right)}_{enveloppe}$$



Par conséquent l'enveloppe a pour fréquence $\frac{\Delta f}{2}$ et les battements $\Delta f \Rightarrow T_{batt} = \frac{1}{\Delta f}$

III – Etude des battements

III-1)



III-2) ...

III-3) Le plus simple c'est de faire une FFT ou d'utiliser les curseurs en mode temporel. Mesurer la période (ou la fréquence) des battements ainsi :

$$T_{batt} = t_2 - t_1 \; et \; u_{T_{batt}} = \sqrt{u_{t1}^2 + u_{t2}^2} \; avec \; u_{t2} = u_{t1} = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} \sim 2{,}8\, ms \Rightarrow u_{T_{batt}} = \sqrt{2}\frac{\Delta}{\sqrt{3}} \sim 2{,}3\, ms$$

Or :

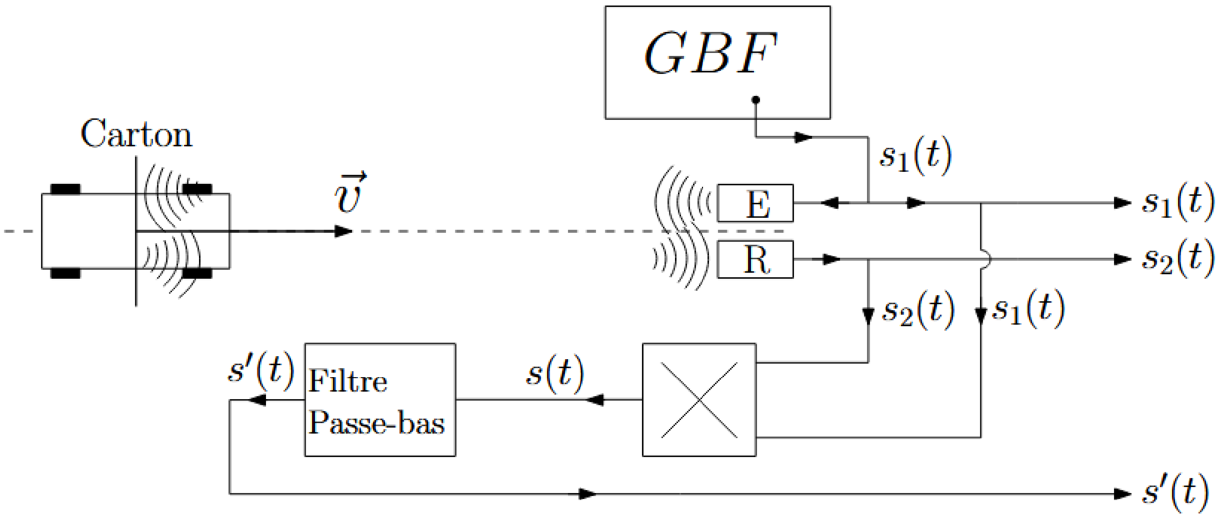
$$T_{batt} = \frac{1}{\Delta f} \Rightarrow u_{\Delta f} = \Delta f \times \frac{u_{T_{batt}}}{T_{batt}} = \Delta f^2 \times u_{T_{batt}} = (9{,}36)^2 \times 2{,}3\,10^{-3} \sim 0{,}201\, Hz$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v = \dfrac{c\Delta f}{2f} = 1/2 \times 9{,}36 * \dfrac{340}{40000} = 0{,}03978\, m \cdot s^{-1} \\ u_v = v\dfrac{u_{\Delta f}}{\Delta f} = 0{,}03978 \times \dfrac{0{,}201}{9.36} = 8{,}5\,10^{-4}\, m \cdot s^{-1} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow V_b = 3{,}978 \pm 0{,}085\, cm \cdot s^{-1}}$$

IV – Détection synchrone

IV-1)



Le filtre est facultatif si on utilise la FFT par exemple.

IV-2) A la sortie du multiplieur :

$$s(t) = ks_1s_2 = kA^2(\cos(2\pi ft) + \cos(2\pi(f+\Delta f)t)\,(\cos(2\pi ft))$$
$$\Leftrightarrow s(t) = kA^2(\cos^2(2\pi ft) + \cos(2\pi(f+\Delta f)t)\cos(2\pi ft))$$
$$\Leftrightarrow s(t) = \frac{kA^2}{2}(1 + \cos(2\pi(2f)t) + \cos(2\pi(2f+\Delta f)t) + \cos(2\pi(\Delta f)t))$$

IV-3) On attend donc un signal formé de 4 pics :

- 1 qui représente le continu (non visible sur les Agilent)
- 1 de fréquence Δf qu'on cherche à isoler
- 1 de fréquence $2f + \Delta f$ qu'on cherche à supprimer.
- 1 de fréquence $2f$ qu'on cherche à supprimer.

IV-4) On utilise une nouvelle fois les curseurs mais en mode FFT d'où :

$$\Delta \mathrm{f} = f_2 - f_1 \; et \; u_{\Delta f} = \sqrt{2}\frac{\Delta}{\sqrt{3}} \Rightarrow u_{\Delta f} = \sqrt{2}\frac{0{,}010}{\sqrt{3}} \sim 0{,}008\,Hz$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v = \dfrac{c\Delta f}{2f} = \dfrac{1}{2} \times 9{,}35 * \dfrac{340}{40000} = 0{,}03973\; m\cdot s^{-1} \\ u_v = v\dfrac{u_{\Delta f}}{\Delta f} = 0{,}03973 \times \dfrac{0{,}008}{2{,}356} = 1{,}3\;10^{-4}\; m\cdot s^{-1} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow V_{ds} = 3,973 \pm 0,013\; cm\cdot s^{-1}}$$

IV-5) Vous disposez d'une résistance et d'une capacité à décade. Comment utiliser à bon escient ces deux dipôles afin de récupérer facilement Δf sans utiliser la FFT.
⇒ On utilise un passe-bas d'ordre 1 qui nous permettra de mesurer directement Δf par le menu « mesures » : fréquence du signal ou par les curseurs. L'avantage des curseurs c'est que pour l'incertitude on se retrouve dans le même cas que les battements. Les réglages étant proches qu'avec les battements l'incertitude est similaire.

$$T = t_2 - t_1 \; et \; u_T = \sqrt{u_{t1}^2 + u_{t2}^2}\; avec \; u_{t2} = u_{t1} = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} \sim 0{,}6\,ms \Rightarrow u_{T_{batt}} = \sqrt{2}\frac{\Delta}{\sqrt{3}} \sim 0{,}5\,ms$$

Or :

$$T = \frac{1}{\Delta f} \Rightarrow u_{\Delta f} = \Delta f \times \frac{u_T}{T} = \Delta f^2 \times u_T = (9{,}32)^2 \times 0{,}5\;10^{-3} \sim 0{,}04 Hz$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v = \dfrac{1}{2}\dfrac{c\Delta f}{f} = \dfrac{1}{2} \times 9{,}32 * \dfrac{340}{40000} = 0{,}03961 m\cdot s^{-1} \\ u_v = v\dfrac{u_{\Delta f}}{\Delta f} = 0{,}03961 \times \dfrac{0{,}04}{9{,}32} = 1{,}8\;10^{-4}\; m\cdot s^{-1} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{V_{PB} = 3,961 \pm 0,018\; cm\cdot s^{-1}}$$

V – Synthèse

	① Mesure directe	②Mesure à partir des battements	③ Mesure à partir de la FFT	④ Mesure à l'aide des dipôles R,C.
$\frac{[V]}{cms^{-1}}$	4,020	3,978	3,973	3,961
$\frac{[U_v]}{ms^{-1}}$	0,020	0,085	0,013	0,018

On remarquera que les mesures par détection synchrone sont plus précises que les mesures directes (battements inclus). Cependant la méthode par la FFT est plus simple en lecture et pourrait être améliorer en jouant sur les réglages : fréquence d'échantillonnage, fenêtre d'acquisition.

On remarquera aussi qu'aucun domaine de valeurs est disjoint d'un autre, ce qui est plutôt bon signe de la qualité des mesures 😊.