VIII-A: Câble coaxial (Correction)

Vu qu'il y a TP DS en parallèle de ce TP, voici la correction « Théorique » afin de mieux vous aider à comprendre ce que l'on vous demande. Les valeurs numériques proposées sont là pour donner une information. Chaque câble à des valeurs différentes. On a insisté sur l'écriture des résultats et la validation de vos résultats vu que cela manque souvent dans vos compte-rendus. Dans votre compte-rendu rédigé seulement la partie qui vous concerne.

I – Propagation d'une onde électromagnétique dans le câble.

a) Première modélisation

Le modèle des constantes réparties s'applique aux lignes de manière générale : au câble coaxial et aux lignes bifilaires. On note L l'impédance par unité de longueur de la ligne et C la capacité par unité de longueur de la ligne.

Les différentes lignes ont été coupées à la même longueur l avec :

$$l = 100 \, {\rm m}$$

$$u_l = 1 \,\mathrm{m}$$

b) Equation de propagation dans un câble fermé sur une résistance de charge R_u

On possède trois câbles différents d'une longueur de $100\mathrm{m}$ dont le comportement est similaire mais avec des différences :

1. Pour un câble coaxial (RG58-RG59) dont l'âme à un rayon a, la gaine un rayon b:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

La vitesse de propagation vaut donc :

$$V = V_{\phi} = V_{g} = \frac{1}{LC} = \frac{1}{\sqrt{\mu_{0}\varepsilon_{0}\varepsilon_{r}}} = \frac{c}{n}$$

avec : $n = \sqrt{\varepsilon_r}$

L'impédance caractéristique vaut donc :

$$R_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Les câbles coaxiaux de ce TP ont des impédances caractéristiques de l'ordre de $50\,\Omega$ et $75\,\Omega$

2. Pour une ligne bifilaire constituée de deux fils de diamètre d, distants de D:

$$C = \frac{\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\ln \left(\frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1}\right)}$$
$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \left(\frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{R}{d}\right)^2 - 1}\right)$$

La vitesse de propagation vaut donc :

$$V = V_{\phi} = V_g = \frac{1}{LC} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \frac{c}{n}$$

L'impédance caractéristique vaut donc :

$$R_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} \ln \left(\frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{R}{d}\right)^2 - 1} \right)$$

Les lignes bifilaires de ce
 TP ont des impédances caractéristiques de l'ordre de $100\,\Omega$

II – Caractéristiques du câble

- a) À l'aide des données géométriques
- 1. Câble coaxial.

Les distances caractéristiques du câble ont été mesurées :

$$a = 0.90 \,\mathrm{mm}$$
 et $u_a = 0.05 \,\mathrm{mm}$

$$b = 2.95 \,\mathrm{mm}$$
 et $u_b = 0.12 \,\mathrm{mm}$

On en déduit :

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}C}{C} = -\frac{\mathrm{d}\left(\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = -\frac{\frac{\mathrm{d}\left(\frac{b}{a}\right)}{\frac{b}{a}}}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = -\frac{\frac{\mathrm{d}b}{a} - \frac{b\mathrm{d}a}{a^2}}{\frac{b}{a}\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = -\frac{\frac{\mathrm{d}b}{b} - \frac{\mathrm{d}a}{a}}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{u_C}{C} = \frac{1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \sqrt{\left(\frac{u_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{u_a}{a}\right)^2}$$

De la même manière :

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\frac{u_L}{L} = \frac{1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \sqrt{\left(\frac{u_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{u_a}{a}\right)^2}$$

On en déduit, avec les valeurs précédentes :

$$C = 1.03 \times 10^{-1} \,\mathrm{nF \cdot m^{-1}}$$
 et $u_C = 0.06 \times 10^{-1} \,\mathrm{nF}$
 $\Rightarrow C = 1.03 \pm 0.12 \mathrm{nF \cdot m^{-1}}$
 $L = 2.37 \times 10^{-1} \,\mu\mathrm{H \cdot m^{-1}}$ et $u_L = 0.13 \times 10^{-1} \,\mu\mathrm{H}$
 $\Rightarrow L = 2.37 \pm 0.26 \,\mu\mathrm{H \cdot m^{-1}}$
 $V = 2.02 \times 10^8 \,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et $u_V = 0.30 \,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$
 $\Rightarrow V = 2.02 \pm 0.60 \times 10^8 \,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$
 $R_c = 48.0 \,\Omega$ et $u_{R_c} = 3.9 \,\Omega$
 $\Rightarrow R_c = 48.0 \pm 7.8\Omega$

- Attention : toujours afficher le résultat sous la forme $X = X_m \pm \Delta X$ et ADAPTER LE NOMBRE DE CHIFFRES SIGNIFICATIFS!!
- Validation : comparer aux valeurs de la documentation constructeur

2. Ligne bifilaire

Les distances caractéristiques ont été mesurées :

$$d = 1.1 \text{ mm et } u_d = 0.1 \text{ mm}$$

 $D = 2.25 \text{ mm et } u_D = 0.1 \text{ mm}$

$$\varepsilon_r = 2.2$$

On en déduit :

$$C = \frac{\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\ln \left(\frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1}\right)}$$

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \left(\frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{R}{d}\right)^2 - 1} \right)$$

Posons:

$$\alpha = \frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1}$$

$$\Rightarrow d\alpha = d\left(\frac{D}{d}\right) + \frac{1}{2} \frac{2d\left(\frac{D}{d}\right) \times \frac{D}{d}}{\sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1}}$$

Avec:

$$d\left(\frac{D}{d}\right) = \frac{dD}{d} - \frac{Ddd}{d^2}$$

D'où:

$$u_{\alpha} = \left(1 + \frac{\frac{D}{d}}{\sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1}}\right)\sqrt{\left(\frac{u_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{u_d}{d}\right)^2}$$

Avec:

$$\frac{\mathrm{d}C}{C} = -\frac{\mathrm{d}L}{L} = -\frac{\mathrm{d}\left(\ln\alpha\right)}{\ln\alpha} = -\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha\ln\alpha}$$
$$\Rightarrow \frac{u_C}{C} = \frac{u_L}{L} = \frac{u_\alpha}{\alpha\ln\alpha}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1}\right) \ln\left(\frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1}\right)} \left(1 + \frac{\frac{D}{d}}{\sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1}}\right) \sqrt{\left(\frac{u_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{u_d}{d}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{u_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{u_d}{D}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{u_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{u_d}{D}\right)^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{u_C}{C} = \frac{\sqrt{\left(\frac{u_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{u_d}{d}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1} \times \ln\left(\frac{D}{d} + \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1}\right)}$$

On en déduit, avec les valeurs précédentes :

$$C = 45.6 \,\mathrm{pF \cdot m^{-1}} \,\,\mathrm{et} \,\,u_C = 1.2 \,\mathrm{pF}$$

$$\Rightarrow C = 45.6 \pm 2.4 \,\mathrm{pF \cdot m^{-1}}$$

$$L = 0.537 \,\mu\mathrm{H \cdot m^{-1}} \,\,\mathrm{et} \,\,u_L = 0.18 \,\mu\mathrm{H}$$

$$\Rightarrow L = 0.537 \pm 0.36 \,\mu\mathrm{F \cdot m^{-1}}$$

$$V = 2.02 \times 10^8 \,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \,\,\mathrm{et} \,\,u_V = 0.30 \times 10^8 \,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$$\Rightarrow V = 2.02 \pm 0.60 \times \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$$R_c = 109 \,\Omega \,\,\mathrm{et} \,\,u_{R_c} = 20 \,\Omega$$

$$\Rightarrow R_c = 109 \pm 40 \Omega$$

- Attention : toujours afficher le résultat sous la forme $X = X_m \pm \Delta X$ et ADAPTER LE NOMBRE DE CHIFFRES SIGNIFICATIFS!!
- Validation : comparer aux valeurs de la documentation constructeur
- b) À l'aide du RLC-mètre (méthode en général moins précise)

1. Mesure de L

Pour mesurer L, on court-circuite la ligne et on mesure l'inductance équivalente comme indiqué figure $\boxed{1}$.

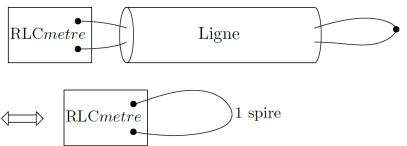


Figure 1 – Mesure de l'inductance équivalente de la ligne

La valeur affichée par le RLCmetre est notée $L_{tot,lue}$ et son incertitude est $u_{L_{tot}} = A\%L_{tot,lue} + BDgt$.

On en déduit :

$$L = \frac{L_{tot,lue}}{l}$$

$$\frac{u_L}{L} = \sqrt{\left(\frac{u_{L_{tot,lue}}}{L_{tot,lue}}\right)^2 + \left(\frac{u_l}{l}\right)^2}$$

Exemples:

🗶 Pour un câble coaxial :

$$L_{tot,lue} = 33.72 \,\mu\text{H}$$

 et

$$u_{L_{tot}}=0.01\,\mu\mathrm{H}$$

On trouve:

$$L = 0.3372 \,\mu\text{H}\cdot\text{m}^{-1}$$

 et

$$u_L = 0.00015 \,\mu\text{H}\cdot\text{m}^{-1}$$

On obtient :

$$L = 0.337 \pm 0.003 \mu \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$$

 \boldsymbol{x} Pour une ligne bifilaire :

$$L_{tot,lue} = 0.6702 \,\mu\text{H}$$

 et

$$u_{L_{tot}}=0.023\,\mu\mathrm{H}$$

On trouve:

$$L = 6.702\,\mathrm{nH} \cdot \mathrm{m}^{-1}$$

$$u_L = 0.26\,\mathrm{nH}\cdot\mathrm{m}^{-1}$$

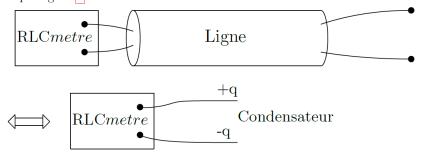
On obtient :

$$L = 6.70 \pm 0.46 \,\mathrm{nH \cdot m^{-1}}$$

- Attention : toujours afficher le résultat sous la forme $X = X_m \pm \Delta X$ et ADAPTER LE NOMBRE DE CHIFFRES SIGNIFICATIFS!!
- Validation : comparer aux valeurs de la documentation constructeur

2. Mesure de C

Pour mesurer C, on laisse le bout de la ligne en circuit ouvert et on mesure la capacité équivalente comme indiqué figure $\boxed{2}$.



 ${\bf Figure} \ {\bf 2} - {\rm Mesure} \ {\rm de} \ {\rm la} \ {\rm capacit\'e} \ {\rm \'equivalente} \ {\rm de} \ {\rm la} \ {\rm ligne}$

La valeur affichée par le RLC metre est notée C_{tot} et son incertitude est $u_{C_{tot}} = A\%C_{tot,lue} + BDgt$.

On en déduit :

$$C = \frac{C_{tot}}{l}$$

$$\frac{u_C}{C} = \sqrt{\left(\frac{u_{C_{tot,lue}}}{C_{tot,lue}}\right)^2 + \left(\frac{u_l}{l}\right)^2}$$

Exemples:

🗶 Pour un câble coaxial :

$$C_{tot,lue} = 9.730 \,\mathrm{nF}$$

et

$$u_{C_{tot}} = 2.3 \times 10^{-2} \,\mathrm{nF}$$

On trouve:

$$C = 9.730 \times 10^{-2} \,\mathrm{nF} \cdot \mathrm{m}^{-1}$$

et

$$u_C = 1.1 \times 10^{-3} \,\mathrm{nF \cdot m^{-1}}$$

. En ne gardant que trois chiffres significatifs, on obtient :

$$c = 9.73 \pm 0.02 \text{nF} \cdot \text{m}^{-1}$$

x Pour une ligne bifilaire :

$$C_{tot,lue} = 6.311 \,\mathrm{nF}$$

 et

$$u_{C_{tot}} = 0.42 \,\mathrm{nF}$$

On trouve:

$$C = 6.311 \times 10^{-2} \,\mathrm{nF \cdot m^{-1}}$$

et

$$u_C = 0.60 \times 10^{-2} \,\mathrm{nF \cdot m^{-1}}$$

En ne gardant que trois chiffres significatifs, on obtient :

$$C = 6.31 \pm 1.20 \text{nF} \cdot \text{m}^{-1}$$

- Attention : toujours afficher le résultat sous la forme $X = X_m \pm \Delta X$ et ADAPTER LE NOMBRE DE CHIFFRES SIGNIFICATIFS!!
- Validation : comparer aux valeurs de la documentation constructeur

3. Détermination de V

$$V = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\frac{u_V}{V} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{u_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{u_C}{C}\right)^2}$$

On en déduit :

x Pour le câble coaxial :

$$V = 1.75 \times 10^8 \,\mathrm{m \cdot s}^{-1}$$

 et

$$u_V = 0.07 \times 10^8 \,\mathrm{m \cdot s}^{-1}$$

d'où:

$$V = 1.75 \pm 0.14 \times 10^8 \,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

x Pour la ligne bifilaire :

$$V = 1.52 \times 10^8 \,\mathrm{m \cdot s}^{-1}$$

 et

$$u_V = 0.23 \times 10^8 \,\mathrm{m \cdot s}^{-1}$$

d'où:

$$V = 1.52 \pm 0.46 \times 10^8 \,\mathrm{m \cdot s}^{-1}$$

- Attention : toujours afficher le résultat sous la forme $X = X_m \pm \Delta X$ et ADAPTER LE NOMBRE DE CHIFFRES SIGNIFICATIFS!!
- Validation : comparer aux valeurs de la documentation constructeur

4. Détermination de R_c ou Z_c

$$R_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\frac{u_{R_c}}{R_c} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{u_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{u_C}{C}\right)^2}$$

On en déduit :

🗶 Pour le câble coaxial :

$$R_c = 58.2 \,\Omega$$

et

$$u_{R_c} = 2.4 \,\Omega$$

d'où :

$$R_c = 58, 2 \pm 4, 8\Omega$$

 \boldsymbol{x} Pour la ligne bifilaire :

$$R_c = 103 \,\Omega$$

et

$$u_{R_c} = 5 \,\Omega$$

d'où:

$$R_c = 103 \pm 10\Omega$$

0

Attention : toujours afficher le résultat sous la forme $X=X_m\pm \Delta X$ et ADAPTER LE NOMBRE DE CHIFFRES SIGNIFICATIFS!!

0

Validation : comparer aux valeurs de la documentation constructeur

III – Régime impulsionnel

a) Conditions limites et réflexion

On reverra cette partie en détail dans OD6.

Théorie : Coefficients de réflexion en tension (r_v) et en courant (r_i) en bout de ligne (z=0)

X Onde incidente:

$$\underline{i}_i(z,t) = I_0 e^{j(\omega t - kz)}$$

$$\underline{u}_i(z,t) = R_c I_0 e^{j(\omega t - kz)}$$

X Onde réfléchie:

$$\underline{i}_r(z,t) = r_i I_0 e^{j(\omega t + kz)}$$

$$\underline{u}_r(z,t) = r_v R_c I_0 e^{j(\omega t + kz)} = -R_c r_i I_0 e^{j(\omega t + kz)} \Rightarrow r_v = -r_i$$

X Condition limite:

$$\underline{u}_{i}(0,t) + \underline{u}_{r}(0,t) = R_{u} \left(\underline{i}_{i}(0,t) + \underline{i}_{r}(0,t)\right)$$

$$\Rightarrow R_{c}I_{0} - R_{c}r_{i}I_{0} = R_{u} \left(I_{0} + r_{i}I_{0}\right)$$

$$\Rightarrow r_{i} = \frac{R_{c} - R_{u}}{R_{c} + R_{u}}$$

$$\Rightarrow r_{v} = \frac{R_{u} - R_{c}}{R_{c} + R_{u}}$$

⇒ Le coefficient de réflexion donné dans l'énoncé est bien le coefficient de réflexion en tension.

* Étude des différents cas :

- Cas où $R_u = 0$ (court-circuit en bout de ligne): $r_v = -1$ et $r_i = 1$
- Cas où $R_u = \infty$ (circuit ouvert en bout de ligne): $r_v = 1$ et $r_i = -1$
- $\bullet \ \, \text{Cas où } R_u = R_c \ (\text{adaptation en bout de ligne}) : r_v = r_i = 0$

Remarque : dans l'énoncé j'ai noté R la résistance de charge.

b) Etude expérimentale

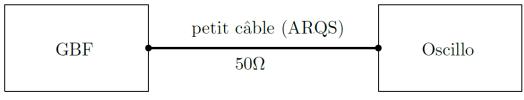
1. Générateur d'impulsion

Le rapport cyclique pour un signal rectangulaire, noté α , est défini comme étant le rapport entre la durée du temps haut (τ) du signal et sa période (T).

Figure 3 – Rapport cyclique $\alpha = \tau/T$

2. Adaptation d'impédance (pour information)

i) Premier cas: pas d'adaptation



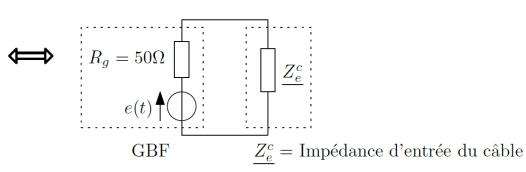


Figure 4 – Montage sans adaptation

L'impédance d'entrée du câble $[\Gamma]$ (longueur $\approx 1 \,\mathrm{m}$) vérifie :

$$\underline{Z_e^c} = R_c \left(\frac{\underline{Z_u} + jR_c \tan(kl)}{R_c + j\underline{Z_u} \tan(kl)} \right)$$

Où:

X $\underline{Z_u}$ est l'impédance en bout de câble, ici il s'agit de l'impédance d'entrée de l'oscilloscope, en mode $\overline{(DC)}$, on la note Z_e :

$$\underline{Z_e} = R_e \parallel C_e = \frac{R_e}{1 + jR_eC_e\omega}$$

Avec $R_e \approx 1 \,\mathrm{M}\Omega$ et $C_e \approx 20 \,\mathrm{pF}$ (DC)

$$\mathbf{x} kl = \frac{\omega l}{V}$$

En sachant que la fréquence des impulsions est $f=500\,\mathrm{kHz}$ (et en comptant les 100 premiers harmoniques on arrive à une pulsation de l'ordre de :

$$\omega \approx 3 \times 10^8 \, \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$$

D'où:

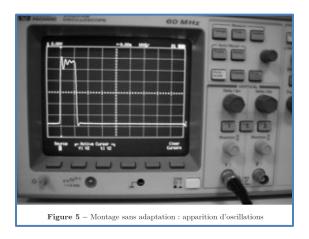
X $C_e \omega \approx 10^{-4} << R_e$, on en déduit : $Z_e = R_e$

$$\mathbf{x} kl = \frac{\omega ln}{c} \approx 1.5$$

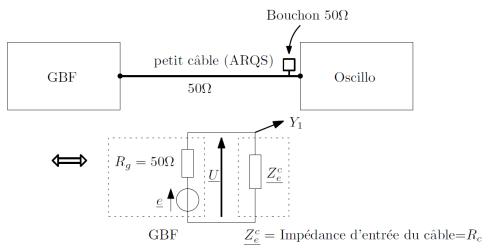
Ainsi:

$$\underline{Z_e^c} = R_c \left(\frac{R_e + jR_c \tan\left(\frac{\omega ln}{c}\right)}{R_c + jR_e \tan\left(\frac{\omega ln}{c}\right)} \right)$$

 \Rightarrow Cette impédance est complexe, d'où l'apparition d'oscillations quand on observe u(t) à l'oscilloscope.



ii) Deuxième cas : adaptation



 ${\bf Figure} \ {\bf 6} - {\rm Montage} \ {\rm avec} \ {\rm adaptation}$

On fixe un bouchon de $50\,\Omega$ à l'entrée de l'oscilloscope :

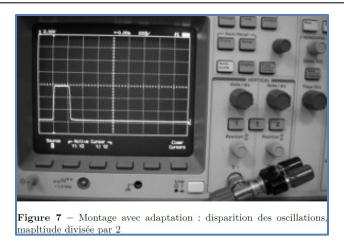
$$Z_e = R_c = R_q = 50\,\Omega$$

L'impédance $\underline{Z_e^c}$ vaut alors :

$$\underline{Z_e^c} = R_c \left(\frac{R_c + jR_c \tan(kl)}{R_c + jR_c \tan(kl)} \right) = R_c$$

$$\Rightarrow u(t) = e(t)/2$$

les oscillations disparaissent, par contre l'amplitude du signal est divisé par deux.



3. Vitesse de propagation d'une impulsion dans le câble

On effectue le montage suivant afin de mesurer la vitesse de propagation de l'oem dans la ligne : Bouchon 50Ω

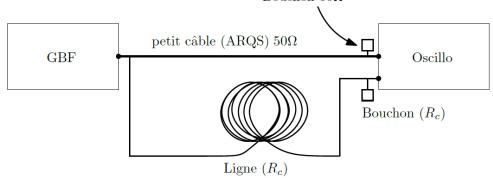


Figure 8 – Montage pour mesurer la vitesse

Les deux extrémités des deux câbles étant adaptées, il n'y a pas de signaux réfléchis. On observe les chronogrammes ci-dessous (cas du câble coaxial) :

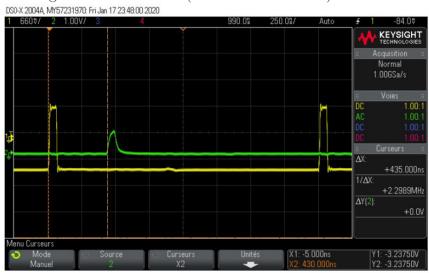


Figure 9 – En jaune : la voie 1 - En vert : la voie 2

A l'aide des curseurs, que l'on positionne au début de chaque impulsion, on mesure le temps séparant

l'arrivée des deux signaux à l'oscilloscope et on estime son incertitude par encadrement :

$$\Delta t_{min} = 435.0 \,\text{ns}$$
 et $\Delta t_{max} = 437.0 \,\text{ns}$

$$\Delta t = \frac{\Delta t_{max} + \Delta t_{min}}{2} = 436.0 \,\text{ns}$$

$$u_{\Delta t} = \frac{\Delta t_{max} - \Delta t_{min}}{2\sqrt{3}} = 0.6 \,\text{ns}$$

On en déduit :

$$V = \frac{l}{\Delta t} = 2.32 \times 10^8 \,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$
$$\frac{u_V}{V} = \sqrt{\left(\frac{u_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{u_{\Delta t}}{\Delta t}\right)^2} = 0.02 \times 10^8 \,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Soit:

$$V = 2.32 \pm 0.04 \times 10^8 \,\mathrm{m \cdot s}^{-1}$$

- Attention : toujours afficher le résultat sous la forme $X = X_m \pm \Delta X$ et ADAPTER LE NOMBRE DE CHIFFRES SIGNIFICATIFS!!
- Validation : comparer aux valeurs de la documentation constructeur

4. Réflexion en bout de câble

Lors du TP on mettre une résistance variable en sortie qui permettra de vérifier ces trois cas : sortie ouverte (Résistance infinie), fermée (Résistance nulle) et avec adaptation de la ligne à $50 \,\Omega$, $75 \,\Omega$ ou $100 \,\Omega$.

i) Premier cas : sortie ouverte

On effectue le montage suivant :

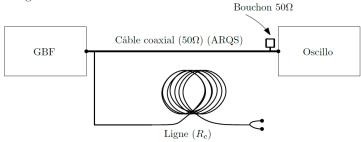


Figure 10 - Montage en sortie ouverte

Le chronogramme obtenu est donné figure 12

Interprétation (voir figure 11)

- * Le GBF envoie une impulsion (1) dans les deux câbles.
- ✗ L'impulsion (1) arrivant à l'oscilloscope n'est pas réfléchie car il y a adaptation.
- **X** l'impulsion (1) arrivant en bout de ligne est réfléchie avec un coefficient de réflexion égal à 1 $(r = 1 \text{ car } R_u = \infty)$: l'onde réfléchie est donc une impulsion (2) de même signe que l'impulsion (1) En rouge sur la figure 11.
- X L'impulsion (2) arrivant au niveau du GBF est à la fois transmise (impulsion (2)_t en rouge, de même signe) et réfléchie (impulsion (2)_r en vert, de signe opposée car l'impédance rencontrée, $\approx R_g/2$) est inférieure à R_c)
- **✗** Le GBF envoie une impulsion (1) dans les deux câbles.
- ✗ L'impulsion (1) arrivant à l'oscilloscope n'est pas réfléchie car il y a adaptation.
- **X** l'impulsion (1) arrivant en bout de ligne est réfléchie avec un coefficient de réflexion égal à 1 $(r = 1 \text{ car } R_u = \infty)$: l'onde réfléchie est donc une impulsion (2) de même signe que l'impulsion (1) En rouge sur la figure 11.
- X L'impulsion (2) arrivant au niveau du GBF est à la fois transmise (impulsion (2)_t en rouge, de même signe) et réfléchie (impulsion (2)_r en vert, de signe opposée car l'impédance rencontrée, $\approx R_g/2$) est inférieure à R_c)
- \mathbf{x} L'impulsion (2)_t arrivant sur l'oscilloscope n'est pas réfléchie car il y a adaptation.
- X L'impulsion $(2)_r$ arrivant en bout de ligne se réfléchie, à nouveau sans changement de signe et donne l'impulsion (3) (en bleu sur le schéma) : Cette impulsion est transmise au niveau du GBF sans changement de signe pour donner l'impulsion $(3)_t$ qui arrive alors à l'oscilloscope sans être réfléchie.
- **X** On pourrait continuer en considérant l'impulsion $(3)_r$...

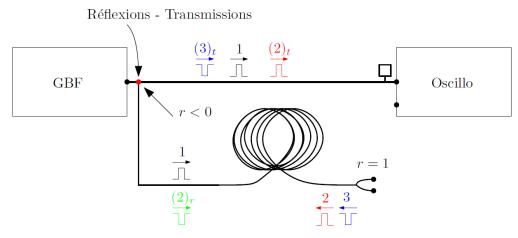
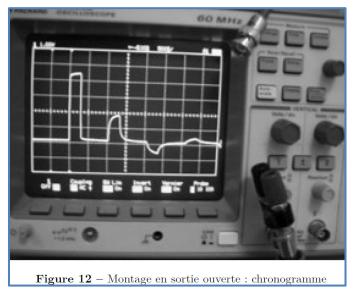


Figure 11 – Montage en sortie ouverte : interprétation



Notons que l'on pourrait utiliser ce chronogramme pour déterminer la vitesse de propagation des impulsions dans le câble (et donc la vitesse de groupe, égale à la vitesse de phase) : chaque impulsion, en dehors de l'impulsion (1), a en effet parcourue une distance 2l en plus, par rapport à l'impulsion précédente.

ii) Deuxième cas : sortie fermée On effectue le montage suivant :

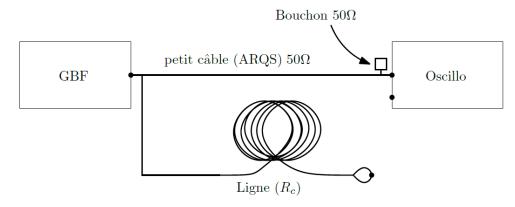
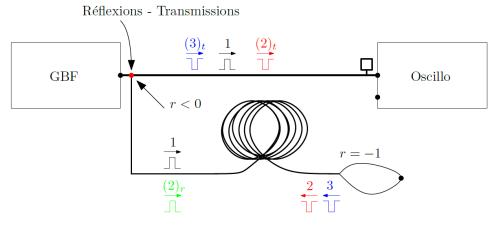


Figure 13 – Montage en sortie fermée

Le chronogramme obtenu est donné figure 15

Interprétation (voir figure 14)

- **✗** Le GBF envoie une impulsion (1) dans les deux câbles.
- 🗶 L'impulsion (1) arrivant à l'oscilloscope n'est pas réfléchie car il y a adaptation.
- **X** l'impulsion (1) arrivant en bout de ligne est réfléchie avec un coefficient de réflexion égal à -1 $(r = -1 \text{ car } R_u = 0)$: l'onde réfléchie est donc une impulsion (2) de signe opposée à l'impulsion (1) En rouge sur la figure 14.
- X L'impulsion (2) arrivant au niveau du GBF est à la fois transmise (impulsion (2)_t en rouge, de même signe) et réfléchie (impulsion (2)_r en vert, de signe opposée car l'impédance rencontrée, $\approx R_g/2$) est inférieure à R_c)
- \mathbf{x} L'impulsion $(2)_t$ arrivant sur l'oscilloscope n'est pas réfléchie car il y a adaptation.
- X L'impulsion $(2)_r$ arrivant en bout de ligne se réfléchie, à nouveau avec changement de signe et donne l'impulsion (3) (en bleu sur le schéma) : Cette impulsion est transmise au niveau du GBF sans changement de signe pour donner l'impulsion $(3)_t$ qui arrive alors à l'oscilloscope sans être réfléchie.
- **X** On pourrait continuer en considérant l'impulsion $(3)_r$...



 ${\bf Figure}~{\bf 14}-{\bf Montage}~{\bf en}~{\bf sortie}~{\bf ferm\'ee}:{\bf Interpr\'etation}$

Notons que l'on pourrait à nouveau utiliser le chronogramme pour déterminer la vitesse de propagation des impulsions dans le câble : chaque impulsion, en dehors de l'impulsion (1), a en effet parcourue une distance 2l en plus, par rapport à l'impulsion précédente.

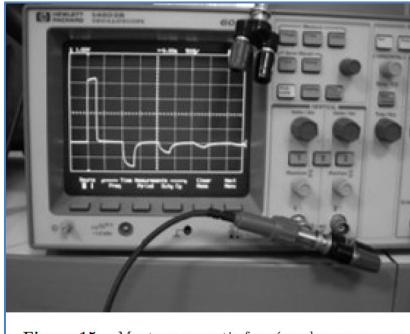


Figure 15 – Montage en sortie fermée : chronogramme

iii) Troisième cas : adaptation en sortie

On effectue le montage suivant :

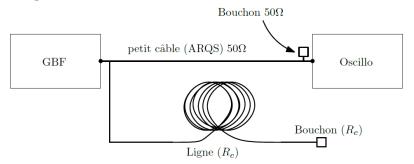
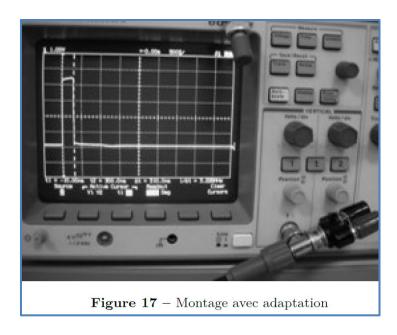


Figure 16 - Montage avec adaptation

Les deux câbles étant adaptés, il n'y a pas de réflexion (notamment pas de réflexion en bout de ligne) : on observe donc juste l'impulsion (1) passée par le petit câble coaxial.



IV – Ondes stationnaires

- 1. Un peu de théorie (pour information)
- - i) Ondes stationnaires dans le cas d'une sortie fermée
- X Dans le câble, il s'établit des ondes stationnaires :

$$\underline{u}(z,t) = \underline{A}\cos(kz + \phi)\exp^{j(\omega t)}$$

✗ Du coté du GBF, on a un pont diviseur de tension comme représenté figure 18 :

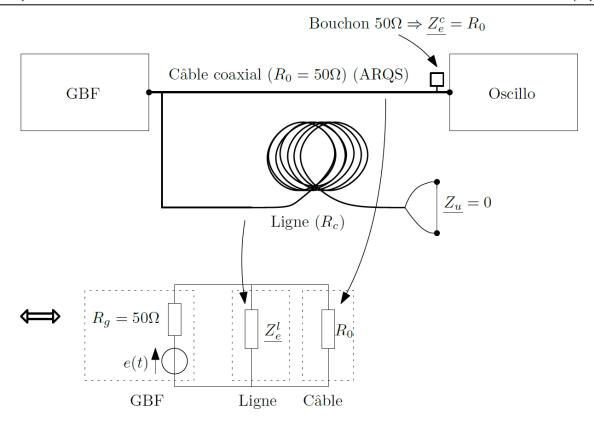


Figure 18 – Ondes stationnaires : schéma équivalent

Avec:

$$\underline{Z_e^l} = R_c \left(\frac{\underline{Z_u} + jR_c \tan(kl)}{R_c + j\underline{Z_u} \tan(kl)} \right) = jR_c \tan(kl)$$

D'où:

$$\underline{u}(0,t) = \underline{A}\cos(\phi)\exp^{j(\omega t)} = \frac{\left(\frac{R_0\underline{Z}_e^l}{R_0 + \underline{Z}_e^l}\right)}{R_g + \frac{R_0\underline{Z}_e^l}{R_0 + Z_e^l}}\underline{e}(t)$$

Sachant que $R_g = R_0$, on obtient :

$$\underline{u}(0,t) = \underline{A}\cos(\phi)\exp^{j(\omega t)} = \frac{R_0\underline{Z}_e^l}{R_0^2 + 2R_0Z_e^l}\underline{e}(t)$$

Sachant que $\underline{e}(t) = E \exp^{j\omega t}$, on obtient par identification :

$$\underline{A}\cos\phi = \frac{\underline{Z_e^l}}{R_0 + 2Z_e^l}E$$

Ainsi:

$$\underline{u}(z,t) = \underbrace{\frac{1}{\cos\phi} \left(\frac{\underline{Z_e^l}}{R_0 + 2\underline{Z_e^l}} \right)}_{A} E\cos(kz + \phi) \exp^{j(\omega t)}$$

X Grâce aux équations de couplage, on en déduit $\underline{i}(z,t)$:

$$\underline{i}(z,t) = \frac{1}{jR_c \cos \phi} \left(\frac{R_0 \underline{Z_e^l}}{R_0^2 + 2R_0 Z_e^l} \right) E \sin(kz + \phi) \exp^{j(\omega t)}$$

x La condition limite, en bout de ligne (z=l), permet de déterminer ϕ :

$$\frac{\underline{u}(l,t)}{\underline{i}(l,t)} = \underline{Z}_u = jR_c \tan(kl + \phi)$$

X Sachant que la ligne est fermée, on a :

$$\underline{Z}_u = 0 \Rightarrow kl + \phi = p\pi \Rightarrow \underline{u}(z,t) = \underline{A}\cos(k(z-l))\exp^{j(\omega t)}$$

et,

$$\cos \phi = \cos kl$$

et donc :

$$\underline{u}(z,t) = \frac{1}{\cos kl} \left(\frac{jR_c \tan kl}{R_0 + 2jR_c \tan kl} \right) E \cos(k(z-l)) \exp^{j(\omega t)}$$

L'amplitude en entrée vaut donc :

$$|\underline{u}(0,t)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\tan kl)^2} \left(\frac{R_0}{2R_c}\right)^2}} \frac{E}{2}$$

- \Rightarrow Cette amplitude est :
 - Maximale (Résonance) pour $kl = \frac{\pi}{2} + p\pi$ soit :

$$f_V = \frac{V}{2l} \left(p + \frac{1}{2} \right)$$

$$l = \left(\frac{1}{4} + \frac{p}{2}\right)\lambda_V$$

- Modes propres équivalents à ceux d'un tuyau sonore ouvert à une extrémité et fermée à l'autre extrémité
- Minimale (Anti-Résonance) pour $kl = p\pi$ soit :

$$f_{N} = \frac{V}{2l} \left(p \right)$$

$$l = \frac{p\lambda_N}{2}$$

Modes propres équivalents à ceux d'un cavité classique (corde de Melde)

ii) Ondes stationnaires dans le cas d'une sortie ouverte

On effectue le même montage que précédemment (figure 18), mais on laisse la sortie ouverte. Dans le cas d'une sortie ouverte, on a :

$$\underline{Z}_{u} = \infty \Rightarrow kL + \phi = \frac{\pi}{2} + p\pi \Rightarrow \underline{u}(z, t) = \underline{A}\sin(k(x - L))\exp^{j(\omega t)}$$

$$\cos \phi = \sin kL$$

$$\underline{Z}_{e}^{l} = \frac{R_{c}}{j\tan kl}$$

et donc:

$$\underline{u}(z,t) = \frac{1}{\sin kl} \left(\frac{R_c}{jR_0 \tan kl + 2R_c} \right) E \sin(k(z-l)) \exp^{j(\omega t)}$$

L'amplitude en entrée vaut donc :

$$|\underline{u}(0,t)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tan kl)^2 \left(\frac{R_0}{2R_c}\right)^2}} \frac{E}{2}$$

- \Rightarrow Cette amplitude est :
 - Maximale (Résonance) pour $kL = +p\pi$ soit :

$$f_V = \frac{V}{2l}(p)$$
$$l = \frac{p\lambda_V}{2}$$

0

Modes propres équivalents à ceux d'un cavité classique (corde de Melde)

• Minimale (Anti-Résonance) pour $kL = \frac{\pi}{2} + p\pi$ soit :

$$f_N = \frac{V}{2l} \left(p + \frac{1}{2} \right)$$

$$l = \left(\frac{1}{4} + \frac{p}{2}\right)\lambda_N$$

Modes propres équivalents à ceux d'un tuyau sonore ouvert à une extrémité et fermée à l'autre extrémité

2. Résultats expérimentaux pour la sortie ouverte

On effectue le montage de la figure $\boxed{18}$ en sortie ouverte ($\underline{Z}_u = \infty$) On recherche les fréquences pour lesquelles on observe des nœuds du coté du GBF :

$$f_{pN} = \frac{V}{2l} \left(p + \frac{1}{2} \right)$$

On obtient les résultats suivants :

p	0	1	2	3
f_{pN} (kHz)	540	1.64×10^3	2.77×10^3	3.90×10^3
$\lambda = \frac{f}{V} \text{ (m)}$	426	140	83	59
$\left(\frac{l}{\lambda}\right)_{exp}$	0.24	0.72	1.22	1.71
$\left(\frac{l}{\lambda}\right)_{th}$	0.25	0.75	1.25	1.75
Nombre de fuseaux	0.5	1.5	2.0	2.5

3. Résultats expérimentaux pour la sortie fermée

On effectue le montage de la figure $\boxed{18}$ en sortie fermée ($\underline{Z}_u=0$) On recherche les fréquences pour lesquelles on observe des nœuds du coté du GBF :

$$f_{pN} = \frac{V}{2l} \left(p \right)$$

On obtient les résultats suivants :

p	1	2	3	4
$f_{pN} (\mathrm{MHz})$	1.05	2.15	3.36	4.38
$\lambda = \frac{f}{V} \text{ (m)}$	219	107	68	53
$\left(\frac{l}{\lambda}\right)_{exp}$	0.46	0.94	1.48	1.92
$\left(rac{l}{\lambda} ight)_{th}$	0.5	1	1.5	2
Nombre de fuseaux	1	2	3	4

4. Tableau récapitulatif

On pose:

$$f_1 = \frac{V}{4l} = 540 \,\mathrm{kHz}$$

Et on étudie:

$$f_{pr} = \frac{f_{pN}}{f_1} = 2p$$

Où p est un entier ou un demi-entier.

On obtient alors le tableau :

p	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
f_{pN} (MHz)	0.540	1.05	1.64	2.15	2.77	3.36	3.9.	4.38
$f_{pr} = \frac{f_{pN}}{f_1}$	1	1.944	3.037	3.981	5.130	6.222	7.222.	8.111

La régression linéaire effectuée à partir de ce tableau donne le résultat suivant :

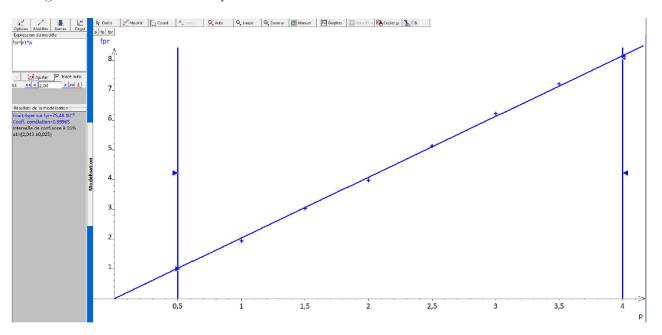


Figure 19 – Régression linéaire : r = 0.99965 et $a = 2.043 \pm 0.025$

Conclusion : la régression linéaire donne des résultats satisfaisant : la pente est proche de 2, le coefficient de corrélation est correct. Le modèle utilisé pour décrire les ondes stationnaires semble satisfaisant. Pour une véritable validation, il faudrait introduire les incertitudes et déterminer le χ^2 .