

VIII-B : Magnétisme

La première partie du TP (3/2) consiste à étudier le couplage de deux bobines identiques en régime sinusoïdal forcé mais aussi en régime transitoire.

Le but de la deuxième partie du TP (5/2) est de comparer trois protocoles expérimentaux de mesure du moment magnétique d'un aimant.

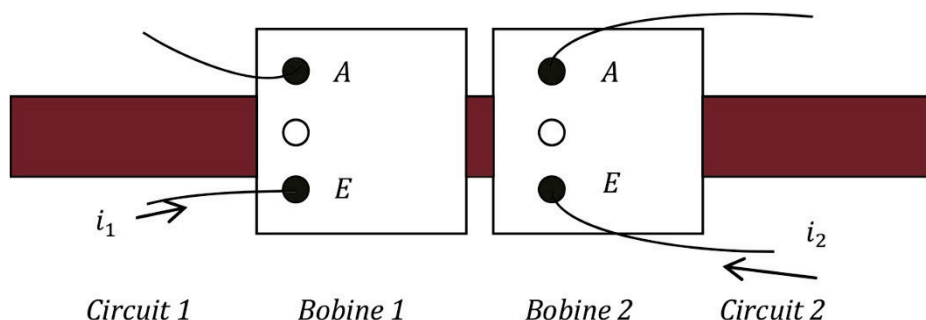
Matériel à disposition :

- 1^{ère} série (× 3)
 - 1 Oscilloscope numérique Keysight avec fiches bananes.
 - 1 Générateur arbitraire FI 5505 GA.
 - 2 bobines 1000 spires identiques.
 - 2 capacités 100 nF montées sur support.
 - 2 résistances 10k Ω montées sur support.
 - 1 plaquette à composants.
- 2^{ème} série (× 1)
 - 1 Oscilloscope numérique Keysight avec fiches bananes.
 - 3 tubes : Cu, Al, PVC.
 - Potence, noix...
 - 1 balance + 1 pied à coulisse + 1 chronomètre.
 - 1 aimant
- 2^{ème} série (× 1)
 - 1 Teslamètre.
 - 1 ensemble de bobines d'Helmholtz.
 - 1 aimant avec son système d'accroche et 1 tige non magnétique
 - 1 alimentation continue + Rhéostat + Ampèremètre.
 - 1 balance + 1 pied à coulisse + 1 chronomètre.
- 2^{ème} série (× 1)
 - 1 aimant et son système d'accroche
 - 1 Teslamètre
 - 1 balance + 1 pied à coulisse
- Les notices des différents appareils de mesure.

I – Oscillateur couplés en électromagnétisme

I-1) Couplage des bobines

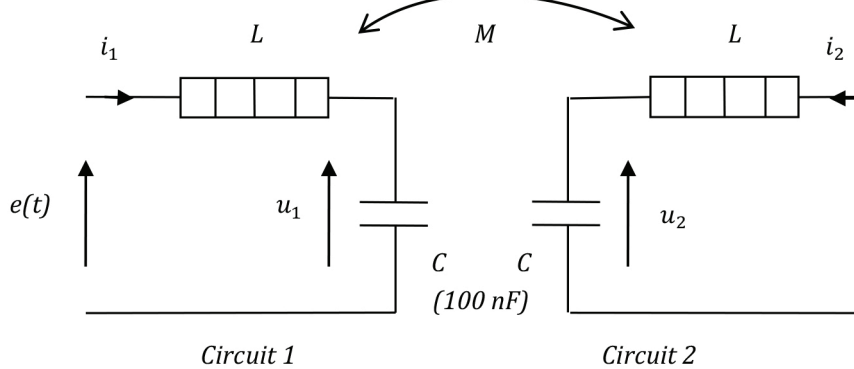
Deux circuits électriques disjoints peuvent interagir à condition que le champ magnétique créé par l'un des circuits ait un flux non négligeable à travers l'autre circuit. Vous allez étudier ce type de situation dans le cas de deux circuits LC. Afin de renforcer le couplage, vous accolerez les deux bobines autour d'un noyau de fer en respectant les branchements ci-dessous :



I-2) Régime sinusoïdal forcé

a) Document 1 : Etude théorique en régime sinusoïdal forcé

Soit le montage suivant où $e(t)$ représente la tension délivrée par le G.B.F.



- M représente, l'inductance mutuelle due au couplage magnétique des deux circuits.
- ϕ_1 , le flux du champ magnétique total à travers le circuit 1 est la somme du flux du champ magnétique créé par le circuit 1 et celui créé par le circuit 2 :

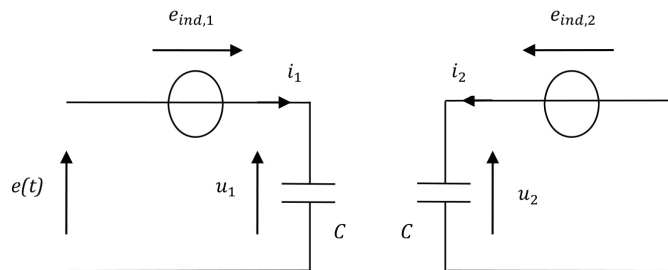
$$\phi_1 = \phi_{1 \rightarrow 1} + \phi_{2 \rightarrow 1} = Li_1 + Mi_2$$

- De même : $\phi_2 = Li_2 + Mi_1$

Les forces électromotrices d'induction (et d'auto-induction) s'expriment donc d'après la loi de Faraday (forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday) par :

$$\begin{cases} e_{ind,1} = -\frac{d\phi_1}{dt} = -L\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt} \\ e_{ind,2} = -\frac{d\phi_2}{dt} = -L\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Dont les représentations en convention générateur sont :



b) Pulsations propres de résonance

- Montrer que le système vérifie le système d'équations couplées suivant :

$$\begin{cases} LC \frac{d^2 u_1}{dt^2} + u_1 + MC \frac{d^2 u_2}{dt^2} = e(t) \\ LC \frac{d^2 u_2}{dt^2} + u_2 + MC \frac{d^2 u_1}{dt^2} = 0 \end{cases}$$

- On pose : $e(t) = E \cos(\omega t)$, $u_1(t) = U_1 \cos(\omega t)$ et $u_2(t) = U_2 \cos(\omega t)$, montrer alors que l'on a :

$$\begin{cases} U_1 = \frac{E(1 - LC\omega^2)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{01}^2}\right)\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{02}^2}\right)} \\ U_2 = \frac{EMC\omega^2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{01}^2}\right)\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{02}^2}\right)} \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \omega_{01} = \sqrt{\frac{1}{C(M+L)}} \\ \omega_{02} = \sqrt{\frac{1}{C|L-M|}} \end{cases}$$

Ce sont les pulsations propres de résonance du système. Les amplitudes de u_1 et u_2 semblent alors diverger mais en réalité, des phénomènes résistifs au sein des bobines vont limiter le phénomène.

c) Mesures de L et M

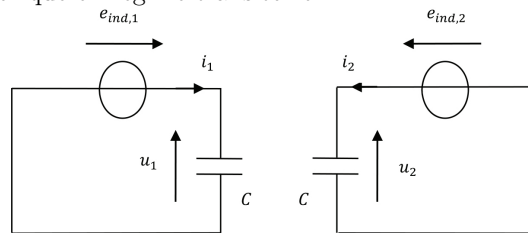
Réaliser le montage en prenant bien soin d'accoler les bobines et de respecter les sens de branchements comme cela est indiqué sur le premier schéma.

⊠ Ne plus toucher l'ensemble « bobines-noyau » jusqu'à la fin du tp. ⊠

- Modérer l'amplitude du signal $e(t)$ en choisissant une valeur « crête à crête » de 1 Volt.
- Visualiser les deux signaux $u_1(t)$ et $u_2(t)$ à l'oscilloscope (pensez à relier la base de la tension $u_2(t)$ à la masse),
- Faire varier la fréquence de $e(t)$, repérer les deux résonances.
- Mesurer ω_{01} et ω_{02} , en déduire les valeurs de L et M .
- Comparer avec la valeur de L indiquée sur la bobine.

I-3) Régime transitoire

a) Document 1 : Etude théorique en régime transitoire



En l'absence de signal permanent $e(t)$, le système couplé devient :

$$\begin{cases} LC \frac{d^2 u_1}{dt^2} + u_1 + MC \frac{d^2 u_2}{dt^2} = 0 \\ LC \frac{d^2 u_2}{dt^2} + u_2 + MC \frac{d^2 u_1}{dt^2} = 0 \end{cases}$$

Face à un tel système symétrique, on pose :

$$\begin{cases} s = u_1 + u_2 \\ d = u_1 - u_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_{01}^2 s = 0 \\ \frac{d^2 d}{dt^2} + \omega_{02}^2 d = 0 \end{cases}$$

Ayant pour solutions :

$$\begin{cases} s(t) = S \cos(\omega_{01} t + \varphi_s) \\ d(t) = D \cos(\omega_{02} t + \varphi_d) \end{cases}$$

Ainsi $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sont deux combinaisons linéaires de modes propres, de pulsations propres ω_{01} et ω_{02} , c'est-à-dire les deux précédentes pulsations de résonance du système :

$$\begin{cases} u_1(t) = \frac{1}{2} [S \cos(\omega_{01} t + \varphi_s) + D \cos(\omega_{02} t + \varphi_d)] \\ u_2(t) = \frac{1}{2} [S \cos(\omega_{01} t + \varphi_s) - D \cos(\omega_{02} t + \varphi_d)] \end{cases}$$

Dans le cas général, le régime libre n'est pas sinusoïdal pur, il existe un phénomène de battements. Il est facile, pour un système couplé symétrique comme celui-ci, d'isoler chacun des modes propres. Il suffit d'imposer la même condition initiale à chaque oscillateur ou deux conditions initiales opposées :

- Condition initiale symétrique :

$$\begin{cases} u_1(0) = u_2(0) \\ i_1(0) = C \frac{du_1}{dt}(0) = C \frac{du_2}{dt}(0) = i_2(0) \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} d(t) = 0 \\ u_1(t) = u_2(t) = \frac{1}{2} S \cos(\omega_{01} t + \varphi_s) \end{cases}$$

Alors $\forall t$, on isole ainsi le mode 1. Le régime libre est alors sinusoïdal pur, les oscillateurs évoluent à la même fréquence, en phase.

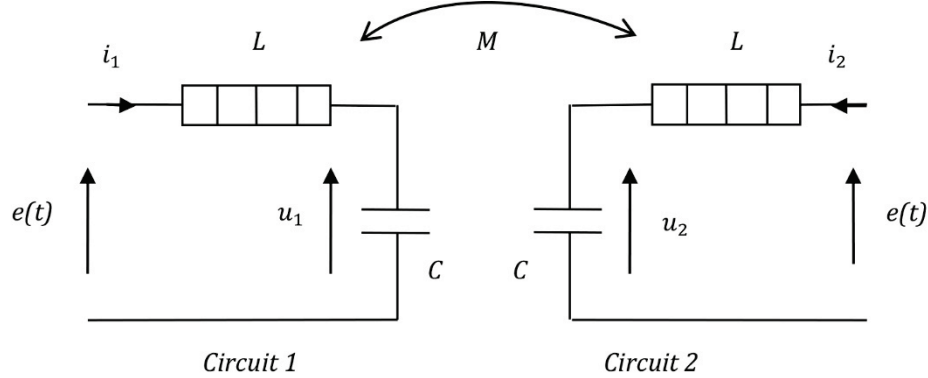
- Condition initiale antisymétrique :

$$\begin{cases} u_1(0) = -u_2(0) \\ i_1(0) = C \frac{du_1}{dt}(0) = -C \frac{du_2}{dt}(0) = -i_2(0) \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} s(t) = 0 \\ u_1(t) = -u_2(t) = \frac{1}{2} D \cos(\omega_{02} t + \varphi_d) \end{cases}$$

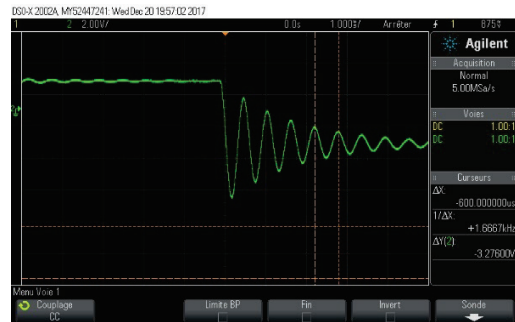
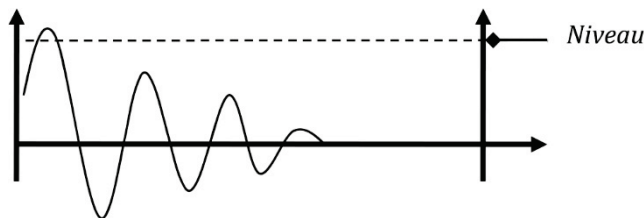
Les oscillateurs évoluent également à la même fréquence mais en opposition de phase.

b) Mesures de L et M

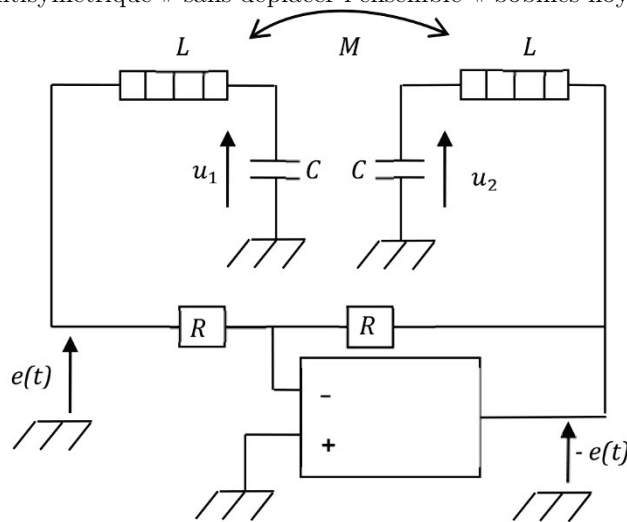
- Réaliser le montage « symétrique » sans déplacer l'ensemble « bobines-noyau ».



Où $e(t)$ représente toujours la tension délivrée par le G.B.F, mais cette fois elle sera « rectangulaire » et de fréquence faible (30 à 50 Hz). Ainsi, nous allons créer une succession de régimes transitoires pseudopériodiques. Afin d'obtenir de belles courbes stables, veuillez à ajuster le niveau de déclenchement du *trigger* comme indiqué ci-dessous :



- Justifier le choix de la faible fréquence de $e(t)$.
- Pourquoi le régime n'est que pseudopériodique et non pas sinusoïdal ?
- Quel mode propre isole-t-on dans ce cas ? Retrouver ainsi la valeur de l'une des pulsations propres avec précision. (Mesure de plusieurs pseudopériodes ou utilisation de la fonction Zoom)
- Réaliser le montage « antisymétrique » sans déplacer l'ensemble « bobines-noyau ».



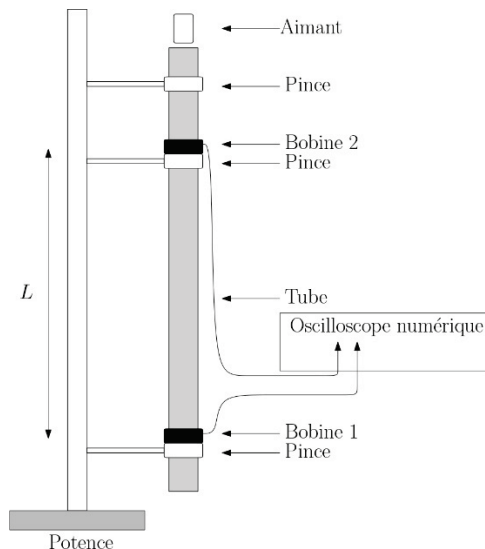
- Quel mode propre isole-t-on maintenant ? Retrouver la valeur de l'autre pulsation propre.
- En déduire les valeurs de L et M à partir des pulsations propres.

II – Mesure du moment magnétique d'un aimant

II-1) Chute d'un aimant dans un tube

a) Principe de la mesure

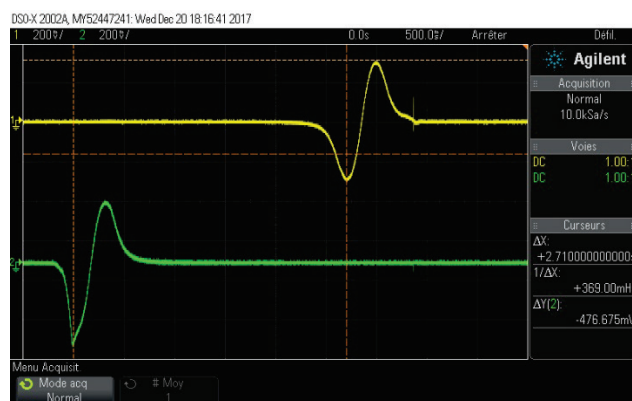
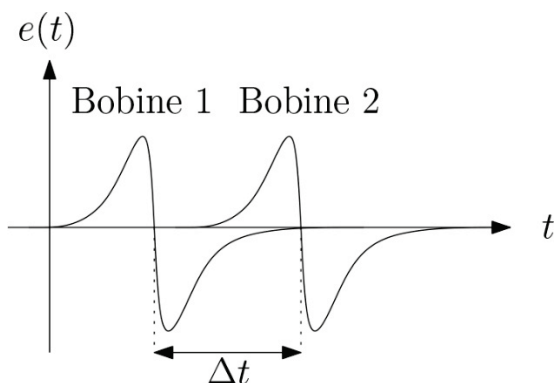
On fait tomber un aimant successivement dans trois tubes de mêmes dimensions mais de matières différentes : le tube (1) est en cuivre, le tube (2) est en aluminium et le tube (3) est en PVC. On constate alors que l'aimant tombant dans les tubes (1) et (2) semble freiné. Pour mesurer précisément les temps de chute de l'aimant dans les différents tubes, on utilise le dispositif représenté ci-dessous. On note les temps pour parcourir l'espace entre les bobines respectivement : t_1, t_2, t_3 .



Lorsque l'aimant (A) tombant dans le tube passe à proximité d'une bobine, il apparaît une force électromotrice induite due à la variation du flux du champ magnétique créé par l'aimant à travers les N spires la bobine :

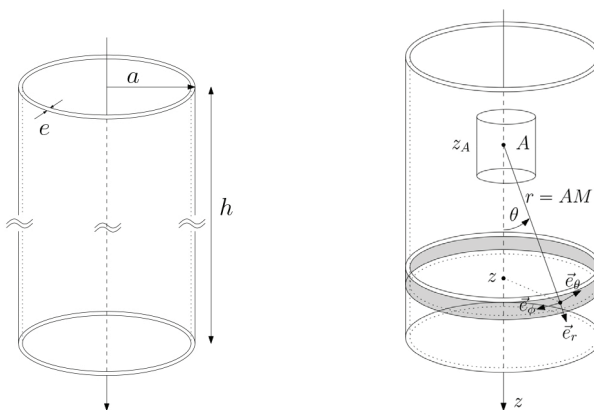
$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

Selon le sens du vecteur moment magnétique de l'aimant \vec{m} et suivant le sens de branchement de la bobine à l'oscilloscope, cette fem n'aura pas le même signe. Cependant, elle se présente toujours comme une série de deux pics, le premier étant induit quand (A) s'approche et l'autre quand il s'éloigne, l'un étant positif et l'autre négatif, comme représenté ci-dessus. Lorsque les deux bobines B_1 et B_2 entourant le tube sont branchées à l'oscilloscope, on observe donc deux séries de deux pics séparés d'un temps Δt . Ce temps, correspondant aux temps t_i mesurés où $i = \{1; 2; 3\}$, est directement lié à la vitesse de (A) dans le tube : en supposant que dès le passage par la 1^{ère} bobine, (A) a atteint sa vitesse limite, ce que l'on pourra vérifier à posteriori, on a $v = v_{\text{lim}} = \frac{L}{\Delta t}$. La vitesse limite v_{lim} dépend du coefficient de frottement h de la force de frottement fluide agissant sur l'aimant : $\vec{F}_f = -h \vec{v}$ dans le cas des tubes (1) et (2). Cette force de frottement fluide est due aux courants de Foucault apparaissant dans le tube et h dépend de la conductivité du métal et du moment magnétique de (A). Ainsi, en mesurant t_i , on pourra remonter à ces grandeurs.



b) Document 2 : Force de frottements

Il s'agit de relier le temps Δt au moment magnétique m et à la conductivité du métal. Pour cela, on doit calculer le flux du champ magnétique ϕ créé par (A), dont la position est repérée par z_A , à travers une bobine mésoscopique du tube : spire de hauteur dz et de rayon a , parcourue par un courant di et dont la position est repérée par z . Pour simplifier le calcul, on applique le théorème de Neumann : au lieu de calculer directement ce flux, on calcul de flux $d\phi_m$ envoyé par cette bobine mésoscopique à travers l'aimant que l'on assimile à une spire de moment magnétique $\vec{m} = i_m S_m \vec{u}_z$.



$$\text{On a alors : } d\phi_m = dB \cdot S_m = \underbrace{\frac{\mu_0 di}{2a} \sin^3 \theta}_{\text{champ spire}} S_m$$

D'où, sachant que $\sin \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + (z - z_A)^2}}$ et par application du théorème de Neumann :

$$\phi = \frac{i_m}{di} d\phi_m = \frac{\mu_0 i_m}{2a} \sin^3 \theta S_m = \frac{\mu_0 m}{2a} \sin^3 \theta = \frac{\mu_0 m a^2}{2} \frac{1}{(a^2 + (z - z_A)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

On en déduit, en notant $v = \frac{dz_A}{dt}$, la vitesse de l'aimant, la fem induite :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{3}{2} \mu_0 m a^2 v \frac{z - z_A}{(a^2 + (z - z_A)^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Sachant que la résistance de la bobine mésoscopique est : $dR = \frac{2\pi a}{\gamma edz}$, on en déduit le courant induit di :

$$di = \frac{e}{dR} = -\frac{3\mu_0 m e a \gamma}{4\pi} \frac{v(z - z_A)}{(a^2 + (z - z_A)^2)^{\frac{5}{2}}} dz$$

Sachant que le champ magnétique créé par l'aimant en un point de la bobine mésoscopique est :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

On en déduit la force exercée sur un élément de longueur $d\vec{l}_M$ centré en M :

$$d\vec{F}_M = di d\vec{l}_M \wedge \vec{B}(M) = di dl_M \vec{e}_\phi \wedge \vec{B}(M) = di dl_M \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_\theta - \sin \theta \vec{e}_r)$$

Sachant que par symétrie la résultante des forces exercées par la bobine mésoscopique sur (A) est portée par (Oz), on projette $d\vec{F}_M$ sur (Oz) et en intégrant, on obtient la force exercée par la bobine sur (A) :

$$\begin{aligned} dF_z &= \int_{\text{bobine}} d\vec{F}_M \cdot \vec{u}_z = \int_{l_M=0}^{l_M=2\pi a} di dl_M \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (\cos \theta (-\sin \theta) - \sin \theta \cos \theta) \\ \Rightarrow dF_z &= -\frac{3\mu_0 m a}{2} \frac{\cos \theta \sin \theta}{r^3} di = -\frac{3\mu_0 m a}{2} \frac{z - z_A}{r^3} \cdot \frac{a}{r} \cdot \frac{a}{r} \cdot \left(-\frac{3\mu_0 m e a \gamma}{4\pi} \frac{v(z - z_A)}{(a^2 + (z - z_A)^2)^{\frac{5}{2}}} dz \right) \\ \Rightarrow dF_z &= \frac{9\mu_0^2 m^2 a^3 e \gamma v}{8\pi} \frac{(z - z_A)^2}{(a^2 + (z - z_A)^2)^5} dz \end{aligned}$$

En intégrant de $-\infty$ à $+\infty$, pour simplifier l'expression on obtient la force exercée par (A) sur tout le tube. L'application du principe des actions réciproques permet d'obtenir la force de frottement exercée sur l'aimant :

$$\vec{F}_f = -h \vec{v} \text{ où } h = \frac{45\mu_0^2 m^2 \gamma e}{1024 a^4}$$

c) Document 3 : Lien entre t_i et m

On applique le PFD à l'aimant (avec m_a masse de l'aimant) d'où :

$$\frac{m_a dv}{dt} = m_a g - hv \Rightarrow v = v_{lim} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \text{ où } \begin{cases} v_{lim} = \frac{m_a g}{h} \\ \tau = \frac{m_a}{g} \end{cases}$$

On suppose que l'aimant atteint rapidement sa vitesse limite, on en déduit le temps de chute entre les deux bobines :

$$\Delta t = \frac{L}{v_{lim}} = \frac{hL}{m_a g} = \frac{45 \mu_0^2 m^2 \gamma e L}{1024 m_a g a^4}$$

Ainsi la mesure de t_1 permet d'obtenir la conductivité γ_{Cu} du tube 1 de cuivre :

$$m = \sqrt{\frac{1024 m_a g a^4 t_1}{45 \mu_0^2 \gamma e L}}$$

De même pour l'aluminium :

$$\gamma_{Al} = \frac{1024 m_a g a^4 t_2}{45 \mu_0^2 m e L} = \frac{\gamma_{Cu} t_2}{t_1}$$

La mesure de t_3 permet de vérifier la longueur L car en absence de frottements :

$$a = g \Rightarrow L = \Delta z = \frac{gt_3^2}{2}$$

d) Manipulation

- Mesurer t_1, t_2 et t_3 en déduire les valeurs de m, L et γ_{Al} . Donnez les résultats avec leur incertitude sachant que :

$$\begin{cases} \gamma_{Cu} = 5,96 \cdot 10^7 \text{ Sm}^{-1} \\ \gamma_{Al} = 3,77 \cdot 10^7 \text{ Sm}^{-1} \\ g_{France} = 9,81 \text{ ms}^{-2} \end{cases}$$

II-2) Utilisation d'un teslamètre

Cette méthode consiste à mesurer, grâce à une sonde à effet Hall, le champ magnétique créé par l'aimant en fonction de la distance entre l'aimant et le capteur.

On rappelle l'expression du champ magnétique créé par moment magnétique m , centré en O , en un point M de l'espace :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta) \text{ où } \cos \theta = \vec{u}_z \cdot \vec{u}_r$$

- Proposer un protocole permettant de déterminer m avec le matériel mis à disposition. Faire un calcul d'incertitude.

II-3) Oscillations de l'aimant dans un champ magnétique extérieur constant et uniforme

Cette méthode consiste à laisser osciller un aimant, accroché à un fil de torsion, dans le champ magnétique, supposé uniforme, créé par des bobines en configuration Helmholtz.

Le couple exercé sur l'aimant placé dans le champ magnétique uniforme entraîne une période d'oscillation :

$$\vec{T} = \vec{m} \wedge \vec{B}_{ext} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mB_{ext}}}$$

Rappels :

- Composante du champ magnétique terrestre : $B_H = 2,7 \cdot 10^{-5} T$
- Champ au centre des bobines d'Helmholtz : $B_{bob}(0) = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\mu_0 NI}{2R}$
- Moment d'inertie d'une barre de longueur L autour de l'axe passant par son centre : $J = \frac{mL^2}{12}$