VI – Diffusion

L'objectif de ce TP consiste à étudier la réponse d'une ligne RC composée d'une vingtaine de cellules, à différentes excitations : continu, sinusoïdal, échelon et impulsion.

Ces manipulations sont analogues aux expériences de diffusion thermique que l'on peut faire avec une barre conductrice de la chaleur isolée latéralement, sauf qu'elle est beaucoup plus simple à mettre en place. On fera autant que possible des rapprochements avec cette partie du cours.

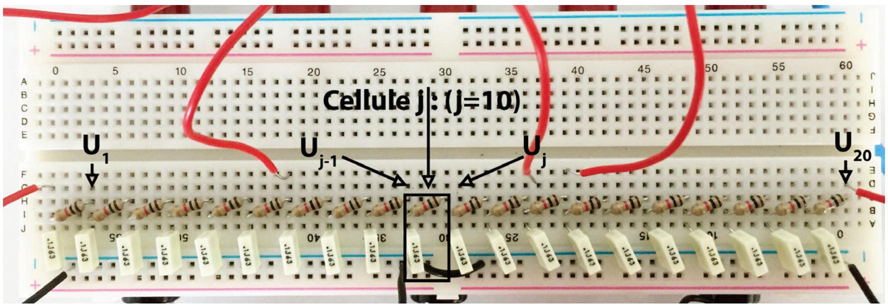
Matériel à disposition :

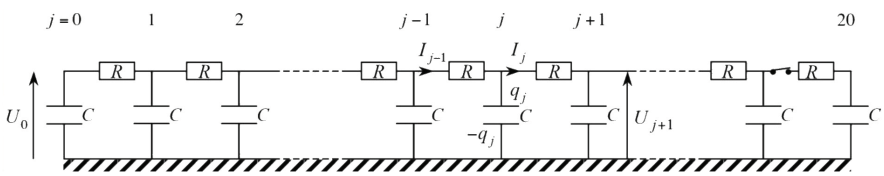
- 1 Oscilloscope numérique Keysight avec câbles coaxiaux, et T…
- 1 GBF FI 5505 GA
- 1 alimentation RAD 88
- 1 plaquette « Diffusion RC »
- 2 multimètres
- Les notices des différents appareils de mesure.

I – Préparation

I-1) Document 1 : le dispositif

Le montage est constitué de vingt cellules RC régulièrement espacées avec R=1,0kΩ et C=100nF, et numérotées de j=0 à j=21. On appelle a la dimension d'une cellule : a ≈7 mm.





La charge électrique $q_j(t) = q(z_j, t)$ sur la capacité n°j $(z_j = ja)$ peut passer sur l'une ou l'autre des capacités j-1 ou j+1, ce qui réalise une marche au hasard de la charge à une dimension. La charge $q_j(t) = q(z_j, t)$, ou la tension $U_j = \frac{q_j}{C}$, suit l'équation de diffusion en q ou U.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = D\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \text{ où } \begin{cases} D = \dfrac{a^2}{\tau} \\ \tau = RC \end{cases}$$

I-2) Mise en équation

- En appliquant la loi des nœuds et la loi des mailles sur les cellules (j-1) et j, en déduire :

$$\tau\frac{dU_j}{dt} = U_{j+1} + U_{j-1} - 2U_j$$

- En faisant l'approximation des milieux continus : $U_j = U(z,t),\ U_{j-1} = U(z-a,t)\ et\ U_{j+1} = U(z+a,t)$ démontrer que :

$$U_{j+1} + U_{j-1} - 2U_j \sim \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} a^2$$

- En déduire l'équation de diffusion de charges électriques :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \; ou \; \frac{\partial q}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 q}{\partial z^2}$$

- Calculer le coefficient $D = \frac{a^2}{RC}$ avec son incertitude $\frac{\Delta D}{D} = \sqrt{4\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta C}{C}}$

II - Régime stationnaire

- Appliquer une tension continue $U_0 = 10{,}0\ V$ (mesurée précisément avec un voltmètre) à l'extrémité j = 0 et court-circuiter l'autre extrémité en j =20 d'où $U_{20} = 0$.
- Quelle est la situation analogue pour la diffusion thermique ou la diffusion de particules ?
- Représenter le schéma équivalent de la ligne de diffusion en régime stationnaire.
- À l'aide d'un voltmètre, mesurer les tensions U_j (6 ou 7 mesures également réparties suffisent) puis tracer la courbe $U_j = f(j)$.
- Vérifier que la tension varie linéairement avec la position suivant $U_j = U_0\left(1 - \frac{j}{20}\right)$. Démontrer cette relation.
- Déterminer l'intensité du courant débité par l'alimentation à l'aide d'un ampèremètre et en déduire la résistance électrique. Comparer à la valeur attendue.

III) Régime sinusoïdal forcé

III-1) Absorption

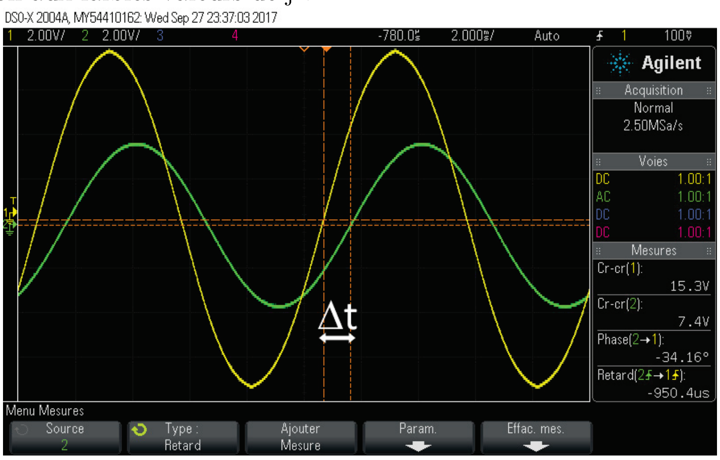
- Appliquer une tension $U_0(t)$ sinusoïdale d'amplitude 7,5 V et de fréquence f = 100Hz. L'extrémité j=20 n'est pas court-circuitée.
- Quelle est la situation analogue en diffusion thermique ?
- En cherchant une solution sous la forme $U(z_j, t) = F(z)e^{j\omega t}$, montrer que la solution est de la forme où l'on précisera l'expression de k et v_φ.

$$U_j(t) = \underbrace{U_0 e^{-z_j\sqrt{\frac{\omega}{2D}}}}_{amplitude} \underbrace{\cos(\omega t - kz_j)}_{propagation} = U_0 e^{-ja\sqrt{\frac{\omega}{2D}}} \cos\left(\omega\left(t - \frac{ja}{v_\varphi}\right)\right)$$

- A quel phénomène correspond la décroissance de l'amplitude ?
- Faire les mesures de U_j pour différentes valeurs de $j \leq 10$. On relèvera U_j mais aussi le retard de U_j par rapport à U_0.

Numéro j	1	2	3	4	5	6	7	8	10
$U_j\ (V)$									
$\Delta t\ (\mu s)$									

- En déduire grâce au tracé de $Ln\left(\frac{U_j}{U_0}\right) = f(j)$ une valeur de τ, puis de D. Conclure
- Pourquoi se limite-t-on aux faibles valeurs de j ?



Exemple de signal obtenu pour j=4

III-2) Propagation

- Exprimer le retard Δt de la tension $U_j(t)$ par rapport à la tension à l'entrée U_0.
- En déduire grâce au tracé de $\Delta t = f(j)$ une valeur de τ, puis de D. Conclure.
- En déduire une condition sur la longueur d'onde puis sur la fréquence pour que l'approximation des milieux continus soit valable. Conclure.

IV - Réponse à un échelon de tension

- Appliquer maintenant une tension $U_0(t)$ de forme créneau symétrique d'amplitude 10 V (donc variant de -10 V à 10 V) et de très basse fréquence (1Hz). L'extrémité j = 20 n'est pas court-circuitée.
- Quel est le phénomène analogue pour la diffusion thermique ?
- Observer les tensions $U_j(t)$ pour $j \leq 10$.
- On appelle $t_{\frac{1}{2}}$ le temps correspondant à l'annulation de la tension $U_j(t)$ (milieu de −10 V à 10 V). Montrer que : $t_{\frac{1}{2}} = 1{,}099\,\tau\, j^2$ à l'aide des documents suivants.
- Représenter graphiquement $t_{\frac{1}{2}} = f(j^2)$.
- En déduire, à l'aide des documents suivants, une évaluation de la constante de temps τ (puis D) par une régression linéaire pour les premières valeurs de j. Conclure.

Utilisation de la fonction Zoom pour la mesure de $t_{\frac{1}{2}}$

Document 2 : Résolution de l'équation de la diffusion (Pour information)

$$Soit\ \frac{\partial U}{\partial t} = D\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\ (1)$$

$$Posons\ X = \frac{z}{2\sqrt{Dt}}\ et\ U(z,t) = f(X) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial f}{\partial X}\dfrac{\partial X}{\partial z} = \dfrac{1}{2\sqrt{Dt}}\dfrac{\partial f}{\partial X} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \dfrac{1}{4Dt}\dfrac{\partial^2 f}{\partial X^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial f}{\partial X}\dfrac{\partial X}{\partial t} = -\dfrac{t^{-\frac{3}{2}}}{4}\dfrac{z}{\sqrt{D}}\dfrac{\partial f}{\partial t} \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial t} = -z\dfrac{t^{-\frac{3}{2}}}{4\sqrt{D}}\dfrac{\partial f}{\partial X} \end{cases}$$

$$(1)\ s'écrit\ donc :\ -z\frac{t^{-\frac{3}{2}}}{4\sqrt{D}}\frac{\partial f}{\partial X} = D\frac{1}{4Dt}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \Rightarrow \frac{z}{\sqrt{Dt}}\frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = 0 \Rightarrow 2Xf' + f'' = 0$$

$$Posons\ F = \frac{\partial f}{\partial X} \Rightarrow 2XF + F' = 0 \Rightarrow \frac{dF}{F} = -2XdX \Rightarrow Ln(F) = -X^2 + cste$$

$$\Rightarrow F = F_0 e^{-X^2} \Rightarrow f(X) = \int_0^X F_0 e^{-X^2} dX + cste$$

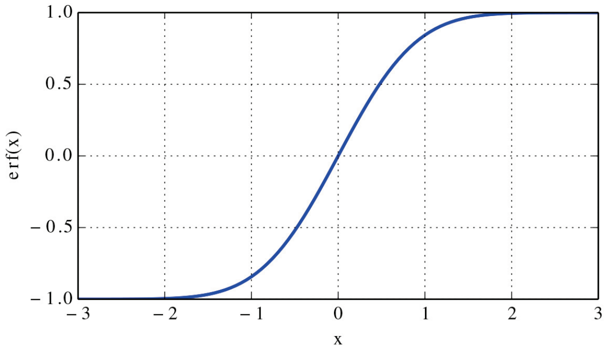
$$Or\ f(0) = E_0 \Rightarrow f(X) = \int_0^X F_0 e^{-X^2} dX + E_0$$

$$et\ f(\infty) = -E_0\ \Leftrightarrow \int_0^\infty F_0 e^{-X^2} dX + E_0 = -E_0\ \Leftrightarrow F_0\frac{\sqrt{\pi}}{2} = -2E_0 \Leftrightarrow F_0 = -\frac{4E_0}{\sqrt{\pi}}$$

$$Donc : f(X) = -4E_0 * \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^X e^{-X^2} dX + E_0 \Rightarrow U(z,t) = E_0\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{erf}(X)\right)\ \text{où}\ \mathrm{erf}(X) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^X F_0 e^{-X^2} dX$$

$$Donc : U_j(t) = \pm E_0\left(1 - 2\,\mathrm{erf}\left(\frac{ja}{2\sqrt{\frac{a^2 t}{\tau}}}\right)\right) = \pm E_0\left(1 - 2\,\mathrm{erf}\left(\frac{j}{2}\sqrt{\frac{\tau}{t}}\right)\right)$$

Document 3 : La fonction Erreur



On retiendra surtout que : $erf(0{,}477) = \frac{1}{2}$

V - Réponse à une impulsion

A l'aide du générateur de fonction, créez une impulsion telle que

- $V_{min} = 0V, V_{max} = 10V, largeur_{pic} = 100\mu s$ avec une fréquence de 100Hz.
- A l'aide du protocole de votre choix, calculer la vitesse de groupe. Conclure.